



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть максимальная степень делимости 2
в a — это x (т.е. $a:2^x, a \not\vdots 2^{x+1}$), b — это y ,
(т.е. $b:2^y, b \not\vdots 2^{y+1}$), c — это z (т.е. $c:2^z, c \not\vdots 2^{z+1}$).

Тогда $ab:2^x \cdot 2^y, ab \not\vdots 2^{x+y+1}$, т.е. $ab:2^{x+y}, ab \not\vdots 2^{x+y+1}$
 ~~$ab:2^{15}$, т.е. $x+y \geq 15$~~

Тогда $bc:2^y \cdot 2^z, bc \not\vdots 2^{y+z+1}$, т.е. $bc:2^{y+z}, bc \not\vdots 2^{y+z+1}$
 ~~$bc:2^{17}$, т.е. $y+z \geq 17$~~

Тогда $ac:2^x \cdot 2^z, ac \not\vdots 2^{x+z+1}$, т.е. $ac:2^{x+z}, ac \not\vdots 2^{x+z+1}$
 ~~$ac:2^{23}$, т.е. $x+z \geq 23$~~

$$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 15+17+23 \Rightarrow x+y+z \geq \frac{55}{2}$$

$$\text{т.е. } x+y+z \geq 27\frac{1}{2}$$

т.к. x, y, z — макс. степени делимости 2 в a, b, c
соответственно, $x, y, z \in \mathbb{Z}, x, y, z \geq 0$

т.е. $x+y+z \in \mathbb{Z}$

$$\text{т.е. } x+y+z \geq 28$$

$$abc:2^x \cdot 2^y \cdot 2^z, \text{ т.е. } abc:2^{x+y+z}, \text{ т.е. } abc:2^{28}$$

$$ac:7^{39}, \text{ т.е. } abc:7^{39}$$

$$\text{т.к. НОД}(7, 2) = 1, abc:2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ т.е. } abc > 0, \text{ т.е. } abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Предельно наименьшее возможное abc
это $2^{28} \cdot 7^{39}$

$$\text{Пример: } a=7^{16} \cdot 2^{11}, b=2^{14}, c=7^{23} \cdot 2^{13}$$

$$\text{Тогда } ab=7^{16} \cdot 2^{15}:2^{15} \cdot 7^{11}, bc=7^{23} \cdot 2^{17}:2^{17} \cdot 7^{16},$$

$$ac=7^{39} \cdot 2^{24}:7^{39} \cdot 2^{23}$$

$$abc=7^{16} \cdot 2^{11} \cdot 2^{14} \cdot 7^{23} \cdot 2^{13}=7^{39} \cdot 2^{28}$$

$$\text{Ответ: } 7^{39} \cdot 2^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Пусть мы можем сократить эту дробь ^{на простое} m ,
т.е. $a+b : m$, $(a+b)^2-9ab : m$

т.к. $a+b : m$, $(a+b)^2 : m$
т.к. $(a+b)^2-9ab : m$ ~~то~~ $9ab : m$

Отсюда получаются 2 случая:

1) $ab : m$, но т.к. a/b несократима $\text{НОД}(a,b)=1$,
и если $ab : m$, то или $a : m$, или $b : m$, но
~~если~~ т.к. $a+b : m$, если $a : m$, то и $b : m$, а если
 $b : m$, то и $a : m$, ~~то~~ т.к. $\text{НОД}(a,b)=1$ $m=1$
2) $9 : m$, и $m=3$

Получается мы не можем сократить нашу
дробь ни на какое простое число, кроме 3

Пусть мы сократим на 3^x , где $x \geq 3$, тогда
мы сможем сократить на $3^3 = 27$

Пусть $a+b : 27$, ~~то~~ и $a+b : 3$, т.к. $\text{НОД}(a,b)=1$
 $a \equiv_3 -b$, ~~тогда~~ $a \equiv_3 1$, $b \equiv_3 -1$, или
 $a \equiv_3 -1$, $b \equiv_3 1$, в обоих случаях $ab \equiv_3 -1$, и $ab \not\equiv_3 0$
и $9ab \not\equiv_3 0$, и $9ab \not\equiv_3 27$, но $(a+b)^2-9ab : 27$, т.к.
мы сможем сократить на 27, и $(a+b)^2 : 27$,
т.к. $a+b : 27$, и $9ab : 27$. Противоречие.

