



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Заметим, что $abc : 7^{39}$. Тогда пусть a имеет в своем разложении на простые множители 7^{12} , а $c - 7^{27}$. Таким образом ~~все~~ условия на кратность 7 и 7^2 выполняются и в abc будет минимальная возможная степень 7 .

Пусть a_2, b_2, c_2 - степени 2 в разлож. на простые множители a, b, c соотв.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ c_2 + a_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 15 + 17 + 23 = 55 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \text{ хотя бы } 56, \text{ т.к. } a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2$ хотя бы 28 . Пример: $a_2 = 11, b_2 = 5, c_2 = 12$ (все условия выполнены)

Очевидно, что добавлять какие-то простые множ., кроме 2 и 7 , нет смысла, т.к. на них нет условий, но они увеличат abc .

Ответ: мин. возможн. произв. $abc = 7^{39} \cdot 2^{28}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Найдем НОД $(a+b, a^2-7ab+b^2)$ используя алгоритм Евклида:
 $(a+b, a^2-7ab+b^2) = (a+b, a^2-7ab+b^2 - (a+b)(a+b)) =$
 $= (a+b, -7ab-2ab) = (a+b, -9ab)$
т.е. вычли $(a+b)(a+b)$ раз

Заметим, что $a+b \nmid a$ и $a+b \nmid b$, т.к. a и b - взаимно просты. При этом $9ab$ делится на a, b и 9

$\Rightarrow$ наибольшее возможное $m = 9$.

Пример: $a=4, b=5$: $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

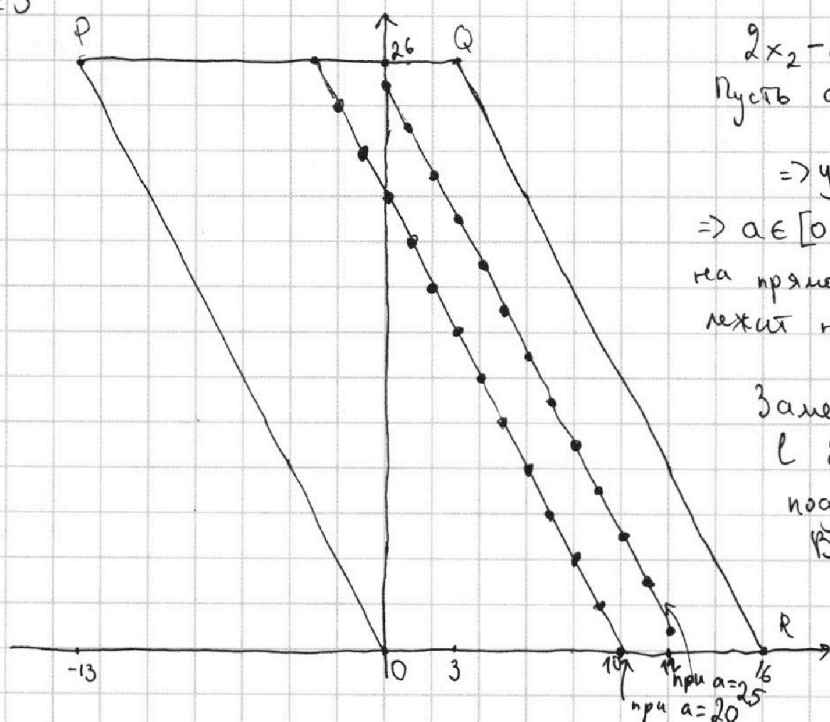
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\text{Пусть } a = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$\Rightarrow y_2 = a - 2x_2 \quad (\text{прямая } l)$$

$\Rightarrow a \in [0; 32]$, т.к. PO лежит
на прямой $y = -2x$, а QR
лежит на прямой $y = 32 - 2x$.

Заметим, что при a -чет,
 l будет пересекать 14
подходящих точек (т.е. точек
 B , которые подходят в
пару с этим a). А при
 a -нечет, l будет
пересекать 13 подхо-
дящих точек.

