МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 продолжение

приведем пример

$a = 2^{11} \cdot y^{7}$

$b = 2^{15} \cdot y^{y}$

$c = 2^{12} \cdot y^{23}$

заметим что abc делится
y^{34}
не ac делить на $y^{3 \cdot 34}$

$34 < 34 \cdot 3$ abc делится на

$abc = 2^{28} \cdot y^{34}$

приведем пример

$a = 2^{11} \cdot y^{21}$

$b = 2^{5} \cdot$

$c = 2^{13} \cdot y^{20}$

ab ~~делит~~ делить не $2^{16} \cdot 21$
на $2^{15} \cdot y^{11}$

~~ab~~ c bc делит на $2^{19} \cdot y^{18}$ делит
на $2^{14} \cdot y^{10}$

-2-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Λ 1 продолжение

q_1 длина a_1 $2^{23} \cdot 7^{45}$ см

длина a_2 $2^{24} \cdot 7^{39}$

. удовлетворяет условию

Ответ: наименьшее a_1

~~$2^{28} \cdot 7$~~ $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Заметим, что

$ab \cdot bc \cdot ac$ делится на $2^{(15+13+23)} \cdot y^{(11+18+39)}$

$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac}$

Значит из $ab \cdot bc \cdot ac$

делением извлекаем

корень

$ab \cdot bc \cdot ac$ делится на $2^{55} \cdot y^{68}$

получаем $ab \cdot bc \cdot ac$ - будет

делиться на 2^{55} и делится

на y^{68} и тогда abc будет делиться на 2^{28}

(потому что 55 - нечетное)

Значит $ab \cdot bc \cdot ac$

делится на $2^{56} \cdot y^{68}$

Значит abc делится

на $2^{28} \cdot y^{34}$

тогда $abc \geq 2^{28} \cdot y^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что
$НОД(a,b)=1$, потому что
$\frac{a}{b}$ - несократимая
и заметим, что
$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab$
Теперь заметим, что
наименьшее число $n=$
$=НОД(a+b, a^2-ab+b^2)$, то есть
$n=НОД(a+b,(a+b)^2-3ab)$
Значит $a+b$ делится на d
на n, тогда $(a+b)^2$ делится
на n и $(a+b)^2-3ab$
делится на n. Значит,
$3ab$ делится на n.
Значит, что если $НОД(a,b)=k$
и $k>1$, то $НОД(a+b,n)>n$
и $n>1$, то $НОД$ $a+b$ делится на d
и $3ab$ делится на d. Значит
d делится на n

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 продолжение

Докажем

НОД(a, b) ≥ n

что противоречит

нашему факту

НОД(a, m) = 1

НОД(b, m) = 1

тогда a и m взаимно

просты

и b и m взаимно

просты тогда ab и

взаимно просты =)

Осталось найти наименьшее

значение m ≤ 9

приведем пример для m = 9

a = 2 b = 7

$$\frac{ab}{n^2 - ab} = \frac{9}{4 \cdot 7 \cdot 2 - 49} = -\frac{9}{45}$$

45 делится на 5 и 9 значит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 продолжение

НОД (9; 45) = 9

Пример 4: НОД (2, 7) = 1

Числа удовлетворяют условию задачи.

Ответ: m = 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 продолжение

Пусть $\angle AO_1B = \frac{AO_1 \cdot O_1B \cdot \sin L}{2}$

$= \frac{AO_1 \cdot O_1B}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$L = 3 \cdot 24°$