Следовательно мы можем сократить ~~на 3~~,
~~тогда~~ не больше, чем на 3^x , где $x \leq 2$

Следовательно наибольшее $m = 3^2 = 9$

Пример: $a=1$, $b=2$

Тогда $a/b = 1/2$ - несократимая дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{1-7 \cdot 2 + 2 \cdot 2} = \frac{9}{9} = 1 \quad \text{т.е. данная дробь}$$

мы сможем сократить
на 9

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (1 - 9x)$$

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0$$

1) $1 - 9x = 0$, т.е. $x = \frac{1}{9}$ ~~$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} = \sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} = \sqrt{\frac{1 - 12 + 54}{27}} = \sqrt{\frac{43}{27}}$~~

2) $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$

тогда $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 9x$

т.е. $9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 4(9 + 69) = 4 \cdot 78 = 8 \cdot 39 = 8 \cdot 3 \cdot 13$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13}}{69} = \frac{2}{23} \pm \frac{2}{23} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$x = \frac{2}{23} \left(1 - \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)$$

Перед проверкой найдем область определения.

$$3x^2 + 3x + 1 = 3\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x - 1)^2 - 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0, \text{ т.к. мы берём корни, т.е. } 3(x - 1)^2 \geq 1$$

т.е. $(x - 1)^2 \geq \frac{1}{3}$, т.е. $\begin{cases} x - 1 \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x - 1 \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \\ x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

1) $\frac{1}{9} < \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$, т.к. $\sqrt{3} < 9\sqrt{3} - 9$, т.к. $9 < 8\sqrt{3}$, т.к. $81 < 864 - 3$

2) $\frac{2}{23} \left(1 - \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{23} \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) < 0 < \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$ $\oplus$ попадает в обл. опре.

3) $\frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{23} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{26}}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$, т.к. $2\sqrt{3} + 2\sqrt{26} < 23\sqrt{3} + 23$, т.к. $2\sqrt{26} < 21\sqrt{3} + 23$, т.к. $2\sqrt{26} < 12 < 23 + 15\sqrt{3}$

③

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$2(\sqrt{3} + \sqrt{26}) \sqrt{23(\sqrt{3} - 1)}$$

$$2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3} - 23}$$

$$4 \cdot 26 \sqrt{21^2 \cdot 3 + 23^2 - 2 \cdot 23 \cdot 21\sqrt{3}}$$

$$2 \cdot 23 \cdot 21\sqrt{3} \sqrt{21^2 \cdot 3 + 23^2 - 4 \cdot 26} = 1323 + 529 - 80 - 24 =$$

$$= 1243 + 505 = 1748$$

$$996\sqrt{3} \sqrt{1748}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{\frac{1748}{996}} = \frac{437}{249}$$

$$249\sqrt{3} \sqrt{437}$$

$$249^2 \cdot 3 \sqrt{437^2}$$

$$186003 \sqrt{190969}$$

$$186003 < 190969$$

$$\text{or } \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \textcircled{1}$$

or the main answer remain in square root
general

$$\text{Answer: } \left\{ \frac{1}{9}; \frac{2}{23} \left(1 - \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right); \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 46 \\ + 92 \\ \hline 966 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline 42 \\ + 27 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 441 \\ 441 \\ \hline 1323 \\ + 69 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 46 \\ + 69 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 249 \\ 4 \\ \hline 996 \\ 48 \\ \hline 1748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 437 \\ 4 \\ \hline 1748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 437 \\ 437 \\ \hline 3059 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 62001 \\ 3 \\ \hline 186003 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 249 \\ 249 \\ \hline 2241 \\ + 996 \\ \hline 498 \\ \hline 62001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 1311 \\ 1748 \\ \hline 190969 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

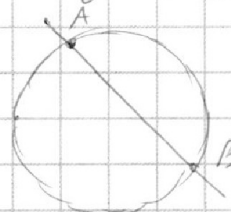
$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

~~$x^2 + y^2 \leq 1$ и $x^2 + (y - 12)^2 \geq 16$~~
 $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + (y - 12)^2 = 16$ -
 две непересекающиеся
 окружности