(т.е. скаж
ко точек
А задают
одно а)

Рассмотрим, сколько раз a принимает каждое своё значение.
Заметим, что $a \geq 14$, т.к. иначе $y_1 = -2x_1$, где
 $x_1 \in [1; 14]$, а такая прямая будет полностью вне $PQRO$, т.к.
PO является $y = -2x$. При наибольшем возможном $a = 32$:

$$32 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_1 = 18 - 2x_1 \Rightarrow \text{подойдет 9 точек}$$

$$a \leq 32 \text{ подходит, т.к. даже при } a = 32: 32 = 14 + 2x_1 + y_1, \\ y_1 = 18 - 2x_1, (\text{подходит})$$

$\Rightarrow a \in [14; 32]$. При этом при a -чет, подойдут 14 возможных точек
А, которые задают это самое a , и для каждой такой точки А
подойдут 14 точек В, т.е. пар (А, В) - 14·14 для a -чет. Аналогично
для a -нечет пар (А, В) - 13·13. Всего четных a - 10, а нечетных
 a - 9.

(Заметим, что прямые из точек В и из точек А не пересекаются,
т.к. первая прямая задается как $y_2 = a - 2x_2$, а вторая как $y_1 = (a - 14) - 2x_1$, $a \neq a - 14$)

$$\Rightarrow \text{ответом будет: } 10 \cdot 14 \cdot 14 + 9 \cdot 13 \cdot 13 = 1960 + 1521 = 3481$$

Ответ: 3481 пара



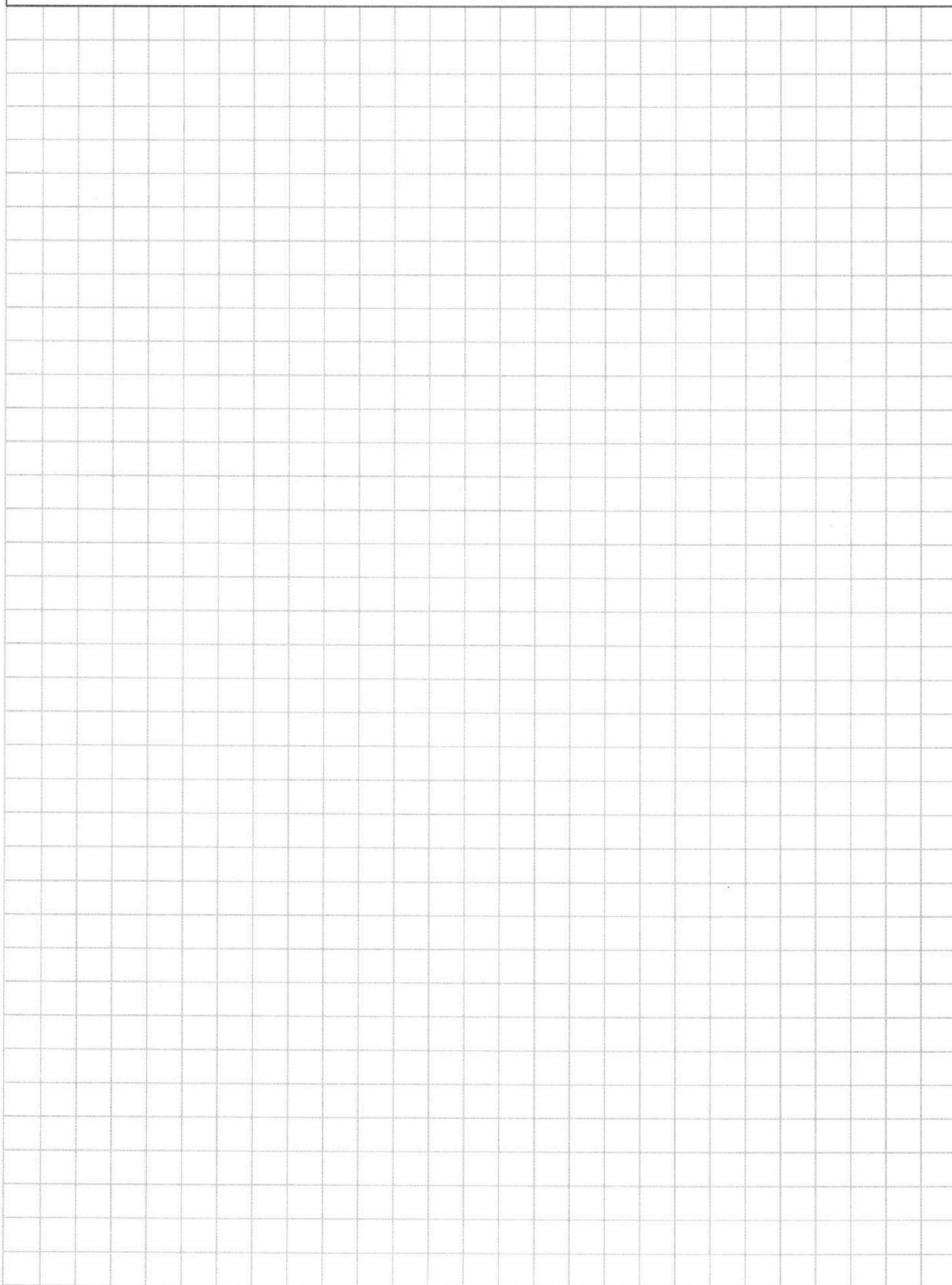
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чертовик

