



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

стр. 1 из 8

$$\begin{array}{l} ab : 2^{15} \\ bc : 2^{17} \\ ac : 2^{23} \end{array} \Rightarrow (abc)^2 : 2^{15+17+23} = 2^{55} \Rightarrow abc : 2^{28}$$

$$ac : 7^{39} \Rightarrow abc : ac : 7^{39}. \text{ Значит, } abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \leq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Докажем, что $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ - возможно. Пример:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{16}; \quad b = 2^5; \quad c = 2^{13} \cdot 7^{23}. \quad \text{Тогда } ab = 2^{15} \cdot 7^{16}; \quad 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{23}; \quad 2^{17} \cdot 7^{18}; \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{39}; \quad 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

стр. 2 из 8

m - наибольший. $\Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2)$

Применим аналог алгоритма Евклида для многочленов:

$$\begin{array}{r|l} a^2-7ab+b^2 & a+b \\ a^2+ab & a-8b \\ \hline -8ab+b^2 & \\ -8ab-8b^2 & \\ \hline 9b^2 & \end{array}$$

$$m = \text{НОД}(a+b; 9b^2)$$

Предв $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b^2) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; 9b^2) = 9, \text{ т.е. } m = 9.$$

Максимальное $m = 9$. Пример: $a = 2; b = 7$.

$$\frac{2}{7} \text{ несокр.}; \quad \frac{2+7}{2^2-7 \cdot 2 \cdot 7+7^2} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5} - \text{сократимо на } 9$$

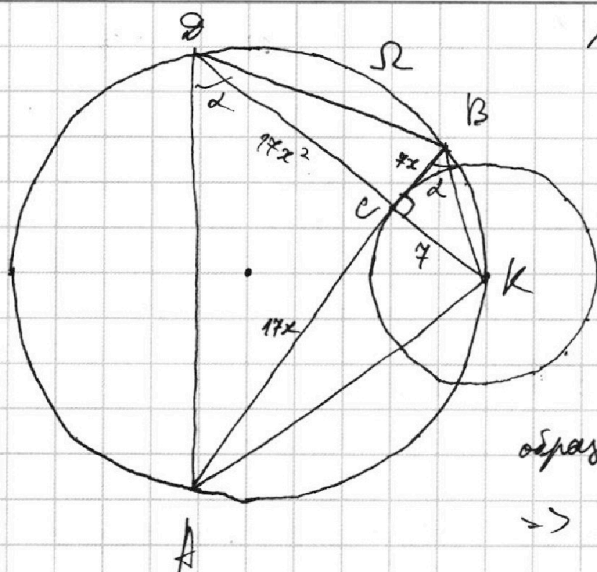
Ответ: $m = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



no 3

ср. 3 из 8

Дуэль К-уека со

Пусть $AC = 17x$; $BC = 7x$

Рассуждаем $k \in C \cap \Omega = \emptyset$

$\triangle BCD \sim \triangle KCA$ как треугольн.,
образованные пересечением хорд. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{KC}; \quad DC = \frac{17x \cdot 7x}{7} = 17x$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Тогда $\angle CBK = \angle CDA = \alpha$

Ето +. Пифагора

$$A_k = \sqrt{A_c^2 + k c^2} = \sqrt{289x^2 + 49}$$

Es ist $\triangle A \cong \triangle B$

$$\frac{Ak}{\sin \alpha} = 2R$$
 , где R - радиус окис. сфер-зи.

$$\sqrt{289x^2+49} \cdot \sqrt{x^2+1} = 26 \quad ; \quad (289x^2+49)(x^2+1) = 676.$$

$$\begin{aligned} 28x + 77x^2 - 627 &= 0 \\ 8 &= 77x^2 + 4 \cdot 28 \cdot 627 \\ x^2 &= \frac{-77 \pm \sqrt{77^2 + 4 \cdot 28 \cdot 627}}{56} \\ &= \frac{\sqrt{11^2 + 16 \cdot 627} - 11}{8} \end{aligned}$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0.$$

$$x = \frac{-338 \pm \sqrt{338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627}}{2 \cdot 289}$$