Предположения:

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

Если прямая $y = -ax + 8b$ пересекает одну из окружностей в 2-х точках, тогда у нашей системы бесконечное кол-во решений, т.к. любая точка отрезка соединяющего эти две точки пересечения (хорда одной из окружностей) является решением системы. (Все точки отрезка AB являются решением системы)



Предположения: прямая $y = -ax + 8b$ - касательная к одной окружности

(если она будет касаться одной, и не пересекать другую, тогда будет 1 решение, если не пересекать обе, то 0, если пересекать хотя бы одну в 2-х точках, тогда бесконечное кол-во решений).

$$\text{и } \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

имеем единственные решения при заданных a и b (у I системы 1 решение, у II 1 решение)

$$\text{I } \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (ax - 8b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

м. $(a^2+1)x^2 - 16abx + (64b^2-1) = 0$ имеет единств. реш.

м. $D_{\text{кр}} = 0$, м. $\frac{D}{4} = 0$

$$\frac{D}{4} = 64a^2b^2 - (64b^2-1)(a^2+1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

II $\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 + 24(ax - 8b) + 144 = 16 \end{cases}$$

м. $(a^2+1)x^2 - x(16ab-24a) + (64b^2-8\cdot 24b+144-16) = 0$

$$16ab - 24a = 8a(2b-3)$$

имеет единств. реш.
м. $D=0$, м. $\frac{D}{4}=0$

$$64b^2 - 8\cdot 24b + 144 - 16 = 64b^2 - 8\cdot 24b + 128 = 64b^2 - 3\cdot 64b + 64\cdot 2 = 64(b^2 - 3b + 2)$$

~~$$\frac{D}{4} = 16a^2(2b-3)^2 - 64(b^2-3b+2)(a^2+1) = 16a^2(4b^2-12b+9) - 64(b^2-3b+2)a^2 - 64(b^2-3b+2) = 64a^2b^2 - 16\cdot 12ba^2 + 16\cdot 9a^2 - 64a^2b^2 + 16\cdot 12ba^2 - 64\cdot 2a^2 - 64(b^2-3b+2) = 16(9a^2-8a^2) - 64(b^2-3b+2) = 0$$~~

$$\frac{D}{4} = 16a^2(2b-3)^2 - 64(b^2-3b+2)(a^2+1) = 16a^2(4b^2-12b+9) - 64(b^2-3b+2)a^2 - 64(b^2-3b+2) =$$

$$= 64a^2b^2 - 16\cdot 12ba^2 + 16\cdot 9a^2 - 64a^2b^2 + 16\cdot 12ba^2 - 64\cdot 2a^2 - 64(b^2-3b+2) = 16(9a^2-8a^2) - 64(b^2-3b+2) = 0$$

$$- 64(b^2-3b+2) = 16(9a^2-8a^2) - 64(b^2-3b+2) = 0$$

м. $a^2 - 4(b^2 - 3b + 2) = 0$, м. $a^2 = 4(b^2 - 3b + 2)$

м. $\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ a^2 = 4(b^2 - 3b + 2) \end{cases} \quad \begin{cases} 64b^2 - 1 = 4b^2 - 12b + 8 \\ 60b^2 + 12b - 9 = 0 \end{cases}$

$$\frac{D}{4} = 36 + 9\cdot 60 = 6\cdot (6+90) = 6\cdot 96 = 6\cdot 6\cdot 16 = (6\cdot 4)^2 = 24^2$$

м. $b = \frac{-6 \pm 24}{60} \quad b = \frac{-1 \pm 4}{10}, \quad \text{м.} \quad \begin{cases} b = -0,5 \\ b = 0,3 \end{cases}$

$a^2 = \sqrt{64b^2 - 1}$, м. $\begin{cases} a = \sqrt{\frac{64}{4} - 1} \\ a = \sqrt{\frac{64\cdot 9}{100} - 1} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = \sqrt{16\cdot 9 - 25} : 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = \sqrt{144 - 25} : 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = \frac{\sqrt{119}}{5} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5} \right\}$