$AO_1 \cdot O_1B = \frac{144}{\sqrt{3}} = 3 \cdot 24°$

$AO_1 \cdot O_1B = \frac{3 \cdot 24 \cdot 12}{12} = 24 \cdot 12$

$= 288$

Пусть хорда перпендикулярна диаметру AO_1B

$AO_1 = \sqrt{12^2 + 16^2}$

$O_1B = \sqrt{12^2 + 16^2}$

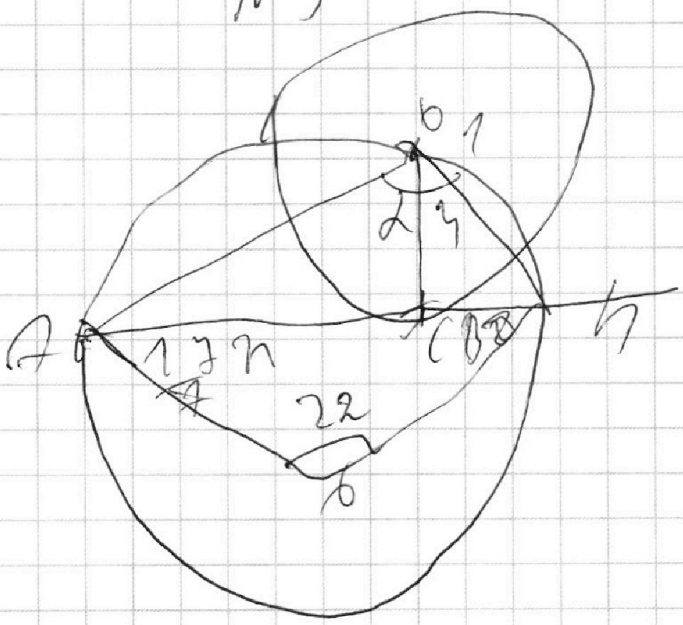
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3



~~A~~ (1)

Пусть $\angle AOB = 2\angle AO_1B$

тогда $AC = 15$

$CB = 4$ тогда $AC = 3$

~~$AO = \sqrt{15}$~~ - тогда

$AB = 24$

по теореме синусов

$$\frac{24}{\sin 2} = 2R$$

$$\sin 2 = \frac{24}{2R} = \frac{12}{13}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 продолжение

$AO_1^2 + O_1B^2 - 2\cos\angle AO_1O_1B =$

$= (2R)^2$

$(13R)^2 + (7R)^2 + 2 \cdot \cos\angle \cdot 13 \cdot 7 =$

$= (2R)^2$

$338R^2 + 98 - 2\cos\angle \cdot 364 =$

$= 536R^2$

$98 - \cos\angle \cdot 364 = 198R^2$

$338R^2 - \cos\angle \cdot 364 = 436$

Потом, после синуса продолжаем

$\triangle OAB$

$(2R)^2 = 169 \cdot 2 - 2\cos\angle \cdot 169$

$(2R)^2 = 169 \cdot 2 - 2\cos\angle \cdot 169$

-2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 продолжение

$$\begin{cases} 99 - 1052 \cdot 364 = 198\pi^2 \\ 336\pi^2 = 33 - 33\cdot(1-\cos^2) \end{cases}$$

$$\sin^2 = \frac{33 - 0.72}{33}$$

$$\frac{584\pi^2}{676} = \cos^2$$

$$\cos = \frac{24}{26}\pi$$

Перепишем:

$$99 - 24\cdot\pi\cdot\frac{364}{24} = 198\pi^2$$

$$49 - \frac{6\cdot\pi\cdot 364}{78} = 99\pi^2$$

$$49 - 6\pi\cdot 28 = 99\pi^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из предыдущей решим квадратное уравнение

$$99n^2 + 6 \cdot 28n - 49 = 0$$

$$D = (6 \cdot 28)^2 - 49 \cdot 4 \cdot 99$$

$$= 3^2 \cdot 28^2 \cdot 7^2 - 7^2 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$= 4^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2$$

$$= 4^2 \cdot 7^2 \cdot (7^2 - 4 \cdot 11) =$$

$$= (4 \cdot 3 \cdot 7)^2 \cdot (40)$$

$$= 84^2 \cdot 4 \cdot 10$$

По теореме

$$n_{1,2} = \frac{-6 \cdot 28 \pm 42\sqrt{10}}{198}$$

$n > 0$ =>

$$n = \frac{-6 \cdot 28 + 42\sqrt{10}}{198}$$

$$n = \frac{-84 + 21\sqrt{10}}{99}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 предыдущая

$x = -28 + 2\sqrt{2}$

33

другая

$AB = \frac{24}{7} \frac{8}{11}$ (y -28)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

