МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $ab \vdots 2^{15} 7^{11}$

$bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$

$ab \cdot bc \cdot ac = (2^{15} \cdot 7^{11}) \cdot (2^{17} \cdot 7^{18}) \cdot (2^{23} \cdot 7^{39}) \cdot K^2$

$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot K^2$

но т.к. $(abc)^2$ => не может быть простого множителя в нечётной степени => K тоже делится на 2. Пусть

abc

$ab \cdot ac \cdot bc \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$

$(abc)^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$

но т.к. в левой части стоит квадрат, и он не может быть представлен в виде простых множителей в нечётной степени => $(abc)^2 \vdots 2^{56}$

$abc \vdots 2^{\frac{56}{2}} \cdot 7^{\frac{68}{2}}$

$abc \vdots 2^{28} 7^{34}$

Наименьшее число $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ba}$

Если $m>1$ значит у $a+b$ и $((a+b)^2-9ab)$ есть общий делитель (т.е. m)

$a+b$ и $(a+b)^2$ – имеют общий делитель $a+b$

$\Rightarrow$ $(a+b)$ и $9ab$ имеют тоже общий делитель

$a+b$ и ab не имеют общих делителей (т.к.

~~$a+b \in b$~~ Пусть $(a+b)k = ab \cdot t$, $k, t \in \mathbb{N}$

$\underbrace{\left(\frac{a}{b}+1\right)}_{\notin \mathbb{Z}}k = t \Rightarrow t \notin \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $a+b \vdots \underset{m}{\underset{\shortparallel}{9}}$ (т.к. нам нужен наибольший делитель) (поэтому $m \geq 3, 1$ и ± 9.

Пример. Пусть $a=4$, $b=5$:

$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{4+5}{(4+5)^2-9\cdot(4\cdot5)} = \frac{9}{81-180} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$

$m=9$

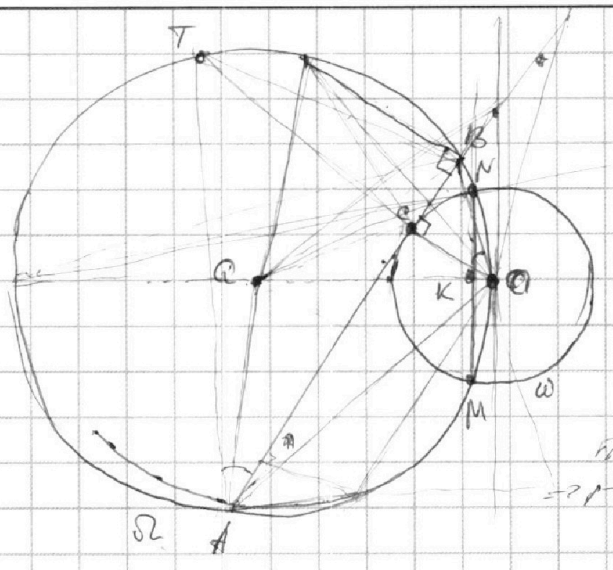
Отв.: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Q - ц. Ω O - центр. ω

OC ⊥ AD т.к. AB кас. к ω
проведём OC до пересечения с Ω в (.) T
AC · BC = OC · CT
т.к. (произв. отрезков а хорд) равно

Пусть AC = 17x, CB = 7x
⇒ AC · BC = 4 · 17x² = TC · CO

Пусть M и N - точки пересечения ω и Ω
тогда QO ⊥ MN (т.к. лин. центров)
QO ∩ MN = K

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

$\sqrt{3x^2-6x+2}=1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1}\quad |^2$

$\begin{cases} 3x^2-6x+2=(1-9x)^2+3x^2+3x+1+2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1} \\ 1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1}\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{1}-18x+81x^2+9x-\cancel{1}+2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}=0 \quad (1) \\ \sqrt{3x^2+3x+1}\geq 9x-1 \quad (2) \end{cases}$