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \rightarrow y = 8b - ax \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 =$$

$$= x^2 + y^2 - 24y + 128$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 24 \\ 182 \end{array}$$

$$(x^2 + (8b - ax)^2 - 1)(x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 \leq 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 &= x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 192b + 24ax + 128 = \\ &= (a^2 + 1)x^2 + (64b^2 - 192b + 128) \end{aligned}$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + (64b^2 - 1) \leq 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 4a^2 - 256b^2 + 4 = 0$$

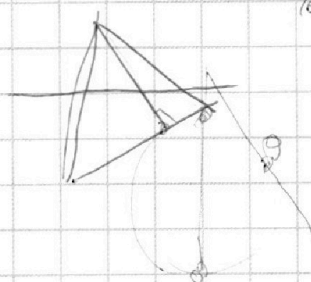
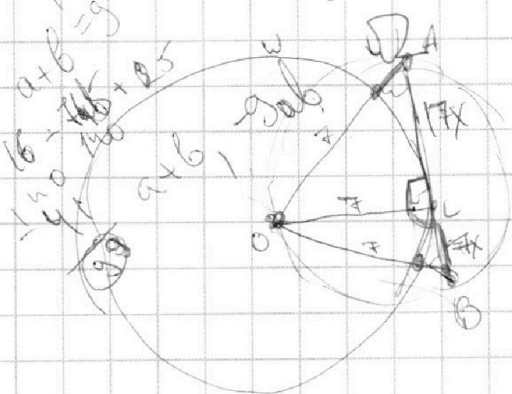
$$x = \frac{16ab \pm 2\sqrt{a^2 - 64b^2 + 1}}{2(a^2 + 1)}$$

$$\left(\frac{8ab + \sqrt{D}}{a^2 + 1} \right) \left(\frac{8ab - \sqrt{D}}{a^2 + 1} \right) \leq 0$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$b_2 =$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$$



$$17x + 7x = 24x$$

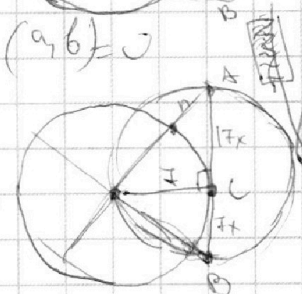
$$289x^2 + 49 = 49 + 14n + n^2$$

$$19x^2 + 49 = 49 + 14m + m^2$$

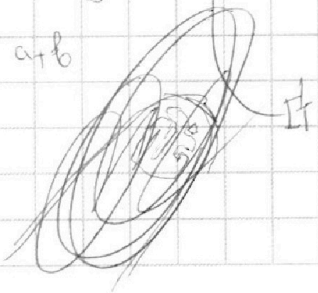
$$\Rightarrow 94 \cdot \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = ?$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$



$$\begin{aligned} (1+x)^2 + 7^2 &= (1+n)^2 \\ (1+x)^2 + 7^2 &= (1+m)^2 \\ 14m &= 49x^2 \\ 14n &= 289x^2 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$D = 9 - 43$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$(3 \pm \sqrt{3})x =$$

$$\frac{15}{2} \pm 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})^2 = (6 - 2\sqrt{6})x$$

