



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 1

Пусть $a = 2^d \cdot 7^e \cdot x$ $x, d, e \in \mathbb{N}_{\text{нечет}} \setminus \{x:2\}$
 $b = 2^f \cdot 7^g \cdot y$ $y, f, g \in \mathbb{N}_{\text{нечет}} \setminus \{y:2\}$
 $c = 2^h \cdot 7^j \cdot z$ $z, h, j \in \mathbb{N}_{\text{нечет}} \setminus \{z:2\}$

Пусть также введем следующие сокращения 242 и a, b, c .

Получается, что:

$$\begin{cases} ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ ab: 2^{d+f} \cdot 7^{e+g} \\ ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \\ ac: 2^{d+h} \cdot 7^{e+j} \\ bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ bc: 2^{f+h} \cdot 7^{g+j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{d+f} \cdot 7^{e+g} \geq 2^{15} \cdot 7^{11} \\ 2^{d+h} \cdot 7^{e+j} \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \\ 2^{f+h} \cdot 7^{g+j} \geq 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

Т.к. $d, e, \dots$ - нечетные степени в разложении

$$\begin{cases} d+f \geq 15 & \text{I)} \\ e+g \geq 11 & \text{II)} \\ d+h \geq 23 & \text{III)} \\ e+j \geq 39 & \text{IV)} \\ f+h \geq 17 & \text{V)} \\ g+j \geq 18 & \text{VI)} \end{cases}$$

А т.к. I, то $2d \leq 21$ $d \leq 10$, т.к. $d \in \mathbb{N}$
 А т.к. I, то $2f \leq 25$ $f \leq 12$
 А т.к. III, то $2h \leq 23$ $h \leq 12$

$I + III = 2(d+f+h) \geq 55$ $d+f+h \geq \frac{55}{2}$ $d+f+h \geq 28$

Т.к. $d, f, h \in \mathbb{N}$, Т.к. надо найти минимальное значение abc , а
 $abc = 2^{d+f+h} \cdot 7^{e+g+j}$ $\times 42$, то возьмем $d+f+h = 28$, тогда $d=10, f=5, h=13$ все условия выполняются
 $d+f+h = 28$

$II + IV + VI = 2(e+g+j) \geq 65$ $e+g+j \geq 32$ Т.к. надо найти минимальное значение abc , то возьмем $e+g+j = 32$, тогда $e=11, g=11, j=10$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1



2



3



4



5



6



7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значение $e+g+j$. Пусть $e+g+j = 34$, тогда по т.к. $e+g \geq 39$, то

$e+g+j \geq 39$ тоже, тогда пусть $e+g+j = 39$ и при $e=19, g=20, j=0$

$j=0, e=19, j=20$ выписаны все возможные значения $e+g+j=39$.

Т.к. надо найти минимальное значение abc , то возьмем $x=y=z=1$,

тогда $abc = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$

Ответ: $28 \cdot 7 = 196$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ несократима $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$ если $a \neq 0$, то $b \nmid a$ и наоборот для $a \in \mathbb{N}$.
 $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab}$, тогда если $(a+b):m$, то $(a-b)^2:m \Rightarrow$ это бы было
невозможно, если бы сократилось на m
 $(a+b)^2-3ab \stackrel{m}{\equiv} 0$ и т.к. $(a+b)^2:m$, то $-3ab \stackrel{m}{\equiv} 0 \Rightarrow 3ab:m$. Если $a:m$,
то из $(a+b):m$, следует $b:m$, но $b \nmid a$, т.к. $\frac{a}{b}$ несократима,
а значит $a \nmid m$ и a делится на b , т.к. $3ab:m$, т.к. b
и a взаимно просты, что $m=3 \cdot k, k \in \mathbb{N}$ и тогда a и b k , то т.к.
 $(a+b):m$, то $(a+b):k$ и следовательно $a \stackrel{m}{=} b \stackrel{m}{=} 0$, но такое было недо-
пустно $\Rightarrow 3:m \Rightarrow$ наименьшее $m=3$, тогда будет $k=1$, например $a=4$
 $b=5$

Ответ: 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1

2
□3
4
□

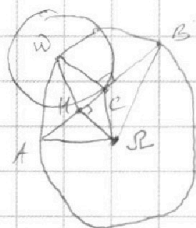
5
□

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Laws

$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$D_1 = 7$$

$$R_0 = 13$$

AB-

✓ 3

Тоже R , алгебра дифференциалов R , в
которой не имеет значения w , т.к. тогда
 $Rw \geq R$, т.е. $Rw \geq 13$, а $iw \leq R$,
т.е. $Rw \leq 7$, но 7 не больше 13 $\Rightarrow$ против
орд не может быть w .