сделаем на сопряжение
и поделим левую
часть

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = a-b$$

ОДЗ $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0$

$b \geq 3$ $3x^2-6x+2 \geq 0$
$3x^2-3x+7 \geq 0$

$$\sqrt{3x^2-6x+9} - \sqrt{3x^2-3x+7} = 7-9x$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-6x+7-3x^2+3x-7}{\sqrt{3x^2-6x+7}+\sqrt{3x^2-3x+7}} = -2x \\ \sqrt{3x^2-6x+7} + \sqrt{3x^2-3x+7} \neq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+7} + \sqrt{3x^2-3x+7} = 0$$

$$7-9x=0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 предыдущее

если $1-9x=0$

$x=\frac{1}{9}$

$$\sqrt{3x^2-6x+7}+\sqrt{3x^2+3x+7}=$$

$$\sqrt{\frac{3\cdot 1}{81}-\frac{6}{9}+2}+\sqrt{\frac{3}{81}+\frac{3}{9}+1}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{27}-\frac{18}{27}+\frac{54}{27}}+\sqrt{\frac{3}{27}+\frac{6}{27}+\frac{27}{27}}$$

$$=\sqrt{\frac{37}{27}}+\sqrt{\frac{34}{27}}$$

>0 значит второй случай не может

$$\begin{cases}\frac{-9x+7}{\sqrt{3x^2-6x+7}+\sqrt{3x^2+3x+7}}=1-9x \\ \sqrt{3x^2-6x+7}+\sqrt{3x^2+3x+7}\neq 0\end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение

Либо

$$\sqrt{3x^2-6x+1} = \sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$1-9x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{9}$$

Зелёная зона

$$\sqrt{3x^2+3x+1} \geq \frac{1}{2}$$

попадут от $3x^2+3x+1 \geq \frac{1}{4}$

зелёная зона

$3x^2+3x+1 \geq 0$ $D = 9-12 = -3 < 0$

$A > 0$ ветви

вершина

подобен $3x^2+3x+1$

$-\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

плюс вершина $x = -\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение

теперь квадратный

на $3x^2 - 6x + 2$

$D = 36 - 24 = 12 > 0$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$

$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

~~Ответ $x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$~~

Ответ $x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$

по ОДЗ

Заметим что

$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} > -\frac{1}{2}$ а также

$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 3x^2 - 6x + 1 > 0$ при $x > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

только $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0$, что

$\sqrt{3x^2 - 6x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$ не может

быть равно 0 значит

$x < 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

-9-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 Неделимые

Пусть p — наименьший второй случай

$n \le 1 - \frac{1}{p}$

$1 - \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$

$p = 3$

$n \le 1 - \frac{1}{3}$ — делится при $n \ge 0$

$3n^2 + 3n + 1$

или $\sqrt{3n^2 + 3n + 1} \in \mathbb{Q}$

значит $n \le 0$

Рассмотрим случай $n \le 0$

от первого до $2n$

Будет делиться на $1 - 2n \ge$ подходит с большого деления

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 продолжение

Дано

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-3x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} + 1-3x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} + 1 - 3x$$

$$-2\sqrt{3x^2+3x+1} = -3x$$

$$2\sqrt{3x^2+3x+1} = 3x$$

по $x \geq 0$ значит

$3x \geq 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2+3x+1} \geq 0 \Rightarrow$