$$9x + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 + 36x^2 - 66x + 2 + 18x\sqrt{} = 1 + 3x^2 + 9x + 1 + 2\sqrt{}$$

$$8(x^2 - 5x + 1) =$$

$$(9x - 1)^2 = 1$$

$$9x - 1 = \pm 1$$

$$9x = 2 \text{ or } 0$$

$$x = \frac{2}{9} \text{ or } 0$$

$$a + b, -9ab$$

$$\frac{4}{5}$$

$$9 \cdot 9 \cdot 11$$

$$ab$$

$$(a+i)b + a(b+i)$$



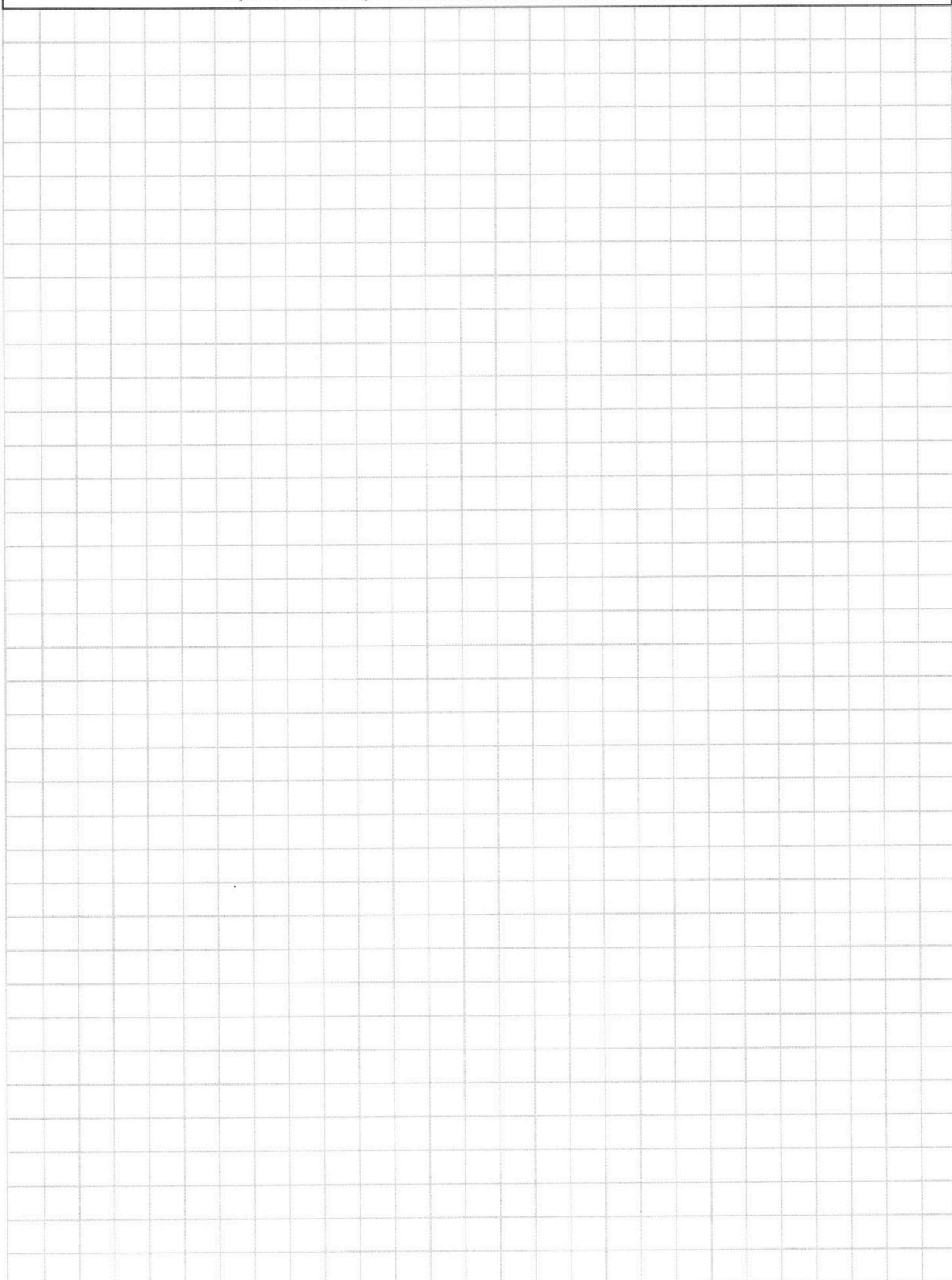
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