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 624} - 338}{2 \cdot 289}}$$

Answer: $\sqrt{\frac{338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627}{2 \cdot 289}} - 338$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

стр. 4 из 8

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

Сделаем замену: $a = 3x^2-6x+2$; $b = 3x^2+3x+1$; $a, b \geq 0$
 Тогда $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b$;

$$\begin{aligned} (3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) &= (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) \\ (1-9x) &= (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) \end{aligned}$$

I вариант: $1-9x=0$

$x = \frac{1}{9}$ - подходит,
 $3x^2-6x+2 > 0$; $3x^2+3x+1 > 0$.

II вариант: $1-9x \neq 0$, сократим на нем.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2-6x+2} &= 1 - \sqrt{3x^2+3x+1} \\ 3x^2-6x+2 &= 3x^2+3x+2 - 2\sqrt{3x^2+3x+1} \\ 9x &= 2\sqrt{3x^2+3x+1} \quad (*) \\ 81x^2 &= 12x^2+12x+4 \end{aligned}$$

$$69x^2-12x-4=0.$$

$$\frac{9}{4} = 6^2 + 4 \cdot 69 = 312 \quad ; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69}$$

Из (*) $\Rightarrow 9x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{6 - \sqrt{312}}{69}$ не подходит.

При $x = \frac{6 + \sqrt{312}}{69} (> 0)$ $3x^2+3x+1 > 0$, $3x^2-6x+2 = 3 \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{312}}{69}\right)^2 -$

$$\begin{aligned} - 6 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 2 &= 3 \cdot \frac{348 + 12\sqrt{312}}{69^2} - 6 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 2 = \\ &= \frac{1044 + 36\sqrt{312} - 36 \cdot 69 - 6 \cdot 69\sqrt{312} + 2 \cdot 69^2}{69^2} = \frac{1044 + 102 \cdot 69 - 6 \cdot 75 \cdot \sqrt{312}}{69^2} < 0. \end{aligned}$$

$$1044 + 102 \cdot 69 = 1044 + 7038 = 8082$$

4450;

$$\frac{8082}{450} < \sqrt{312}$$

$$8082^2 < 312 \cdot 450^2$$

Значит, $x = \frac{6 + \sqrt{312}}{69}$ не подх

Ответ: $\frac{1}{9}$.

$$\begin{array}{r} 8082 \\ \times 8082 \\ \hline 16164 \\ + 64656 \\ + 64656 \\ \hline 65318724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 202500 \\ \times 312 \\ \hline 14050 \\ + 2025 \\ \hline 6075 \\ + 631800 \\ \hline 631800 \end{array}$$



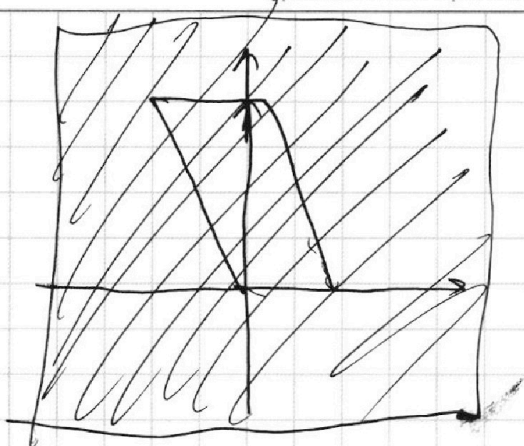
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