6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

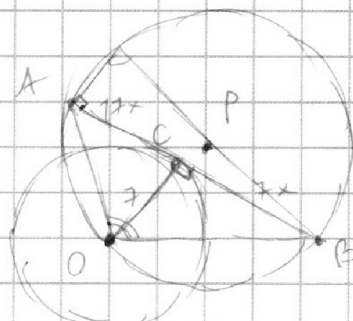


Черновик

$$b^2 : m \quad a+b : m$$

$$(a+b)^2 : m^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 : m^2$$



$$9ab : m, \text{ ~~am, bm~~$$

$$1 \text{ var) } ab : m, m \ll \text{НОД}(a, b) = 1 \quad \begin{cases} a : m \\ b : m \end{cases} \text{ ~~am, bm~~$$

$$\text{~~am, bm~~ } \begin{cases} a : m \\ b : m \end{cases} \quad \text{X}$$

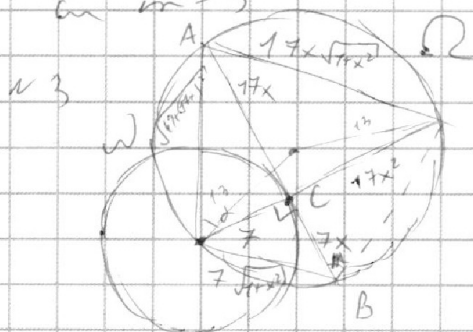
$$2 \text{ var) } ab : k \quad m = 3k \quad 3 \text{ var) } ab : k \quad m = 9k$$

$$a+b : 3k, \text{ ~~am, bm~~ } \begin{cases} a : k \\ b : k \end{cases}$$

$$a+b : 9k, \text{ ~~am, bm~~ } \begin{cases} a : k \\ b : k \end{cases}$$

$$\text{~~am, bm~~ } \begin{cases} a : k \\ b : k \end{cases}$$

$$\text{~~am, bm~~ } \begin{cases} a : k \\ b : k \end{cases}$$



$$\sim 4 \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 19x$$

$$(1) 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$(2) 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$(1) D = 36 - 6 \cdot 4 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(2) D = 9 - 12 < 0$$

$$(1-9x) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right) = 1-9x$$

$$1-9x=0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \\ x \leq 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

m

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{16} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_a + x_b + x_c &\geq \frac{15+17+39}{2} = 27\frac{1}{2} \\ x_a + x_b + x_c &\geq 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_a + y_b + y_c &\geq \frac{11+16+39}{2} = 32\frac{1}{2} \\ y_a + y_b + y_c &\geq 34 \end{aligned}$$

$$abc : 2^{x_a+x_b+x_c}$$

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac : 2^{23+17+15} \cdot 7^{39+11+16}$$

$$abc \geq \sqrt{2^{55} \cdot 7^{66}} = 2^{27} \cdot 7^{33}$$

$$\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{15} \cdot 7^{11} \\ c &= 2^{23} \cdot 7^{39} \\ b &= \end{aligned}$$

$$r2 \quad \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a^2+2ab+b^2)-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$= \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \quad \begin{aligned} a+b &: m \\ 9ab &: m \end{aligned} \quad \begin{aligned} \max(a,b) &= 1 \\ a &= m - b \end{aligned}$$

$$9ab \equiv_m -9b^2 \equiv 0$$

$$\begin{aligned} a &: m \\ 9 &: m \end{aligned} \quad \max(m) = 9$$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{16} \\ ac &= 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2^8 \cdot 7^7}$$

$$c = 2^8 \cdot 7^7 \cdot a$$

$$ac = a^2 \cdot 2^8 \cdot 7^7 = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 = 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{16} \sqrt{2}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{16}$$

$$c = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$b = 2^{17} \cdot 7^{16}$$

$$abc = 2^{55} \cdot 7^{66}$$

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} & a &: 2^{15} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{16} & b &: 2^{17} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} & c &: 2^{23} \end{aligned}$$

$$x+y \geq 15$$

$$y+z \geq 17$$

$$x+z \geq 23$$

$$\begin{aligned} (x+y+z) &\geq \frac{40+15}{2} \\ &= 27\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x+y+z \geq 28$$

$$\frac{1+9}{(1+9)^2-9 \cdot 1 \cdot 9} = \frac{9}{9} = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