Түрағат $2H$ - орманда қулаар KAB .
 $\triangle AOB$ - POB , $т.к. OA = OB = R_{ор} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ΔH - высота, ширина и глубина в $\Delta A \Delta B \Rightarrow \Delta H = H \cdot B = \frac{AB}{2}$

$WC \perp AB$, т.к. C - точка касания. Следовательно, что $WC \parallel BK$, т.к. для касательной CK касаясь, всегда угол $\angle BKC = \angle WCK = 90^\circ$. А значит $WC \parallel BK$ - параллельны или коллинеарны, а значит $WC = KB$. Тогда $AB = 24x$, $x \in \mathbb{R}$, тогда $AK = KB = 12x$, $AC = 14x$, $BC = 2x$, $WC = KB = 12x$. Тогда $WC = 12x = \frac{1}{2} AB$. По т. Пифагора для $\triangle KBC$ $KB^2 =$
 $= \sqrt{BC^2 + KC^2} = \sqrt{4x^2 + 144x^2} = \sqrt{148x^2} = 2\sqrt{37}x = 12x$.

$$\begin{cases} 169 - 164x - 100x^2 - 140x + 49 \\ 10x - 7 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 100x^2 + 4x - 120 = 0 \\ 10x - 7 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 25x^2 + x - 20 = 0 \\ x \geq \frac{7}{10} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Bilumen } 25x^2 + x + 30 &= 0 \quad \Delta = 1 + 25 \cdot 4 \cdot 30 = 3001 \quad v = \frac{-1 \pm \sqrt{3001}}{50} \\ x = \frac{\pm \sqrt{3001} - 1}{50} \quad \int x = \sqrt{\frac{3001 - 1}{50}} \quad \sqrt{\frac{3001 - 1}{50}} \quad v \frac{1}{10} \quad \sqrt{3001} \quad v \quad 36 \quad \sqrt{3001} > 50 > 36 \\ x > \frac{7}{10} \quad \int x > \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Получаем малое арифметическое $X = \frac{\sqrt{300} - 1}{20}$, тогда $AB_{24X} = 12 \frac{\sqrt{300} - 12}{25}$

Orken: $A/B = \frac{120301}{25}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

Пусть $a = 3x^2+3x+1$ $a \geq 0$ $3x^2+3x+1 \geq 0$ $\Delta = 9-12=-3 < 0$ и т.д. Крестик x^2 при $x=3$, то $a \geq 10$ и т.д.

Тогда $3x^2-6x+2 = a-b$ $a-b \geq 0$ $3x^2-6x+2 \geq 0$ $\Delta = 9-6=3$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,
и $3x^2-6x+2 \geq 0$ $x \in (-\infty; 1-\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1+\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$.

Для $x \in (-\infty; 1-\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1+\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$ $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = \sqrt{a-b}$

$-\sqrt{a} = -b$ $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - b$ $a-b = a - 2b\sqrt{a} + b^2$ $b^2 - 2b\sqrt{a} + b = 0$

$b^2 + b(1-2\sqrt{a}) = 0$ $b(b+1-2\sqrt{a}) = 0$ $\begin{cases} b=0 \\ b=2\sqrt{a}-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 9x-1 = \sqrt{3x^2+3x+1}-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 81x^2 = 42x^2 + 12x + 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases}$

Решим $69x^2 - 12x - 4 = 0$ $\Delta = 36 + 4 \cdot 69 = 312$ $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$ $x = \frac{1}{9}$ $\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \notin [1-\frac{\sqrt{3}}{3}; 1+\frac{\sqrt{3}}{3}]$ $\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \cup \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3} + 2\sqrt{78} \cup 69\sqrt{3} - 69$ $2\sqrt{3} + 2\sqrt{26} \cup 23\sqrt{3} - 23$

$2\sqrt{26} \cup 21\sqrt{3} - 23$ $\frac{64}{2} > 21 \cdot \frac{3}{2} > 21 \cdot \sqrt{3}$

$2\sqrt{26} \cup 32-23$ $\sqrt{104} > \sqrt{81} > 21-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \Rightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \cup \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{3} + 6\sqrt{26} \cup 69\sqrt{3} + 69$ $2\sqrt{6} \cup 21\sqrt{3} + 23$

$2\sqrt{3} + 23 > \sqrt{104} > \sqrt{104}$

Получается, что $\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \notin [1-\frac{\sqrt{3}}{3}; 1+\frac{\sqrt{3}}{3}] \Rightarrow$ не подходит, так как

в выражении $\sqrt{3x^2-6x+2}$ не может быть отрицательное число.