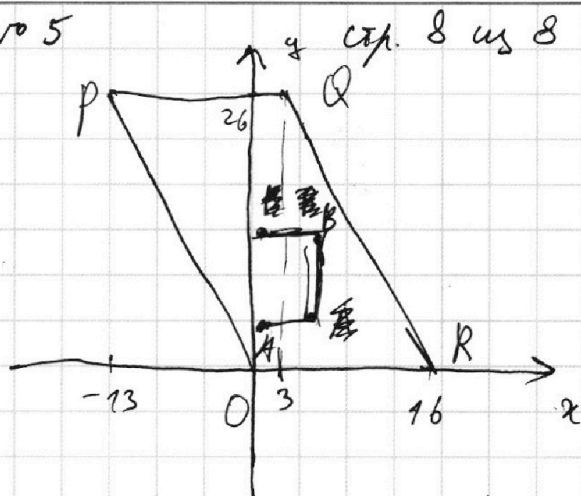
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$ — длина лачаной (ш. рас.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

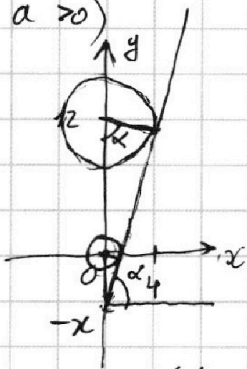
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6. (продолжение)

стр. 6 из 8

Изобразим коэфф-т наклона общей кас. (касаясь окруж.)



Пусть прямая пересекает ось y в т. $(0; -x)$

Тогда, т.к. радиус-нормаль образует перпендикуляр с кас., то

$$\frac{x}{x+4} = \frac{1}{4}; \quad x=4. \quad \text{Значит, } \alpha = \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{16^2 - 4^2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} = \sqrt{15}.$$

Второе значение α тоже будет $-\sqrt{15}$.

Ответ: $\alpha = \pm \sqrt{15}$

(α -угол наклона прямой)



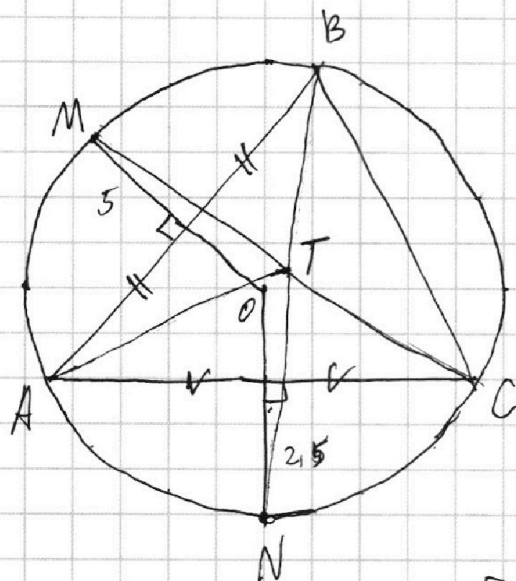
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 7.

стр. 7 из 8

N - серед. AB , M - серед. AC $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ABN = \angle CBN$$

$$\angle BCM = \angle ACM.$$

И.с. BN и CM - биссектрисы $\Rightarrow$

$\rightarrow T = BN \cap CM$ - центр
впис. окруж-ти

Дал. M - серед. AC , N - серед. AB , то $OM \perp AC$
 $ON \perp AB$

и OM делит AB и ON - AC пополам

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5.

стр. 5 из 8

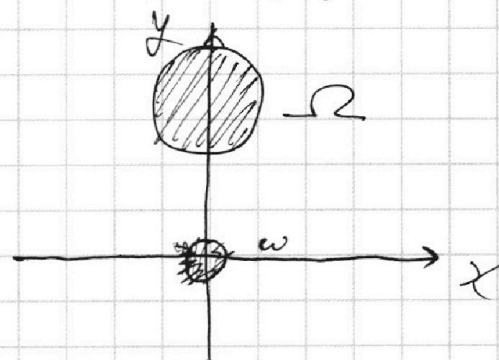
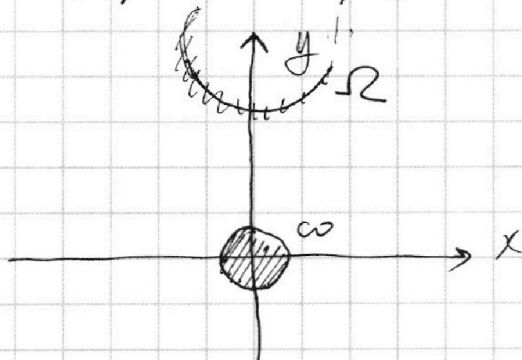
$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0.$$

1 вариант:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

2 вариант:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16. \end{cases}$$

$(x; y)$ лежит внутри окр-ти ω
с центром $(0; 0)$ и рад. 1.
 $(x; y)$ лежит вне окр-ти Ω
с центром $(0; 12)$ и рад. 4.