$2\sqrt{3x^2+3x+1} = 0 = 3x$

при $x = 3x^2+3x+1 = 1$

$2\sqrt{3x^2+3x+1} = 2$, что

не выполняется

значит $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} \neq$

Ответ: $x = 1$; удовлетворяет ОДЗ

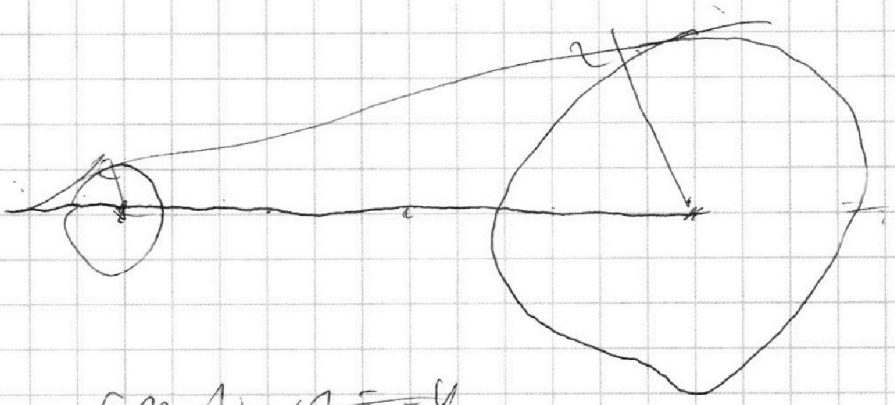
-11-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$-4ax + y + 8b = 0$$

$$-4a + 8b =$$

$$-4a + 8b = 0$$

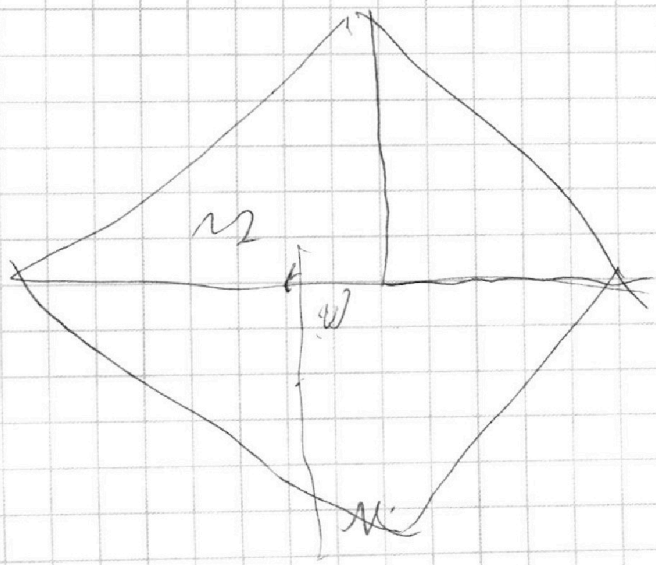
$$a = \frac{-8b}{4} \qquad a = -2b$$

$$-2bx + y + 8b = 0$$

$$165 - 45$$

$$120$$

$$(4^{23}0 + 3)^{125}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 продолжение

Заметим что
параллельные прямые
от заметим что
стороны параллелограмма
можно подобрать
нашему единичному
вектору
Для комплексных
для i-го будет
где z_k i-тая описывает
$-2(|i+3|+14-3i$
по отд
i-ое расстояние
от точки $0,i$
то это корень
уравнения
этой прямой

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

рассмотрим одну точку
на ленте, ей удовлетворяют
некоторые
точки

(x ; n+M)

летящие с на нулей
проведенной через нее
(n , (y+iy)) и (n+ΔΔ, y)
пост для двух
-2(n-x)+4y+n,+y,

пусть для одной
из точек
n, y, условие
выполнено и через
время t точка летящая на
нулей -2(n-n,)+4y+n,+y,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

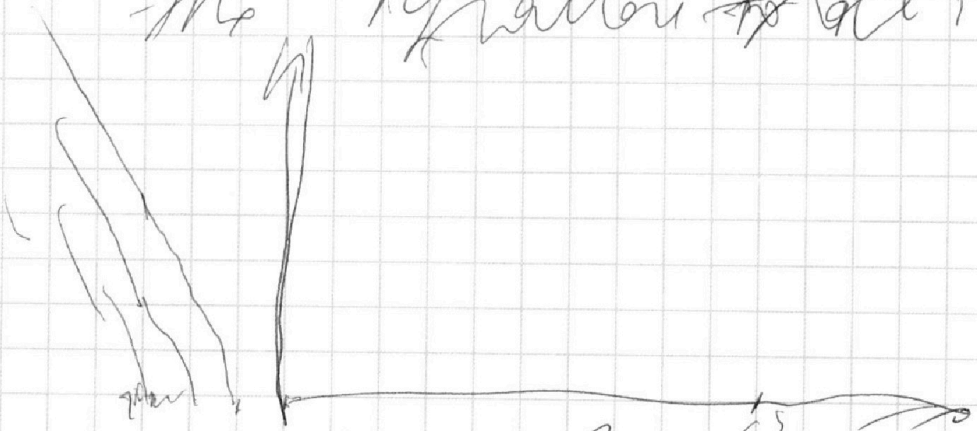
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 предметное