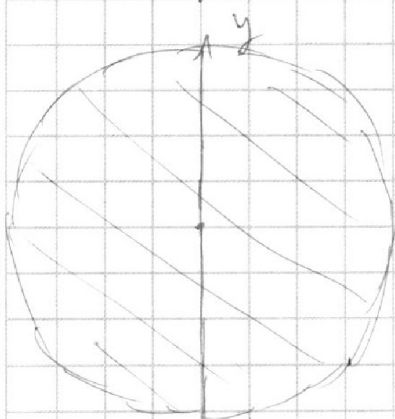
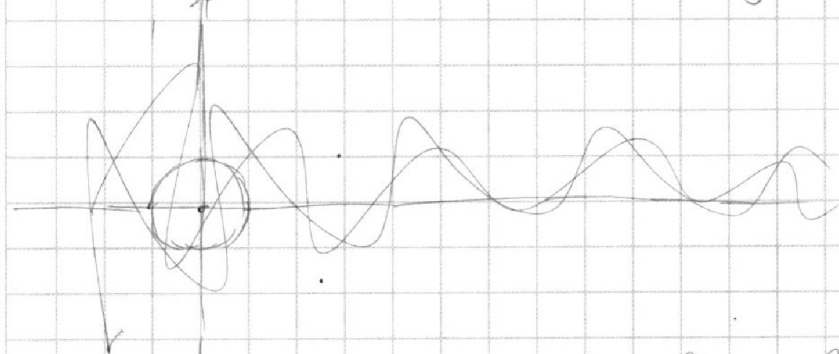
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases}$$



$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = -ax + 8b$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (ax - 8b)^2 = 1$$

$$x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + (64b^2 - 1) = 0$$

$$D = 16^2a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 0$$

$$4(16a^2b^2 - 64a^2b^2 - 64b^2 + a^2 + 1) = 0$$

$$64b^2 - a^2 - 1 = 0$$

$$b^2 = (a^2 + 1) : 64$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 12)^2 &= 16 \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 &= 16 \\ x^2 + a^2x^2 - 24y + 144 &= 16 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$x^2 + (ax - 8b)^2 + 24(ax - 8b) + 144 = 16$$

$$x^2 + a^2 x^2 - 16abx + 64b^2 + 24ax - 24 \cdot 8b + 144 = 16$$

$$(a^2 + 1)x^2 - x(16ab - 24a) + 64b^2 - 24 \cdot 8b + 144 - 16 = 0$$

$$8a(2b - 3)$$

$$64b^2 - 3 \cdot 64b + 128 = 0$$

$$128 = 8 \cdot 16 = 8^2 \cdot 2 = 64 \cdot 2$$

$$64(b^2 - 3b + 2)$$

$$16a^2(2b - 3)^2 - (a^2 + 1)64(b^2 - 3b + 2) = 0$$

$$a^2(2b - 3)^2 - a^2 4(b^2 - 3b + 2) - 4(b^2 - 3b + 2) = 0$$

$$a^2(4b^2 - 12b + 9) - 4a^2(b^2 - 3b + 2) - 4(b^2 - 3b + 2) = 0$$

$$9a^2 - 8a^2 = 4(b^2 - 3b + 2)$$

$$a^2 = 4(b^2 - 3b + 2)$$

$$64b^2 - 1$$

$$64b^2 - 1 = 4b^2 - 12b + 8$$

$$60b^2 + 12b - 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 9 \cdot 60 = 36 + 540 = 576$$

$$b = \frac{-6 \pm \sqrt{576}}{60} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{576}{36}}}{10} = \frac{-1 \pm 4}{10}$$

$$b = 0,3; \quad b = -0,5$$

$$a^2 = 64b^2 - 1 = \frac{64}{4} - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$a^2 = 64b^2 - 1 = \frac{16 \cdot 9}{25} - 1 = \frac{16 \cdot 9 - 25}{25} = \frac{119}{25}$$