(1) $81x^2-9x+2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}=0$

$(1-9x)(2\sqrt{3x^2+3x+1}-x)=0$

$\left[\begin{array}{l} 1=9x \\ 2\sqrt{3x^2+3x+1}=x \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ \begin{cases} x^2=12x^2+12x+4 \\ x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 11x^2+12x+4=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \quad \text{рац. нет.} \quad D_1=36-44<0 \\ x=\frac{1}{9} \end{array}\right.$

$x=\frac{1}{9}$

(2) $\begin{cases} 3x^2+3x+1\geq(9x-1)^2 \\ 9x-1\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2+3x+1\geq 0 \quad D<0,\ 3>0 \\ 9x-1<0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 78x^2-21x\leq 0 \\ x\geq\frac{1}{9} \end{cases} \\ x<\frac{1}{9} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(26x-7)\leq 0 \\ x\geq\frac{1}{9} \end{cases} \\ x<\frac{1}{9} \end{array}\right.$

$x\in\left(-\infty;\frac{7}{26}\right]$

$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-\infty;\frac{7}{26}\right] \\ x=\frac{1}{9} \end{cases}$

Ответ: $\frac{1}{9}$

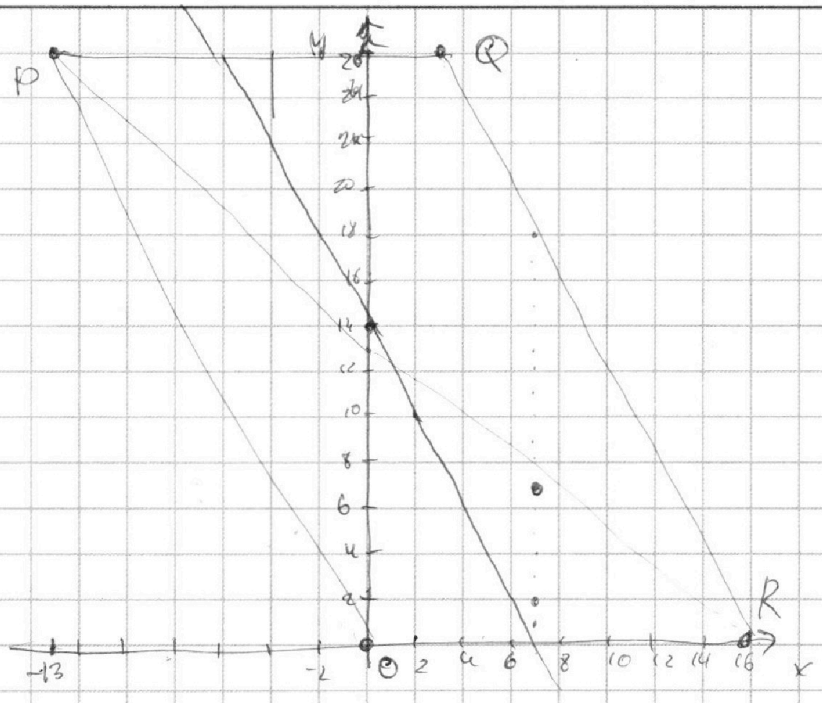
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☑ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5.



$y_2 - y_1 = -2x_2 + x_1 + 14$

$y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1) + 14$

$\Delta y = -2\Delta x + 14$

$\Rightarrow y_2 - y_1 \vdots 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

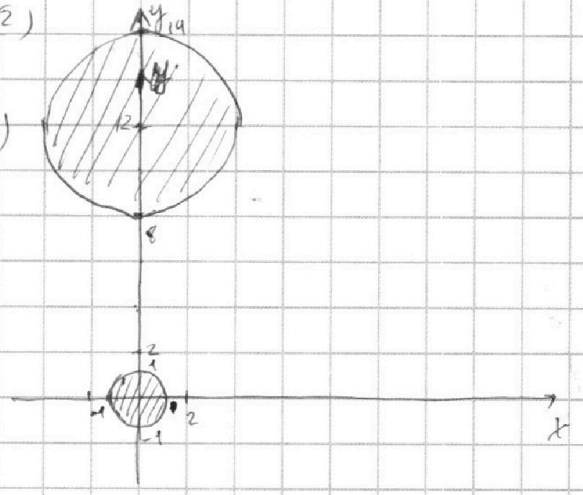
МФТИ

6. $\begin{cases} ax+y-8b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 & (2) \end{cases}$ a - ? : $\exists b$ т.ч. 2 реш.