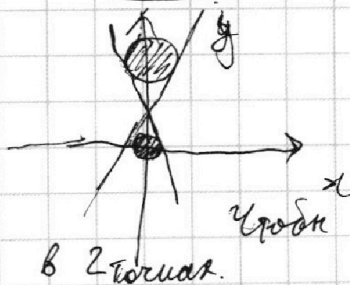
$(x; y)$ лежит вне окр-ти ω
с ц. $(0; 0)$ и рад. 1.
 $(x; y)$ лежит внутри окр-ти Ω
с ц. $(0; 12)$ и рад. 4.



$$ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = 8b - ax \quad \text{— прямая. Чтобы}$$

решений было $\neq \infty$, прямая должна касаться окружностей.

Но тогда, при заданных a, b будет по 2 точки касания, т.е. ~~каждая~~ ~~варианта~~ ~~всего 4~~ ~~значит~~



прямая должна касаться хотя бы одной из окр-тей. Но так как эти окр-ти не имеют общих точек, то всегда будут при заданных a (коэф-те наклона прямой)

чтобы при одном b 2 вар-та, прямая кас. окр-тей

в 2 точки.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

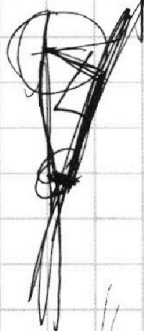


$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14.$$



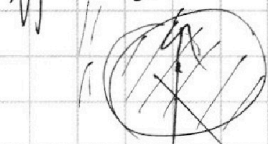
$$y_2 + 2x_2$$

$$y_2 - 2x_2 = 14 + y_1 - 2x_1$$

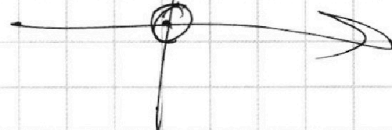
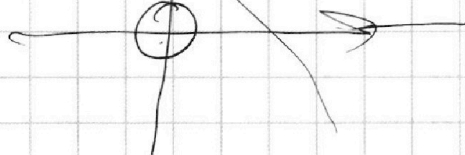


$$ax + y - 8b = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 \quad (x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

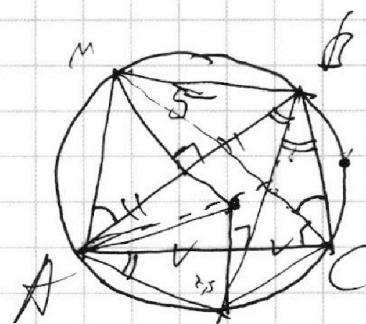
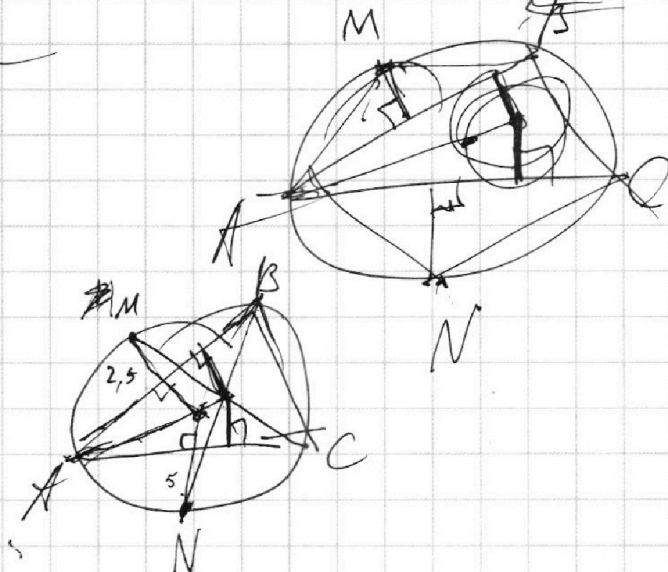