112/132
10/10
0

576/36
36 16
216
216
0

16/9
5
16
0
144
144
-25
119

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3(x^2 - 2x + 1) - 1} + \sqrt{3(\sqrt{3}x)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} + \sqrt{3\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} + \sqrt{3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$y = x - 1$$

$$\sqrt{3y^2 - 1} + \sqrt{3\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3y^2 - 1} + \sqrt{3y^2 + 9y + 3\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3y^2 - 1} + \sqrt{3y^2 + 9y + 7} = 1$$

$$\sqrt{z} + \sqrt{z + 9y + 8} = 1$$

$$\frac{7}{17x} = \frac{7x}{y}$$

$$y = \frac{7x \cdot 17x}{7} = 17x^2$$

$$7^2 + (7x)^2 = 7^2(1+x^2)$$

$$(17x)^2 + (17x^2)^2 = 17^2(x^2 + x^4) = 17^2x^2(1+x^2)$$

$$(7x)^2 + (17x^2)^2 = x^2 \cdot 49 + 17^2x^4 = x \sqrt{49 + 17^2x^2}$$

$$\sin \angle = \frac{17x}{\sqrt{49 + 17^2x^2}}$$

$$\frac{17x \sqrt{1+x^2}}{\sin \angle} = 2R = 26$$

$$17x \sqrt{1+x^2} = \frac{26 \cdot 17x}{\sqrt{49 + 17^2x^2}}$$

$$17x (\sqrt{1+x^2} \sqrt{49 + 17^2x^2}) = 26 \cdot 17x$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline + 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline + 119 \\ 17 \\ \hline 289 \\ 17 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{cases} 1+x^2=0 \\ \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{49+17^2x^2} = 26 \\ x=0 \end{cases}$$

$$(1+x^2)(49+(17^2x^2)) = 26^2$$

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{26} \sqrt{23\sqrt{3}+23} + 17^2x^4 + (49+17^2)x^2 + 49-26^2=0$$

$$\frac{2}{23} \frac{\sqrt{3} + \sqrt{26}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3}-23}}{42\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3}-23}}$$

$$\frac{23+2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3}}}{42}$$



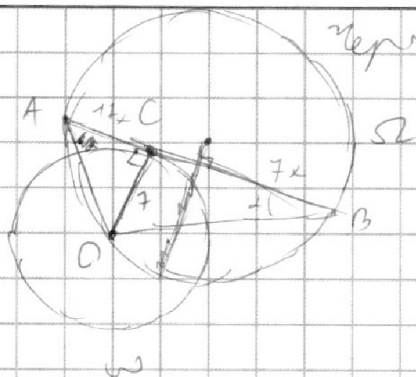
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$7^2 = 49$$

$$17^2 = 289$$

$$7^2 + 17^2 = 338$$

$$\frac{169}{2} = \frac{13^2}{2}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 33 \\ 19 \\ \hline 297 \\ 33 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$69x^2 = 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 36 + 276 =$$

$$= 312 = 2156 =$$

$$= 4 \cdot 78 =$$

$$= 8 \cdot 39 =$$

$$= 8 \cdot 3 \cdot 13$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{1+3(4x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R = 26$$

$$AC = 26 \sin \alpha = \frac{26}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$AC = \sqrt{(17x)^2 + 7^2}$$

$$\sqrt{((17x)^2 + 7^2)(1+x^2)} = 26$$

$$17^2 x^4 + (7^2 + 17^2)x^2 + 7^2 - 26^2 = 0$$

$$17^2 y^2 + (7^2 + 17^2)y - 19 \cdot 33 = 0$$

$$289y^2 + 338y - 627 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 13^4 + 17^2 \cdot (13^2 \cdot 2^2 - 7^2) =$$

$$= 13^4 + 2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 + 17^4 - 7^4 - 7^2 =$$

$$= (13^2 + 17^2)^2 - 17^4 - 7^2$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 69 \\ 4 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$69 = 3 \cdot 23$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 69 \\ 4 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 13}}{69} = \frac{2}{23} \pm \frac{2\sqrt{69}}{3 \cdot 23} = \frac{2}{23} \pm \frac{2}{23} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} =$$

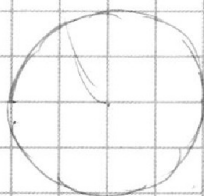
$$= \frac{2}{23} \left(\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!