(2) $\begin{cases} x^2+y^2-1\le 0 \\ (y-12)^2+x^2\ge 16 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases}$

(2)

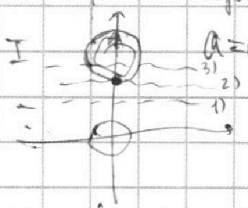


(1) $ax+y-8b=0$

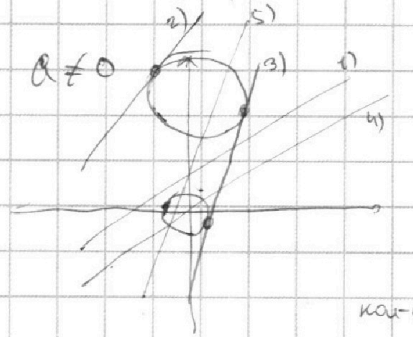
$y=-ax+8b$ - прямая

Рассмотрим случаи:

I $a=0$



II $a\ne 0$

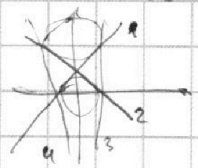


кол-во реш: возможное

пример:
0 - см. 1)
1 - 2)
∞ - 3)

возможное кол-во решений - пример
0 - 1)
1 - 2)
2 - 3)
∞ - 4) или 5)

Подходят все прямые, которые являются касательными к 2-ум окр.
Таких прямых - 4 шт.



1 и 3 | симметричны
2 и 4 | отн. OY

Выразим у из $ax+y-8b=0$: $y=-ax+8b$ и подст. в ур-ния окр.:

$\left[\begin{array}{l} x^2+(8b-ax)^2=1 \\ x^2+(-ax+8b-12)^2=16 \end{array}\right.$ каждое из ~~ур-ний~~ записанных ур. имеет ровно 1 реш. (т.к. только 1 точка касания), это значит, что $D=0$

$\left[\begin{array}{l} (a^2+1)x^2-16abx+64b^2-1=0 \\ (a^2+1)x^2-2a(8b-12)x+(8b-12)^2-16=0 \end{array}\right.$

$\begin{cases} D/4_{(1)}=64a^2b^2-(64b^2-1)(a^2+1)=0 \\ D/4_{(2)}=a^2(8b-12)^2-((8b-12)^2-16)(a^2+1)=0 \end{cases}$

(продолжим дальше)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(продолжение № 6)

$$\begin{cases} 64a^2b^2-(64b^2-1)(a^2+1)=0 \\ a^2(8b-12)^2-((8b-12)^2-16)(a^2+1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-64b^2+1=0 \\ 16a^2-(8b-12)^2+16=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{a^2-64b^2+1=0} \quad a^2=64b^2-1 \\ 4a^2-(2b-3)^2+4=0 \end{cases}$$

$$\cancel{64b^2-1-(2b}\begin{cases} 64b^2-1-4b^2+12b-9+4=0 \\ a^2=64b^2-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10b^2+1=0 \\ a^2=64b^2-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\pm\frac{1}{\sqrt{10}} \\ a=\pm\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

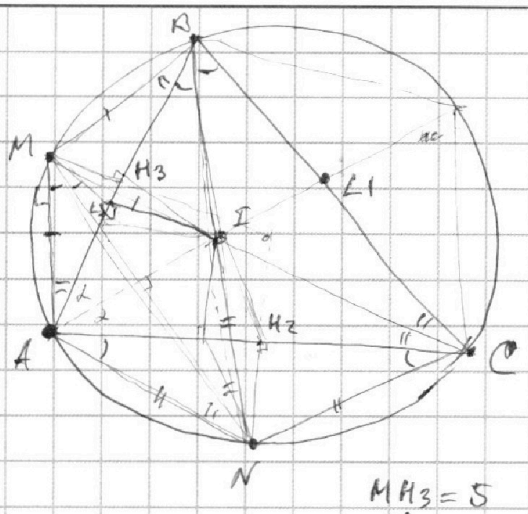
Ответ: $a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; $-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☑

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



AI - ?

