



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

У a, b, c не являются сторонами, кроме c и b , если предположить, что a, b, c являются сторонами, то можно доказать, что a, b, c не являются сторонами. Пусть a_1, b_1, c_1 - стороны, тогда из-за симметрии мы имеем:
 $a_1 + b_1 = 14, c_1 + b_1 = 13, a_1 + c_1 = 20$

Решение.

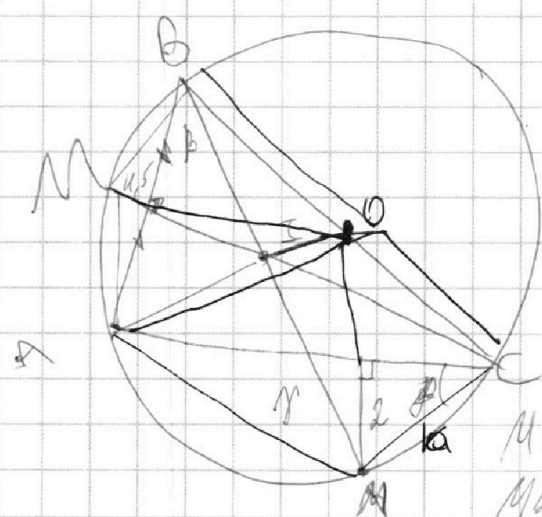
$$\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma} = 2,25$$

$$\left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1,5 \right)$$

$$2,5 \sin^2 \gamma = 4,5 \sin^2 \beta$$

$$MC = \frac{2}{\sin \beta} = 2R = \frac{4,5}{\sin \gamma}$$

$$\frac{MC}{\sin \beta} = 2R$$



$$MC \cdot \sin \beta = 2$$

$$MC \cdot 1,5 \sin \gamma = 2$$

$$MB \cdot \sin \gamma = 4,5$$

$$\sin \beta = 1,5 \sin \gamma$$

$$\frac{MC \cdot 1,5 - 2}{MB} = \frac{2}{4,5}$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача:

~~а) $2^{14} \cdot 4^{14}$ - значение выражения~~ Пусть a - Запишем, что для того, чтобы abc было наименьшим, у чисел a, b, c не должно быть делителей, отличных от 2 или 4 (иначе можно поделить числа на эти делители и для них всё равно будет выполняться условие задачи). Тогда пусть $a = 2^{a_1} \cdot 4^{a_2}$, $b = 2^{b_1} \cdot 4^{b_2}$, $c = 2^{c_1} \cdot 4^{c_2}$. Из условий делимости: $a_1 + b_1 \geq 14$, $c_1 + b_1 \geq 14$, $a_1 + c_1 \geq 20$. Поскольку числа a, b, c - натуральные, то $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - целые неотрицательные.
 $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 34$, $b_1 + c_1 \geq 14$, тогда $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 14 + 14 + 20 = 51$ - нечетное число. Тогда $2(a_1 + b_1 + c_1)$ - четное число.

Верно, что $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 52$, $a_1 + b_1 + c_1 \geq 26$. Если хотим, чтобы abc было наименьшим, нужно подобрать наименьшие возможные значения a, b, c . Тогда $a_1 + b_1 + c_1 = 26$. Если $b_1 + c_1 = 20$, то $a_1 = 26 - 20 = 6$. $a_1 + b_1 \geq 14$, $b_1 = 6$, $a_1 \geq 8$, $a_1 = 8$. $a_1 + c_1 = 20$, $a_1 = 8$, $c_1 = 20 - 8 = 12$. $c_1 + b_1 = 12 + 6 = 18 \geq 14$ - верно. Аналогично из-за делимости: $a_2 + b_2 \geq 10$, $b_2 + c_2 \geq 14$, $c_2 + a_2 \geq 34$. Тогда $a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 + 10 + 14 = 64$, $a_2 + b_2 + c_2 \geq 32$, но при этом равенство невозможно, так как $a_2 + c_2 \geq 34$, но задано, что требуется минимум, тогда вставляем, например, при $b_2 = 0$, $c_2 + a_2 = 34$, $a_2 = 14$, $c_2 = 20$. (напомним, что abc - значение выражения, стоящего в скобках, а не их конкретные значения). В итоге получаем значение $abc = 2^{26} \cdot 4^{34}$. Тогда запишем, что при наименьших значениях abc , $a_1 + b_1 + c_1 = 26$, $a_2 + b_2 + c_2 = 34$, тогда, учитывая, что a, b, c не могут быть делителями, $abc = 2^{26} \cdot 4^{34}$.