Ответ: $x = \frac{1}{9}$; $\frac{6-2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

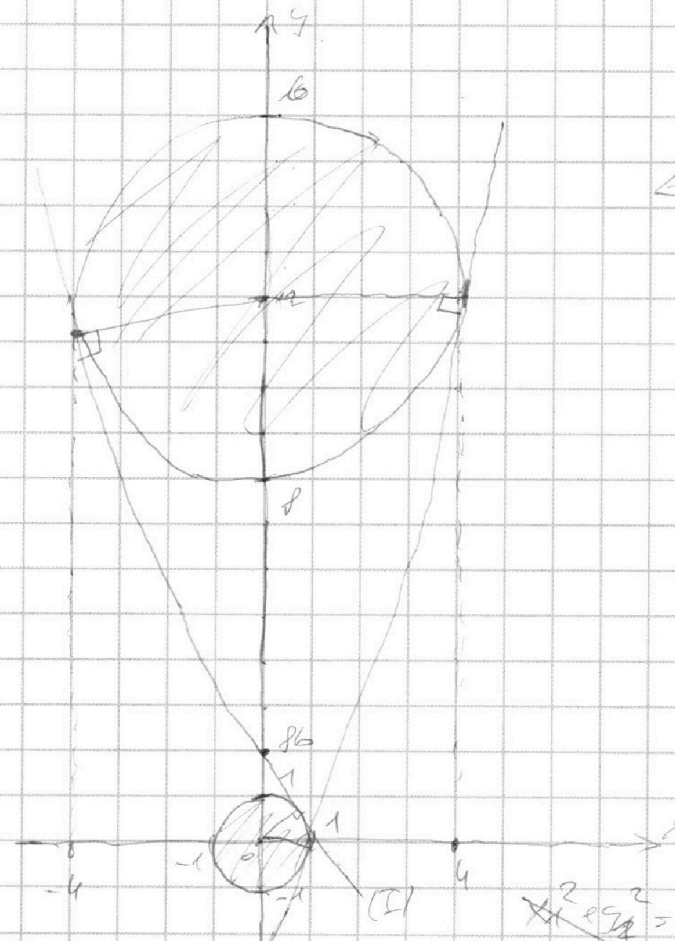
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x + y - 8b = 0 \quad (I)$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \quad (II)$$



Каждая из этих точек, принадлежащая

всех точек,

уравнения (II), т.е. обе окружности с

касаниями имеют вид, что для

системы (I) и (II) было бы 2 ре-
шения, причем 1 решение кас-
аниями окружностей плюс еще
одно, а значит было бы 2 ре-
шения для обеих, а значит для

обеих окружностей при (x₁; y₁)

и (x₂; y₂) будут выполняться

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 8b = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_2 + y_2 - 8b = 0 \\ x_2^2 + (y_2 - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \text{ и } x_2^2 + (y_2 - 12)^2 = 16 \text{ принадлежат, т.е.}$$

I - касательная $\Rightarrow$ имеют общие точки с системой окружностей,
а не с их внутренностями. Рассмотрим сначала окружность (x₁; y₁)

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 = 8b \\ x_1^2 + y_1^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 8b - 2x_1 \\ x_1^2 + (8b - 2x_1)^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 8b - 2x_1 \\ x_1^2 + 64b^2 - 32bx_1 + 4x_1^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 8b - 2x_1 \\ 5x_1^2 - 32bx_1 + 64b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим $5x_1^2 - 32bx_1 + 64b^2 - 1 = 0$ полагая x_1 равным 0, получим, что $64b^2 - 1 = 0$
или $8b = \pm 1$, следовательно, $8b = 1$ или $8b = -1$. Тогда $8b = 1$ или $8b = -1$
 $64b^2 - 1 = 1$ или $64b^2 = 2$ или $8b = \pm \sqrt{2}$ или $8b = \pm \sqrt{2}$ или $8b = \pm \sqrt{2}$

Значит, что I касательная О₁ в точке (0; 8b), и из формулы дискриминанта
(разности квадратов констант d и c) можно получить, что разность в точке, касан-
ной с окружностью принадлежит I. По т. Паскаля ~~получается~~

$$(8b)^2 - 1 + (12 - 8b)^2 - 16 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$646^2 - 1 + 144 - 1926 \times 646^2 - 16 = 1286^2 - 1926 + 127 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

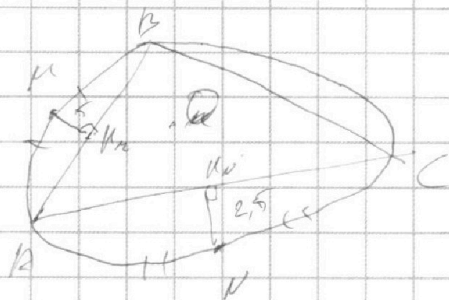
5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax_2 - 5x_1 - 6 = 0$$

$$x^2 + 6x + 12 = 16$$

$$y = 8b - ax$$

$$(x^2 + 5x - 4)(x^2 + 14x + 12) - 16 \leq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-3x^2 + 15x + 2 \geq 0$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