$$y - 8b - az$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$





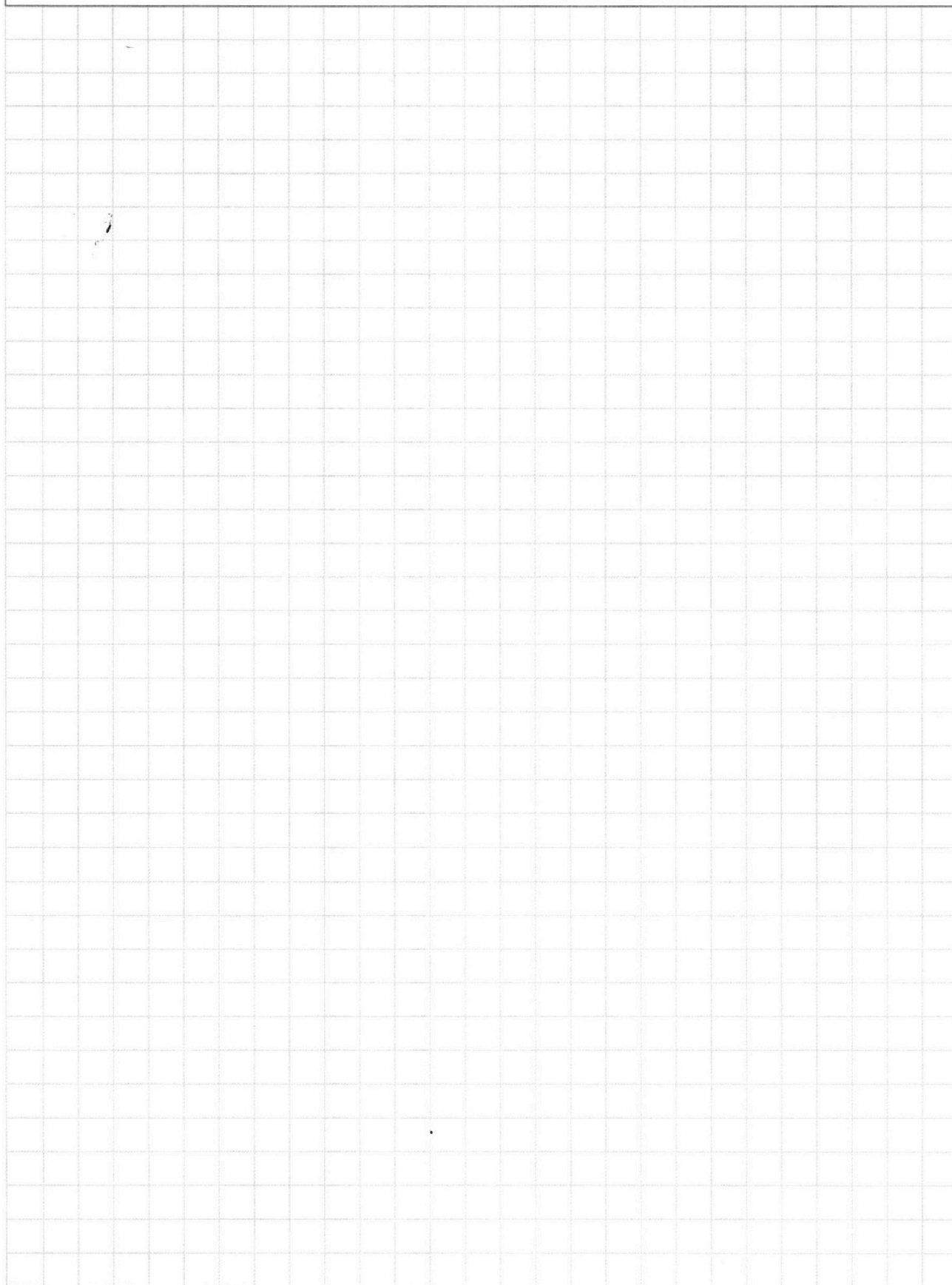
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$; $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$; $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ $a = 2^{10} \cdot 7^{16}$ $b = 2^5 \cdot 7^7$ $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$
 $(abc)^2: 2^{55} \cdot 7^{68}$ $abc: 2^{27.5} \cdot 7^{34}$
 $abc: 2^{26} \cdot 7^{34}$ $(abc)^2: 2^{56} \cdot 7^{68}$ $ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc: 7^{39}$
 $a = 2^{10} \cdot 7^{16}$; $b = 2^5 \cdot 7^7$; $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a^2-7ab+b^2 \\ \hline a^2-7ab+b^2 \mid a+b \\ a^2+ab \quad a-8b \\ \hline -8ab+b^2 \\ -8ab-8b^2 \\ \hline 9b^2 \end{array}$$