Ответ: $2^{26} \cdot 4^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



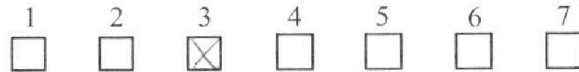
Задача 2. Ответ: $m=8$.

$\frac{a}{b}$ несократима, значит a и b взаимно простые числа.

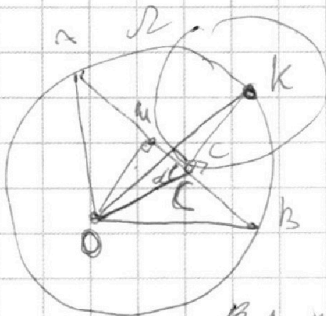
Пусть $a+b:m$ и $a^2-6ab+b^2:m$, тогда заметим, что
если a и b взаимнопросты с m , то если u и v взаимнопросты с m , то $u^2-6uv+v^2:m$, то $a+b:m$, то $a+b:p$, то $a+b:p$, то a и b взаимнопросты. Так $a^2-6ab+b^2:m$, $a^2+2ab+b^2:m$. Тогда $a^2+2ab+b^2-a^2-6ab+b^2=-4ab:m$. $a+b:m$, $a \equiv -b$, тогда $4ab \equiv 0$ $(4ab:m) \equiv -4b^2 \equiv 0$. $-4b^2 \equiv 0$, тогда $8b^2:m$, аналогично $8a^2:m$. Но $8ab:m$.
Поскольку доказано, что a и b взаимнопросты с m , тогда
можно показать, что $8b^2:m$, $8:m$, а значит $8 \geq m$. Тогда
посмотрим левую часть $m=8$. Да может, например
при $a=3$ и $b=5$, тогда $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{9+25-6 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{8}{34-90} = -\frac{8}{56}$, заметим
что $56=8$ и $8:8$.

Ответ: $m=8$ — наибольшее возможное значение m .

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



Задание 3



Пусть O - середина отрезка AB , тогда пусть M - середина AB , тогда из $OA = OB$ (радиусы), следует $\triangle ABO$ - равнобедренный, тогда OM также и высота. $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$, $AC = \frac{1}{2}CB$, $AC + CB = AB$, тогда

$AB = 8CB$. М-средняя AB , тогда $AM = 8CB$, $MB = CB$,
 $MC = 8CB - CB = 7CB$. Заменим CB на 1.

В Δ по теореме Пифагора в $\triangle AOM$ $MO = \sqrt{AO^2 - AM^2} =$

$$= \sqrt{25 - 16CB^2} \quad \text{In } \triangle OCM \quad OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \sqrt{25 - 16CB^2 + 9CB^2} = \sqrt{25 - 7CB^2}$$

Rzecz K - ~~czarna~~ w, tożs. KC=1 (paździę w) Rzecz $\frac{0}{2}$ CA=2.

Тогда $\angle OCK = 90^\circ$, так как $KC \perp AB$ (AB касательная к ω). По теореме косинусов в $\triangle OCK$: $OK^2 = OC^2 + CK^2 - 2 \cdot OC \cdot CK \cdot \cos \angle OCK$
 $OK = 5$ (радиус ω), $CK = 1$ (радиус ω) $\cos \angle OCK = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos(135^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $25 = 25 - 4CB^2 + 1 + 2 \cdot OC \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, значит, что
 $OC \cdot \sin 45^\circ = OM$, так как это радиус ω

ΔC ymawm. Tora $-4CB^2 + 1 + 20M = 0$

$$-4CB^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16CB} = 0 \quad 2\sqrt{25 - 16CB} = 4CB^2 - 1, \text{ bezielend af}$$

$$4(25 - 16CB^2) = 49CB^4 - 14CB^2 + 1$$

$$49CB^4 + 48CB^3 + 50CB^2 - 99 = 0$$
 квадратное уравнение степени 4

$$CB^2 = 50^2 + 99.449 = 2500 + 9889 = 12389 = 111.8^2$$

Тогда $\sqrt{B^2} = \frac{-50 + 148}{2 \cdot 9.2} = \frac{98}{98} = 1$, второй корень меньше

изуч. не проводилось, тогда $CB^2 = 1$, $CB = 1$, так как $CB > 0$.

$$AB = 8 \quad CB = 8$$

Obst: $AB = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

Ограничения: $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$, так находится под корнем.
Найдем корни уравнения $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1. \quad x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{5-1}{4} = 1; \text{ Тогда, } x \in (1; \frac{3}{2}).$$

Аналогично $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$. $D = 4 - 2 \cdot 4 \cdot 1 = -4 < 0$, значит $2x^2 + 2x + 1$ всегда ≥ 0 .