центр. впис. окр.

т.к. $AN = NC \Rightarrow AN = NC$

$\Rightarrow BN$ - бис. $\angle ABC$

($AM = MB$) CM - бис. $\angle ACB$ (аналог.)

$\Rightarrow BN \cap CM = I$

по лемме о трезубце:

$AN = CN = IN$

$BM = AM = MI$

$MH_3 = 5$, $NH_2 = 2{,}5$ - мед. и выс. р/б $\triangle$-ов AMB и $\triangle ANC$
(высоты к AB и AC)

IL_2 - радиус впис окр к AC

IL_3 - радиус впис окр. с BC

$IL_2 \parallel NH_2$ $IL_3 \parallel MH_3$

Пусть $\angle ABN - \angle ACN = \beta$
$\angle MAB = \angle MCA = \gamma$ $\Rightarrow$ $AC = 2tg\gamma \cdot H_2N$
$AB = 2tg\beta \cdot MH_3$

AL_1 - бис. $\Rightarrow \frac{CL_1}{BL_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{tg\gamma}{tg\beta} \cdot \frac{H_2N}{MH_3}$

$\frac{AI}{IL_1} = \frac{AB}{BL_1} = \frac{AC}{CL_1} = 2tg\beta \cdot MH_3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y \cdot 24x = (y+7x)\cdot\sqrt{(y+7x)^2+49}$

$a+b = mx$

$a^2-7ab+b^2 = my$

$ab = kx$

$m = \frac{a^2-7ab+b^2}{y} = \frac{a+b}{x}$

$\frac{x}{y} =$

$a+b = (a^2-7ab+b^2)\frac{m}{t}$

$t(a+b) =$

$a^2-7ab+b^2$

$(a+b)^2-9ab$

$2x_2^2-2x_1+y_2-y_1=14$

$y_2-y_1=14$

$\frac{y_2-y_1}{y-y_1} = \frac{-x_2-x_1+7}{x-x_1}$

$y_2-y_1 = -2(x_2-x_1)+14$

$\Delta y = -2\Delta x+14$

$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b-\frac{9ab}{a+b}$

$\Delta y = -2\Delta x+14$

$a+b$

$x_1-x_2 =$

$y_2-y_1 = 14-2x_2$

$16+13=29$

$(2;10)$

$(4;6)$

$24y^2x^2 = (y+7x)^2(y+7x)^2+49$

$24y^2x^2 = (y+7x)^4+49(y+7x)^2$

$(17+x)^2$

$13+13-7-a$

$(19-a)\cdot(7+a) = 17\cdot 7\cdot x^2$

$49-49x^2 = a^2$

$a = 7\sqrt{(1+x^2)}$

$b^2 = 49+289x^2-2\cdot 69\cdot\frac{5}{13}$

$49+289x^2$

$ax+y-8b=0$

$y = -ax+8b$

$\begin{cases} x^2+(ax-8b)^2=1 \\ x^2+(-ax+8b-12)^2=16 \end{cases}$

$(a^2+1)x^2-8ab\,x+64b^2-1=0$

$169\cdot 2-2\cos 2\alpha\cdot 169 = (24x)^2 = 49+289x^2+49+49x^2+2\cos 2\alpha$

$(8b-12) = ax$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma} = \frac{17}{7}$