$$m = \text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2) = \text{НОД}(a+b; -9ab)$$

$$a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab$$

$$\text{НОД}(a+b; 9b^2)$$

$$\begin{array}{r} 9b^2 \mid a+b \\ -9ab \quad 9b \\ \hline a-8b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9ab \mid a+b \\ -9ab-9b^2 \\ \hline 9b^2 \end{array}$$

$$b^2 \cdot 9 = 3 \cdot 2 \cdot 3$$

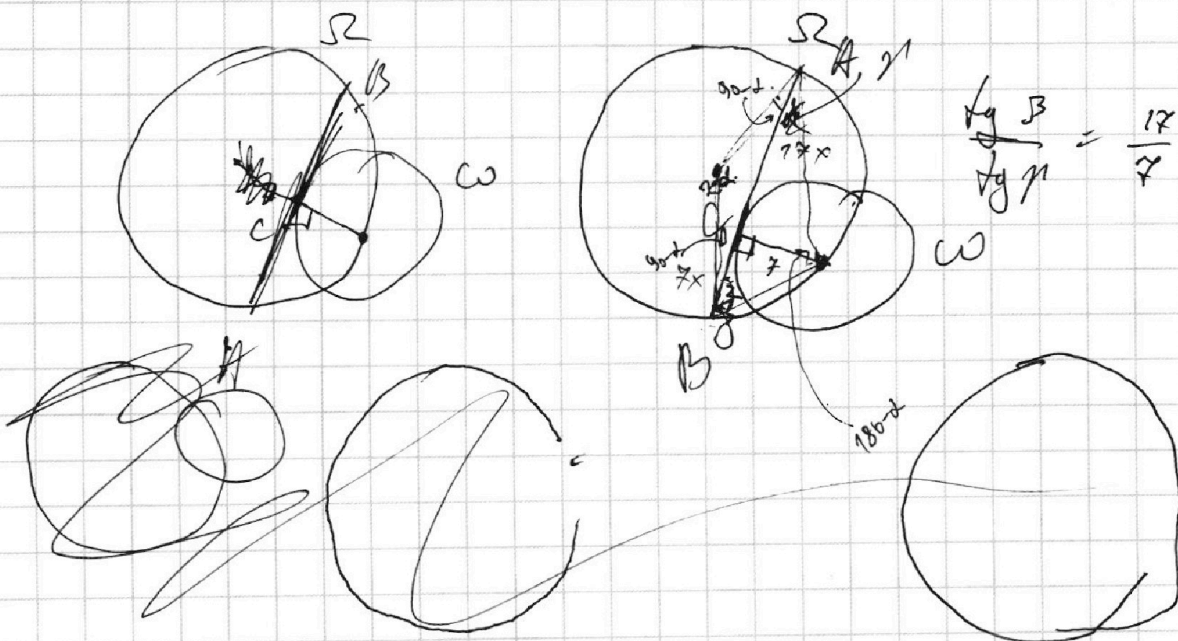
$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b, b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b, b^2) = 1$$