Возведем обе части в квадрат:

$$(2x^2 - 5x + 3) + (2x^2 + 2x + 1) - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 49x^2 - 28x + 4.$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 49x^2 - 28x + 4, \text{ сократим на } 4 \text{ и возведем в квадрат:}$$

$$(-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)})^2 = (45x^2 - 25x)^2$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = 45^2 x^4 - 2 \cdot 45 \cdot 25 x^2 + 25^2 x^2$$

$$2009x^4 - 2226x^3$$

Пусть $2x^2 - 5x + 3 = a$, $4x - 2 = b$, тогда

исходное неравенство переписывается в виде

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b, \text{ возведем обе части в квадрат:}$$

$$a + a + b - 2\sqrt{a^2 + ab} = b^2, \quad 2a + b - b^2 = 2\sqrt{a^2 + ab};$$

$$4a^2 + b^2 + b^4 + 4ab - 4ab^2 - 2b^3 = 4a^2 + 4ab. \quad b^2 + b^4 - 4ab^2 - 2b^3 = 0.$$

$$a = \frac{b^2 + b^4 - 2b^3}{4b^2} = \frac{1 + b^2 - 2b}{4} = \frac{(b-1)^2}{4}, \text{ подставим исходные значения:}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = \frac{(4x-2)^2}{4} \quad 8x^2 - 20x + 12 = 49x^2 - 42x + 9$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$D = 22^2 + 3 \cdot 41 = 184 + 123 = 307 = (17\sqrt{61})^2.$$

$$x_1 = \frac{22 + 17\sqrt{61}}{82} = \frac{11 + 17\sqrt{61}}{41} < 1, \quad x_2 = \frac{11 - 17\sqrt{61}}{41} < 1, \text{ оба}$$

корня удовлетворяют ограничениям

$$\text{Ответ: } x = \frac{11 + 17\sqrt{61}}{41}, \quad x = \frac{11 - 17\sqrt{61}}{41}.$$

$$\begin{array}{r} 45^2 \quad 25^2 \\ 45 \quad 25 \\ \hline 225 \quad 625 \\ 180 \quad 150 \\ \hline 2025 \quad 625 \\ \hline 2250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22^2 \quad 41 \\ 22 \quad 41 \\ \hline 44 \quad 166 \\ 484 \quad 1661 \\ \hline 184 \quad 1661 \\ \hline 307 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5.

Заметим, что любые параллельные образуют пересечение прямых $y = 24$ (так как $P \in A$), $y = -2x$ ($P \in O$), $y = -2x - 30$ ($P \in B$), $y = 0$ ($P \in O$). Тогда если точка лежит внутри параллелограмма, то и верно, что если x и y — координаты, то $y \geq 0$, $y \geq -2x$, $y \leq -2x + 30$, $y + 2x \geq 0$, но $y - 2x \leq 30$.

Заметим, что если точка лежит на границе параллелограмма, то она лежит на одной из этих четырех прямых.

Заметим, что через любую точку, лежащую внутри параллелограмма, можно провести прямую, параллельную сторонам этого параллелограмма. Тогда для прямой можно считать, что она лежит внутри параллелограмма или на его границе.

$y = -2x + a$, где $a \in [1, 29]$, a — целое, на которой будет лежать точка. Прямая $y = 24$ — граница параллелограмма.

Прямая $y = -2x$ — граница параллелограмма. Прямая $y = -2x - 30$ — граница параллелограмма. Прямая $y = 0$ — граница параллелограмма.

На границах параллелограмма будет $24 + 1 = 13$ целых точек. Заметим, что на границах параллелограмма будет $24 + 1 = 13$ целых точек.

Тогда заметим, что на границах параллелограмма будет $24 + 1 = 13$ целых точек. Заметим, что на границах параллелограмма будет $24 + 1 = 13$ целых точек.

Тогда заметим, что на границах параллелограмма будет $24 + 1 = 13$ целых точек. Заметим, что на границах параллелограмма будет $24 + 1 = 13$ целых точек.

Заметим, что в этих прямых есть по две целых точки на границах параллелограмма, поскольку $0 \leq y \leq 24$, то на них будет $24 - 1 = 13$ целых точек, а на остальных ± 5 прямых будет 2 целых точек.

Если точка лежит на прямой $2x + y = a$, то она будет внутри параллелограмма, если $a \in [1, 29]$, a — целое, на которой будет лежать точка.

Если точка лежит на прямой $2x + y = a$, то она будет внутри параллелограмма, если $a \in [1, 29]$, a — целое, на которой будет лежать точка.

Если точка лежит на прямой $2x + y = a$, то она будет внутри параллелограмма, если $a \in [1, 29]$, a — целое, на которой будет лежать точка.