МФТИ.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x = 12 \cdot 7x$$

$$(13+y)(13-y) = (18x)$$

$$16g - g^2 = 144x^2$$

$$y = \sqrt{169 - 144x^2}$$

$$(17x^2 + 7^2)(x^2 + 1) = 16 \cdot 13^4$$

$$17^2 \times 4 + (17^2 + 7^2) \times 2 + (7^2 - 16 \cdot 13^4) = 0$$

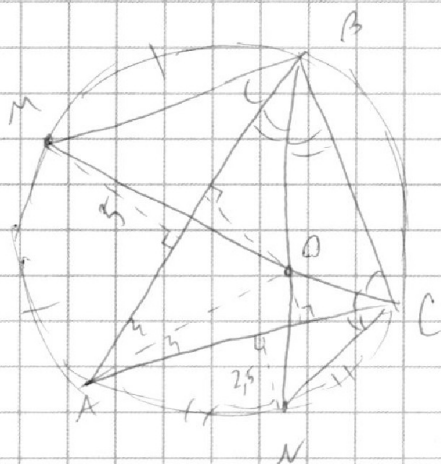
$$269 \times 4 + 2 \cdot 169 \times 2 -$$

2/10/9

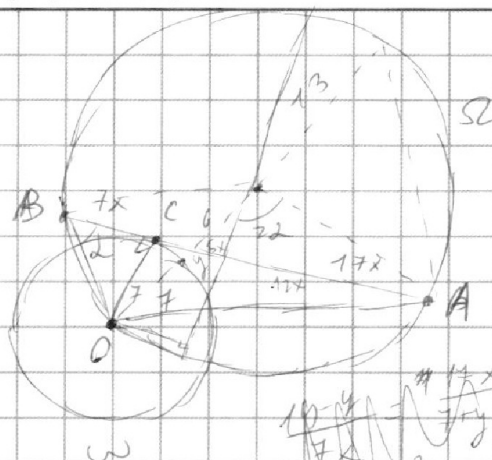
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 2}{x_2 - x_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - z \right) (x - x_1) + y_1$$



$$\frac{1}{5} =$$



$$\begin{aligned} \text{max } AC &= 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos 2\alpha = \\ &= 2 \cdot 13^2 (1 - \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

$$4 \cdot 13^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ + 49 \\ \hline 338 = 2.169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 169 \\ \hline 1014 \\ 1340 \\ 1340 \\ \hline 11369 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 296976 \\ - 69 \\ \hline 296907 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\frac{2}{23} \frac{\sqrt{3+\sqrt{26}}}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{26} < 23\sqrt{3} - 23$$

$$2\sqrt{26} < 21\sqrt{3} - 23$$

$$2\sqrt{26} < 21 \cdot 3 - 23$$

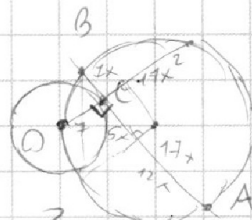
$$2 \cdot 21 \cdot 23 \cdot \sqrt{3} > 23^2 + 21 \cdot 3 + 4 \cdot 26$$

$$\begin{aligned} 529 + 63 + 104 &= \\ = 529 + 63 + 104 &= \\ = 529 + 167 &= \\ = 696 \end{aligned}$$

$$24x \cdot (7 + 7x^2) =$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ + 69 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 42 \\ + 126 \\ + 84 \\ \hline 966 \end{array}$$



$(0;0)$

$(16;0)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\begin{array}{l} \times 2 \\ \times 2 \\ \times 2 \\ \times 2 \\ \times 2 \\ \times 2 \\ \times 2 \\ \times 2 \\ \times 2 \\ \times 2 \end{array}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y_2 - y_1 = 14 - 2(x_2 - x_1)$$

$$2(16 + 13) + (0 - 26) =$$

$$= 2 \cdot 29 - 26 = 29 + 3 = 32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