$(7+(17x)^2 = a^2$

$a+b = 9+\frac{9}{\frac{a}{b}+1}$

$a+b = \frac{9a}{\frac{a}{b}+1}$

$(a+b)\left(\frac{a}{b}+1\right)-9a$

$\frac{a}{b}(a+b)$

$2\alpha = 180-2\gamma$

$\alpha = 90-\gamma$

$\theta = 2\alpha+\beta$

$2\alpha+\beta+2\gamma+\beta=180$

$\alpha+\beta+\gamma=90$

$20\cdot 9$

$\gamma+\alpha=90-\beta$

$y = +2(2)+14$

$7\cdot 17$

$64a^2b^2-64a^2b^2+a^2+1-64b^2$

$a^2(8b-12)^2-(8b-12)a^2+(8b-12)+16=0$

$60a^2-64b^2+$

$60b^2+b=0$

$a^2 = 64\cdot\frac{1}{10}$

$\frac{64-10}{10}$

$\frac{25}{10}$

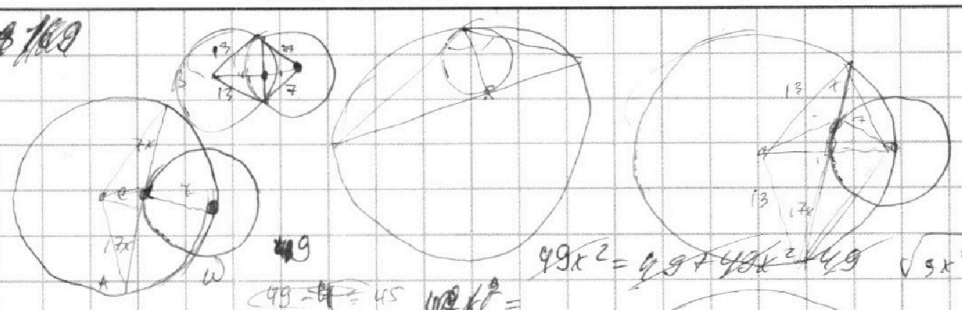
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1



$a^2 = 49 + 49x^2$

$49x^2 = 49 + 49x^2 - 49$

$\sqrt{3x^2+3x+1} \geq 1$

$\frac{a+b}{\frac{a}{b}-7\frac{a}{b}+1} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2-7\frac{a}{b}+1}$

$\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}-7\right)+1}$

$ab: 2^{15}\cdot 7^{11}$

$bc: 2^{17}\cdot 7^{18}$

$ac: 2^{23}\cdot 7^{29}$

$a^2b^2c^2: 2^{45}\cdot 7^{68}$

$abc: 2^{23}\cdot 7^{34}$

$x = \frac{1}{9}$ $2\sqrt{\ } = x$

$(1-9x)(2\sqrt{\ } + x) = 0$

$81x^2 - 9x + 2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1} = 0$

$x(9x-1) + 2(1-9x)\sqrt{\ } = 0$

$1 - 18x + 81x^2 + 9x + 2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1} = 0$

$\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

$a_1 = 0 = b = 3$

$\sqrt{3x^2-6x+2} = 1-9$

$\begin{cases} 3x^2-6x+2 = (1-9x)^2 + 3x^2+3x+1 + 2(\ )\sqrt{\ } \\ (1-9x) + 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$ $3x^2-6x+2 \geq 0$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$\frac{\Delta y}{y-y_1} = \frac{\Delta t}{t-t_1}$

$\frac{y-y_1}{\Delta y} = \frac{t-t_1}{\Delta t}$

$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

$\frac{\frac{a}{b}+1}{\left(\frac{a}{b}+1\right)^2-9\frac{a}{b}}$

$\frac{\frac{a}{b}+1}{\left(\frac{a}{b}-3\sqrt{\frac{a}{b}}+1\right)\left(\frac{a}{b}+3\sqrt{\frac{a}{b}}+1\right)}$

$\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$a: 2^{11}$

$c: 2^{13}$

$b: 2^{4}$

$y = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}$

$AI - ?$

$AI = BC - MN$

$\begin{cases} (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \\ x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases}$

$y = -ax + 8b$

$y - y_1 = 2$

$x - x_1 = -\frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{12}{5}$

$y_0 = \sqrt{1-x_0^2}$

$\frac{44}{25} \cdot 1 = \frac{144-25}{25} = \frac{119}{25}$

$576 + 1$

$6{,}76\cdot 25 - 4{,}8\cdot 25\sqrt{1-x_0^2}$

$\begin{cases} (x_0-6)^2 + (2{,}4-(-12))^2 = \frac{119}{25} \\ x_0^2+y_0^2=1 \end{cases}$

$y^2 = 2{,}4^2 - 4{,}8\sqrt{1-x_0^2} + 1 - x_0^2 = \frac{119}{25}$