Если точка лежит на прямой $2x + y = a$, то она будет внутри параллелограмма, если $a \in [1, 29]$, a — целое, на которой будет лежать точка.

Если точка лежит на прямой $2x + y = a$, то она будет внутри параллелограмма, если $a \in [1, 29]$, a — целое, на которой будет лежать точка.

Если точка лежит на прямой $2x + y = a$, то она будет внутри параллелограмма, если $a \in [1, 29]$, a — целое, на которой будет лежать точка.

Если точка лежит на прямой $2x + y = a$, то она будет внутри параллелограмма, если $a \in [1, 29]$, a — целое, на которой будет лежать точка.

Если точка лежит на прямой $2x + y = a$, то она будет внутри параллелограмма, если $a \in [1, 29]$, a — целое, на которой будет лежать точка.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5 (продолжение)

от 12 до 18 и чётных чисел и три нечётных. Тогда
для каждой из точек с x и y координатами
будет по 2 прямых, ~~длина которых~~ ^{которые можно выбрать} 100-13
точек, тогда получимся пара, удовлетворяющая условию
(так как прямые вида $2x+y=a$, то разность $2x_1+y_1=a_1$ и $2x_2+y_2=a_2$,
разность $2x_1+y_1-2x_2-y_2=a_1-a_2$), тогда будет
 $4 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 13 = 1698$ пар, и для прямых с нечётными координатами
аналогично будет $4 \cdot 2 \cdot 12^2 = 1448$ пар.

Тогда всего $1698 + 1448 = 8(169 + 144) = 8 \cdot 313 =$
 $= 2504$

Ответ: 2504 пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6

Выразим y .

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$y = 10b + ax$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(x+8)^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1 = 0$$

$$x^2 + 16x + 64 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + 63 + 16x)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0$$

Все эти случаи рассматривать не надо. Если $x^2 + y^2 - 1 > 0$, то $x^2 + y^2 + 63 + 16x > 0$. Тогда $(x^2 + y^2 + 63 + 16x)(x^2 + y^2 - 1) > 0$. Тогда $x^2 + y^2 + 63 + 16x < 0$. Тогда $(x^2 + y^2 + 63 + 16x)(x^2 + y^2 - 1) < 0$.

$$(x^2 + 63 + 16x + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx)(x^2 - 1 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx) \leq 0$$

Эти выражения, если оба выражения больше нуля, а другие меньше нуля. Или оба выражения равны 0 по условию.

Итак, все значения x и y найдем.

Итак, все значения x и y найдем.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

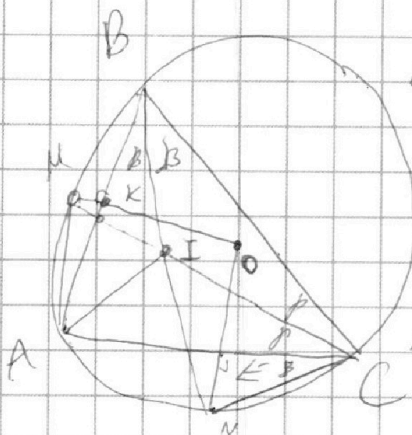
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4



М и N - середины отрезков AB и AC, значит BM и CN - медианы, тогда BM и CN пересекаются в I. Также замечая, что медиана с перпендикуляром к ее основанию пересекаются в середине отрезка, значит BM и CN перпендикулярны в I. Тогда OM и ON - серединные перпендикуляры к AB и AC, где O - центр описанной окружности.

$\triangle ABC$. Пусть K и E - середины AB и AC, тогда по условию $MK = 4,5$, $EN = 2$. Пусть $\angle B = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$. Тогда в $\triangle NEC$ $NE = CN \cdot \sin \gamma$. $2 = CN \cdot \sin \gamma$. По теореме синусов $\frac{NC}{\sin \gamma} = 2R$, где R - радиус описанной окружности.

$\triangle ABC$. Также $\frac{AM}{\sin \gamma} = 2R$. Тогда $\frac{NC}{\sin \gamma} = \frac{AM}{\sin \gamma}$.

$NC = \frac{2}{\sin \gamma}$, $AM = \frac{4,5}{\sin \gamma}$ так как $\triangle AKM$ прямоугольный с углом γ . Тогда $\frac{2}{\sin \gamma} = \frac{4,5}{\sin \gamma}$.