$$\text{Значит, } \text{НОД}(a+b, 9b^2) = 9$$

$$\text{more } m = 9$$

$$a = 7; b = 2$$

$$\frac{9}{49-98+9} = \frac{9}{-45}$$



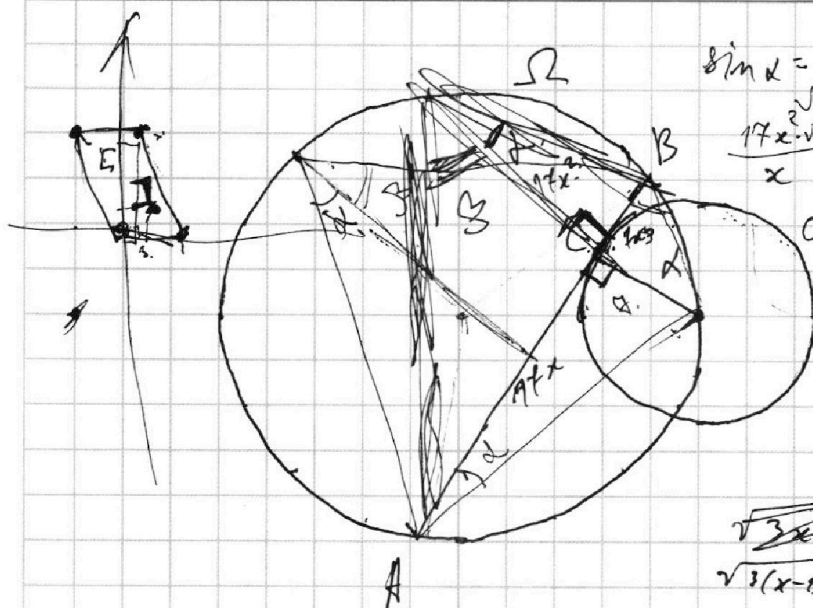
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad 17,5^2 = 289 + 17 + 0,25 = 306,25$$

$$\frac{17x^2 + \sqrt{x^2+1}}{x} = (50-5)^2 = 2500 + 25 + 500 = 2525$$

$$\begin{array}{r} 17x \cdot \sqrt{x^2+1} = 26 \cdot 17,5 \\ x \quad 45 \\ \hline 87,5 \\ + 40,0 \\ \hline 127,5 \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3(x-1)^2-1} = 1-2x$$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2 > 0 \\ 3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3x+1 > 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = a-b$$

$$\sqrt{a}-a = \sqrt{b}-b$$

$$a+b-2\sqrt{ab} = a-b$$

$$b = \sqrt{ab}$$

$$\begin{cases} b > 0 \\ b^2 = ab \end{cases} \quad \begin{cases} a=b \\ b > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \\ a+b+2\sqrt{ab} = 1,65 \end{array}$$

$$a^2 + \sqrt{ab} + b^2 - \sqrt{ab} = 2ab + a + b$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 78 \\ \hline 360 \\ + 3150 \\ \hline 3510 \end{array}$$

$$49b = 6x^2 - 3x + 3$$

$$(1-2x) = (1-2x) (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$\begin{array}{r} 177 \\ \times 172 \\ \hline 12396 \\ + 30048 \\ \hline 30216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 177 \\ \times 172 \\ \hline 12396 \\ + 30048 \\ \hline 30216 \end{array}$$

$$3x^2-6x+2 = 1 + 3x^2+3x+1 - 2\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$312 = 4 \cdot 78$$

$$4 \cdot 9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$\frac{2}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 312$$

$$102 \cdot 69 = 7038 \quad 102 \cdot 71x^2 = 12x^2 - 12x + 4$$

$$-7038 \quad 8082$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$6 \cdot 45 = 450$$