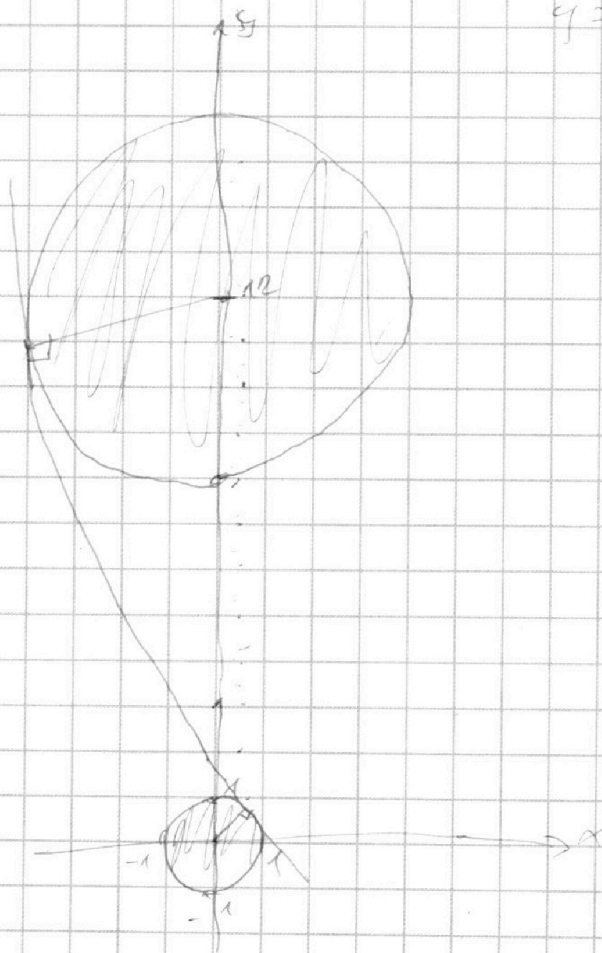
$$(-3x^2 + 15x + 2)^2 = (3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 4)$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 \\ - 6x \\ + 2 \\ \hline 3x^2 + 3x + 4 \end{array}$$

$$3x^2 \cdot 3x^2 = 9x^4, 3x^2 \cdot 3x = 9x^3, 3x^2 \cdot 2 = 6x^2, 15x \cdot 3x^2 = 45x^3, 15x \cdot 3x = 45x^2, 15x \cdot 2 = 30x, 2 \cdot 3x^2 = 6x^2, 2 \cdot 3x = 6x, 2 \cdot 2 = 4$$

$$= 9x^4 + 54x^3 + 54x^2 + 36x + 4$$

$$y = 3b - ax$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^d \cdot 7^e \cdot x, \quad b = 2^f \cdot 7^g, \quad c = 2^h \cdot 7^j \cdot 2 \quad d, e, f, g, h, j \in \mathbb{Z}$$

$$ab = 2^{d+f} \cdot 7^{e+g} \quad \begin{cases} d+f \geq 15 \\ e+g \geq 11 \end{cases} \quad x, g, z = 2, 7$$

$$bc = 2^{f+h} \cdot 7^{g+j} \quad \begin{cases} f+h \geq 17 \\ g+j \geq 11 \end{cases}$$

$$ac = 2^{d+h} \cdot 7^{e+j} \quad \begin{cases} d+h \geq 23 \\ e+j \geq 11 \end{cases}$$

$$300 \mid 23, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53$$

$$a-b = a \cdot b^2 - 25ab$$

$$2(d+f+h) \geq 55 \quad 6e-25g \cdot d \cdot f \cdot h \geq 55 \quad d+f+h \geq 28$$

$$2(e+g+j) \geq 68 \quad 3e-25g \cdot e \cdot g \cdot j \geq 39 \quad e+g+j \geq 34$$

$$13x^2 - 6x + 7 = 0 \quad 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{3}$$

$$x = 9 - 3 \cdot 4 = -3$$



$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{3} = 81x^2 - 18x + 1$$

$$-81x^2 + 16x + 28 = 2\sqrt{3}(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$$

$$y = 225 + 918 = 1821 \quad h = \sqrt{165 - 100x}$$

$$7+h = 10x$$

$$a \cdot b$$

$$a \cdot b$$

$$a-b$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 - 4ab$$

$$(a+b-2\sqrt{ab})(a+b+2\sqrt{ab})$$

$$185 = 24 \cdot 200 - 89$$

$$119 = 169 - 100x$$

$$25 = 249 - 100x$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$

$$U = ab$$