$\frac{2}{\sin \gamma} = \frac{4,5}{\sin \gamma} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} = \frac{4,5}{2} = 2,25$, $\gamma \neq \angle B < 90^\circ$, так

как это было бы равносильно тому, что $\sin \gamma > 0$, $\sin \angle B > 0$, $\frac{\sin \gamma}{\sin \angle B} = 1,5$. $\sin \gamma = 1,5 \sin \angle B$. $CN = \frac{2}{\sin \gamma}$.

$AM = \frac{4,5}{\sin \gamma} = \frac{3}{\sin \angle B}$, тогда $\frac{AM}{CN} = \frac{3}{2}$, $AM = 1,5 CN$.

По условию отрезки $IN = AN = CN$, $AM = MI = MB$. $\triangle MIB$ равнобедренный, тогда также $\angle BMA = \angle BAC$, отсюда SA мы одну дугу. Тогда, по теореме косинусов для

$\triangle MIA$. $AI^2 = MI^2 + AN^2 - 2 AN \cdot MI \cdot \cos \angle B$.

$AI^2 = MI^2 + AN^2 - 2 AN \cdot MI \cdot \cos \angle B$.

$AI^2 = 2CN^2 + 2CN^2 - 4CN^2 \cdot \sin^2 \gamma$. $AI^2 = 4CN^2(1 - \sin^2 \gamma) = 4CN^2 \cos^2 \gamma$. $AI = 2CN \cos \gamma$. $AI = \frac{2 \cdot 2}{\sin \gamma} \cos \gamma = \frac{4 \cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{4}{\tan \gamma}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

$$AI^2 = 2CN^2 - 2CN^2 \cos^2 \gamma = 4CN^2 \sin^2 \gamma = 4 \cdot \left(\frac{2}{\sin 4\beta}\right)^2 \sin^2 \gamma = \frac{16}{\sin^2 4\beta} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\sin^2 4\beta} \cdot 2,25 \cdot \sin^2 \gamma = \frac{16}{\sin^2 4\beta} \cdot 36.$$

Попробуем найти $\sin \gamma$. Задача 7. $\cos \gamma = 1 - \sin^2 \gamma = 2,25 \cos^2 \beta$, $\cos^2 \gamma = 2,25 \cos^2 \beta$.

$$AI^2 = 36, \quad AI = 6.$$

ОТВЕТ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6

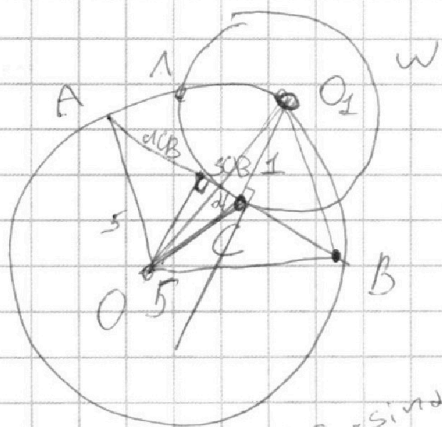
$$ax - y + 10b = 0 \quad ax = y - 10b \quad x = \frac{y - 10b}{a}$$

~~$L((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \neq 0$. Вокруг уравнения верного
 $(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ или $x^2 + y^2 < 4$, $(x+8)^2 + y^2 \geq 1$ и $x^2 + y^2 > 4$ и
 $x^2 + y^2 + 64 + 16x$ $(x+8)^2 + y^2 < 1$
 $x^2 + y^2 + 64 - 63$~~

Пусть $(x+2)^2 + y^2 - 1 = 0$, тогда подставим $x = \frac{y-10b}{a}$

$$\frac{(y-10b)^2}{a^2} + \frac{16y-160b}{a} + 64 + y^2 - 1 = 0$$

Черновик

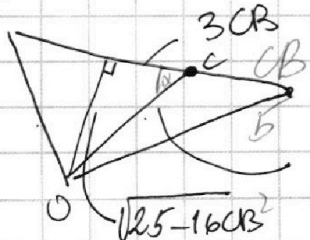


$$\frac{AC}{LB} =$$

$$AC = 4CB$$

$$AB = 8 \text{ CR}$$

$$OC = \sin \alpha = \sqrt{25 - 16} CB^2$$



$$\textcircled{c} \quad C^2 = 25 - 16CB^2 + 9CB^2 = 25 - 7CB^2$$

$$PC \cos d = 3CB$$

$$OC^2 + OB^2 + 2OC \cdot OB \cdot \cos d = 5 =$$

$$25 = 1 + 25 - 4CB^2 + 2\sqrt{25 - 16CB^2} \quad 25 - 4CB^2 + CB^2 + 6CB^2 = 5$$

$$1 - 4CB^2 + 2\sqrt{25 - 4CB^2} = 0 \quad 25 - 4CB^2 = 5$$

$$CB^2 = 20$$

$$CB^2 = \frac{20}{12}$$

$$500 - 64CB^2 = 49CB^4 - 19CB^2 + 1$$

$$490B^4 + 500B^2 - 99 = 0$$

$$UB^2 = 0.1 \quad 2500 + 99.4 \cdot 99$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 291 \\ 396 \\ \hline 4251 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19404 \\ \times 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21904 \overline{) 44} \\ \underline{438} \\ 89 \\ \underline{89} \\ 0 \end{array}$$