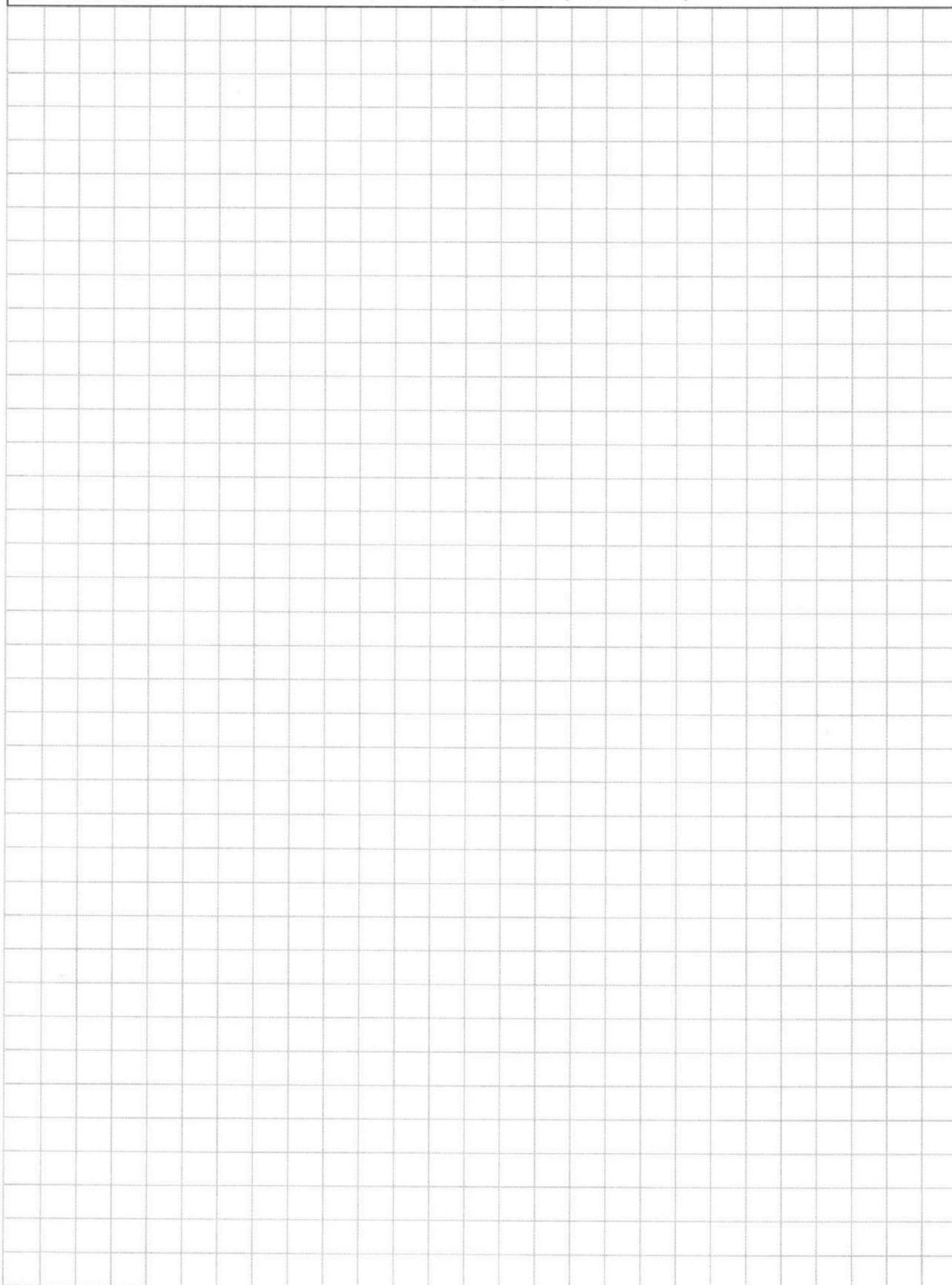
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