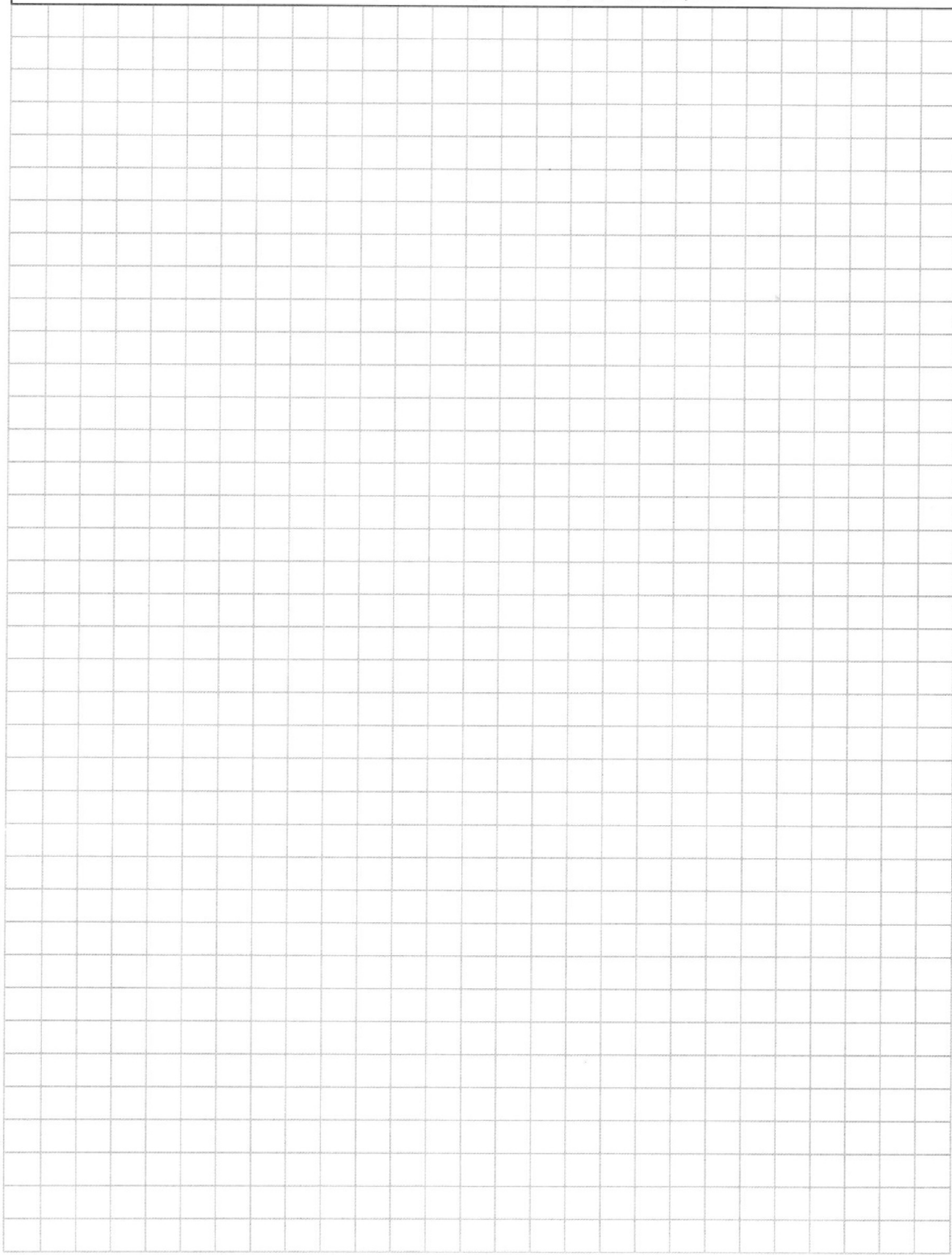
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





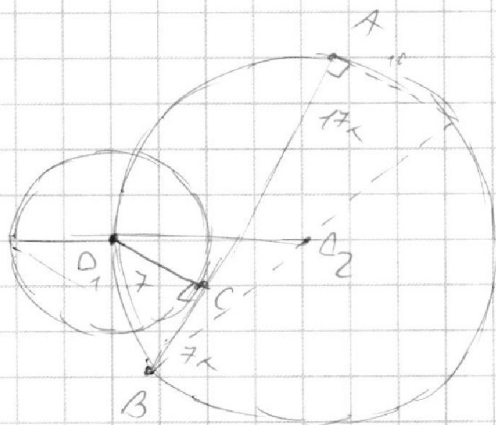
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 24^2 &= 144 \cdot 4 = 576 \\ 26^2 &= 13^2 \cdot 4 = 169 \cdot 4 = \\ &= 400 + 240 + 36 = \\ &= 676 \end{aligned}$$