1130
 1130
 1290
 142
 18490
 ~~$AB = 2$~~



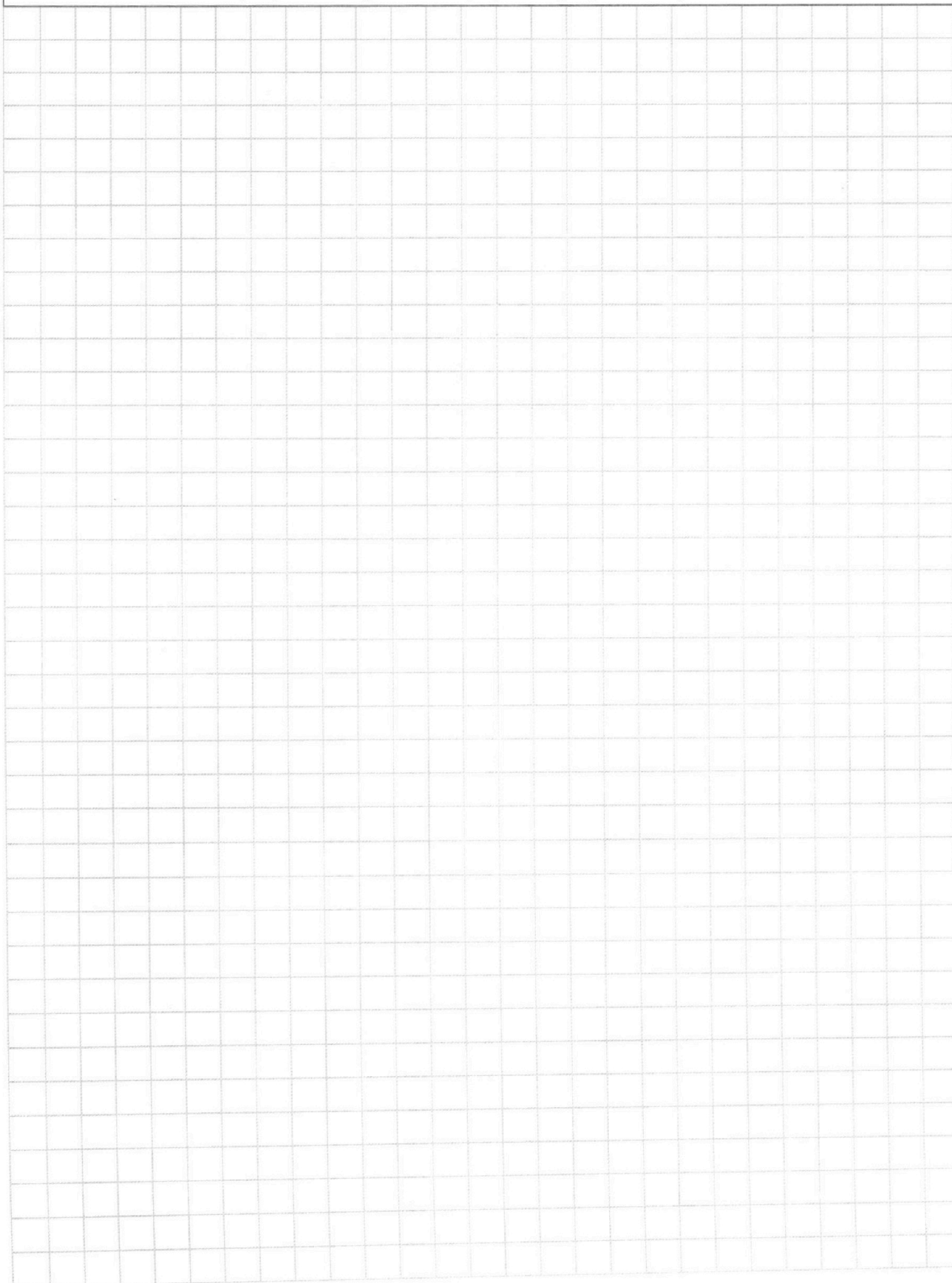
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Черновик

$$a^2 + 2ab + b^2 : m^2$$

$$8ab : m^2$$

$$a^2 + b^2$$

$$a+b : m$$

$$a+b = mn$$

$$8ab = mn$$

$$a = mk - b$$

$$8(mk - b)b = mn$$

$$8b^2 : m$$

$$8a^2 : m$$

$$8ab : m, \text{ а } 8ab : m$$

$$8b(a-b) : m$$

$$\text{Если } b : m, \text{ то } a : m, \text{ тогда } 8 : m.$$

$$\text{Если } a : m, \text{ то } b : m, \text{ тогда } 8 : m.$$

$$\text{Тогда } m \leq 8.$$

$$\text{Пример } 3 \text{ и } 5.$$

$$9 + 25 = 6 \cdot 6$$

$$3^2 + 5^2 = 6 \cdot 6$$

$$4, 5 = 2$$

$$\sin \alpha = 16 \sin \beta$$

$$\sin \alpha =$$

$$\sin \alpha = a$$

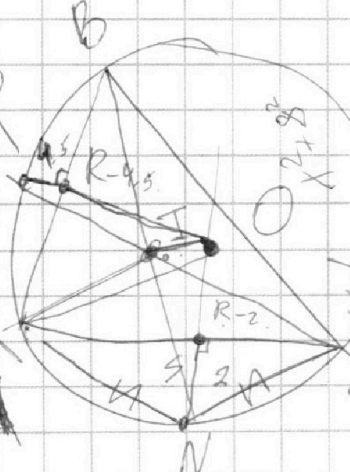
$$x^2 = 0^2 + 1^2$$

$$x^2 = 0^2 + 1^2$$

$$x^2 = 0^2 + 1^2$$

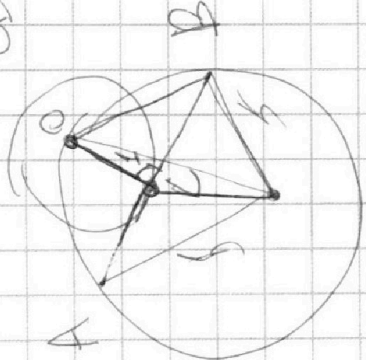
$$x^2 = 0^2 + 1^2$$

$$x^2 = 0^2 + 1^2$$



$$x^2 = 0^2 + 1^2$$

$$x^2 = 0^2 + 1^2$$



$$x^2 = 0^2 + 1^2$$



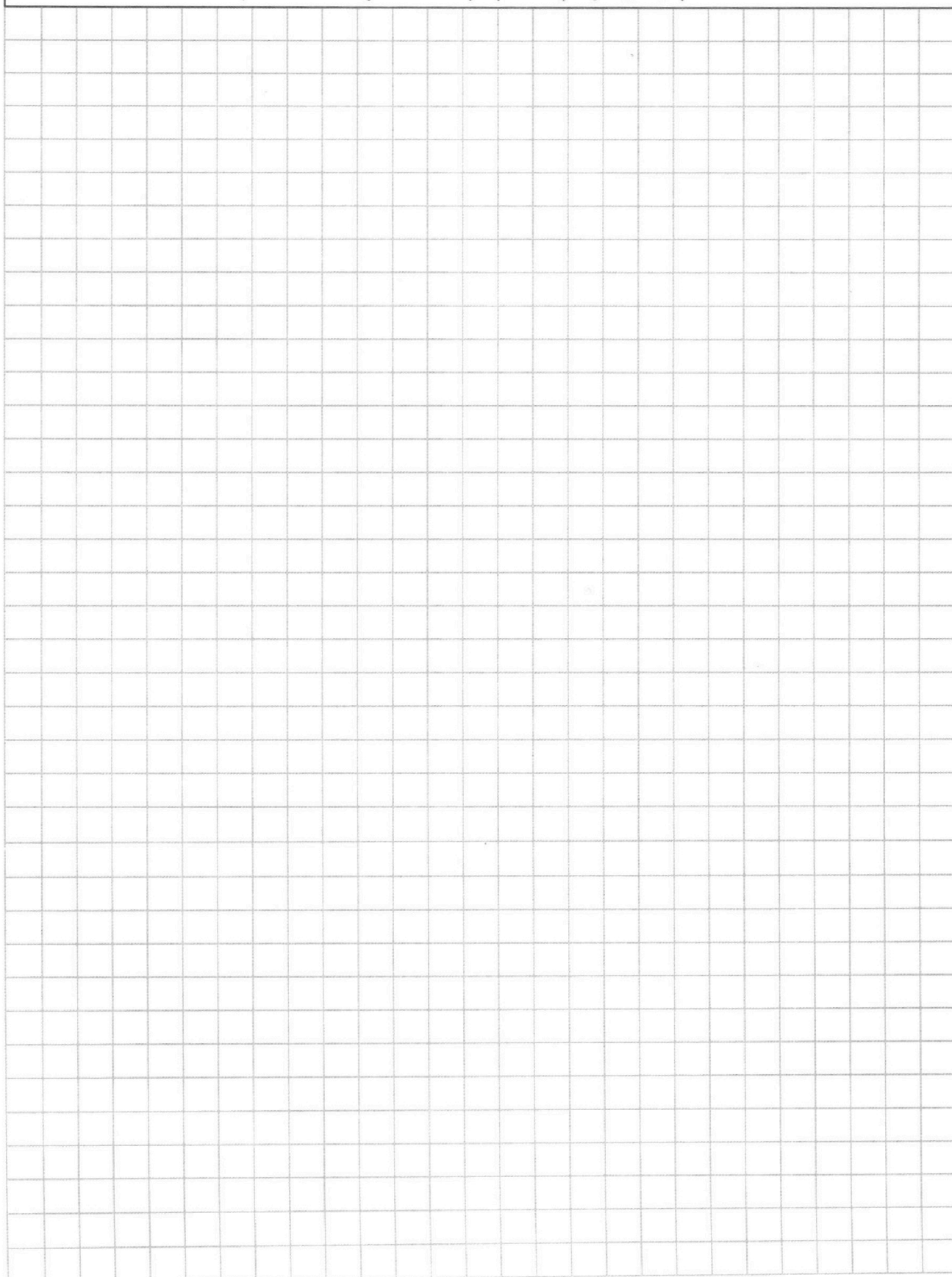
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

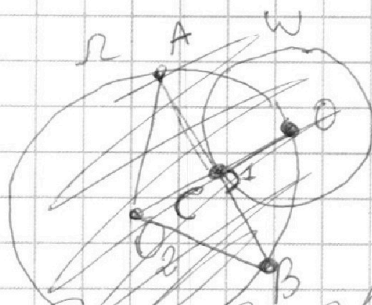
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



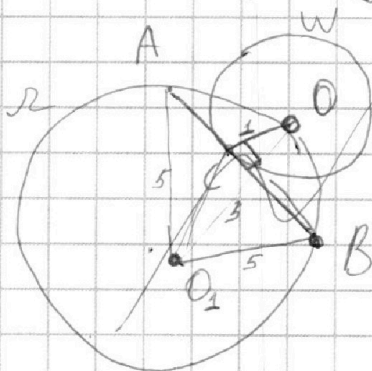
Задача 3 Черновик

Дано: w, l - окружности, центры
линии l . АВ касательная l и касается
 w в точке C . $AC = 4$
Радиусы w и l ± 4 и 5 .

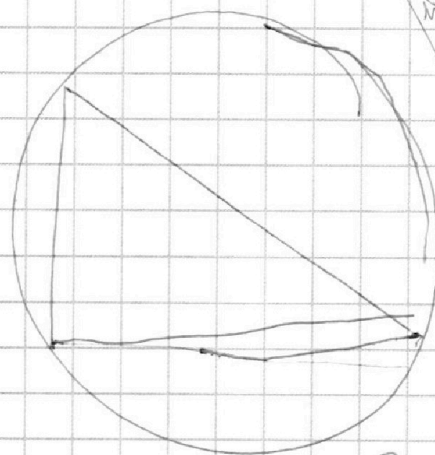
$AB = ?$



~~AC и O_2C - радиусы одной окружности, поэтому~~



O_1 и O_2 - центры w и l соответственно.
 $O_2C \perp AB$, так как AB касается w . $AO_1 = O_1B =$
 $= O_1O_2$ (радиусы) $= 5$. $O_2C = 1$ (радиус w).



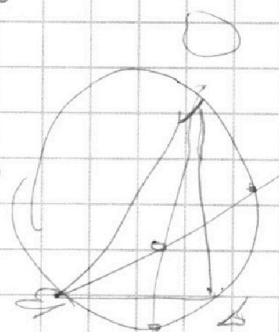
$\sin \alpha = \frac{1}{4}$
 $\alpha = 14.5^\circ$

$AB = 6.11 - 2.6 = 3.5$

$3.5 \sin \alpha =$

Задача 3

$y = 6.11 - 2.6 = 3.5$



$a = 0$ $10 \sqrt{2}$

$(100 \sqrt{2} + 12 - 4)$

$100 \sqrt{2} + (12 - 4) =$

$100 \sqrt{2}$

$100 \sqrt{2} = 141.42$

$100 \sqrt{2} = 141.42$



$x^2 + y^2 = 1$