поле для каждой щелки
перпендикулярно
всей щели
удовлетворяющая поле
равно нулю
Кроме тех у
которых удовлетворяющая
их прямая входит
до проведя параллельно
границе
-ти пучками



для остальных
у которых есть пары -
почти тот же

14.3.14

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 продолжение

пон 14.3.14

теперь сделаем на 1 фиг и заметим, что
то тут ещё это прямая
которая мы не учли
(и аналогично
две прямые являются
парой. Когда
об две точки на эту
и прямую являются
парой, тогда
и имеем ввиду по
двум параллельным прямым



если взять любую
точку на 1 и любую
точку на 2 то эти
образуют одну все мы так
думаем

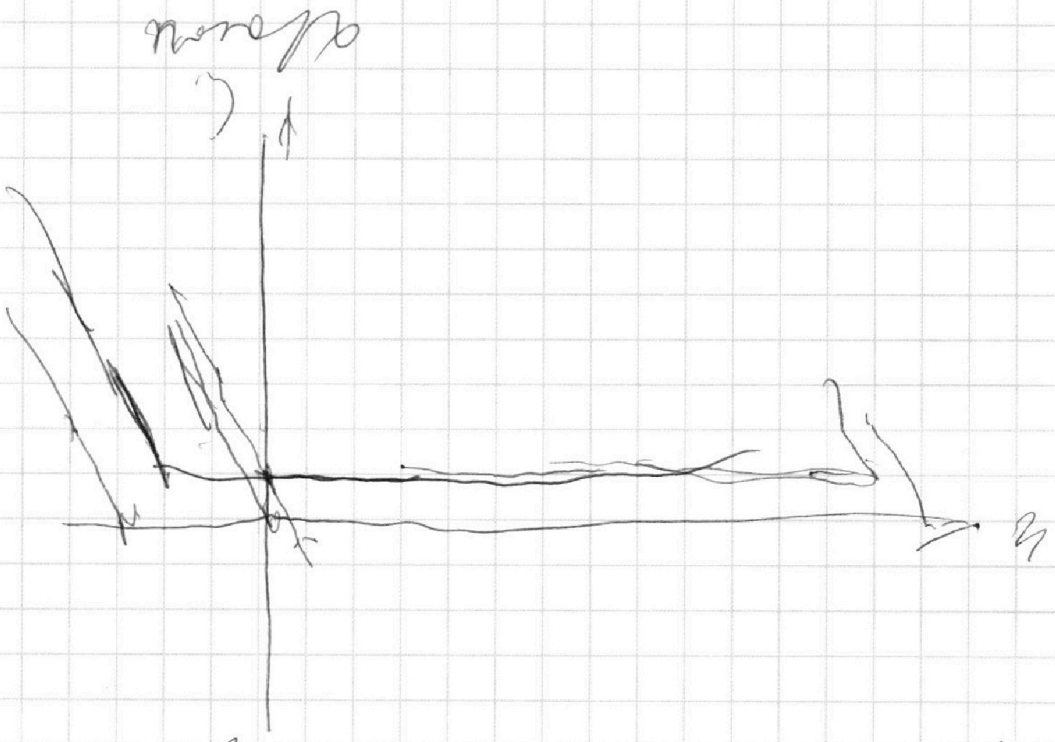
-2-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Нет, не есть потому что
если тело
по мелочи один
на бы и в итоге
на два пол
Увеличь туда пружину
еще
и получим $1 \cdot 12 \cdot \pi$
$= 144$

-72

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 продолжение

Найдем все пар

~~14·3-2~~ $14^2 \cdot 3$ тп =

= 340

Ответ: 340 пар точек

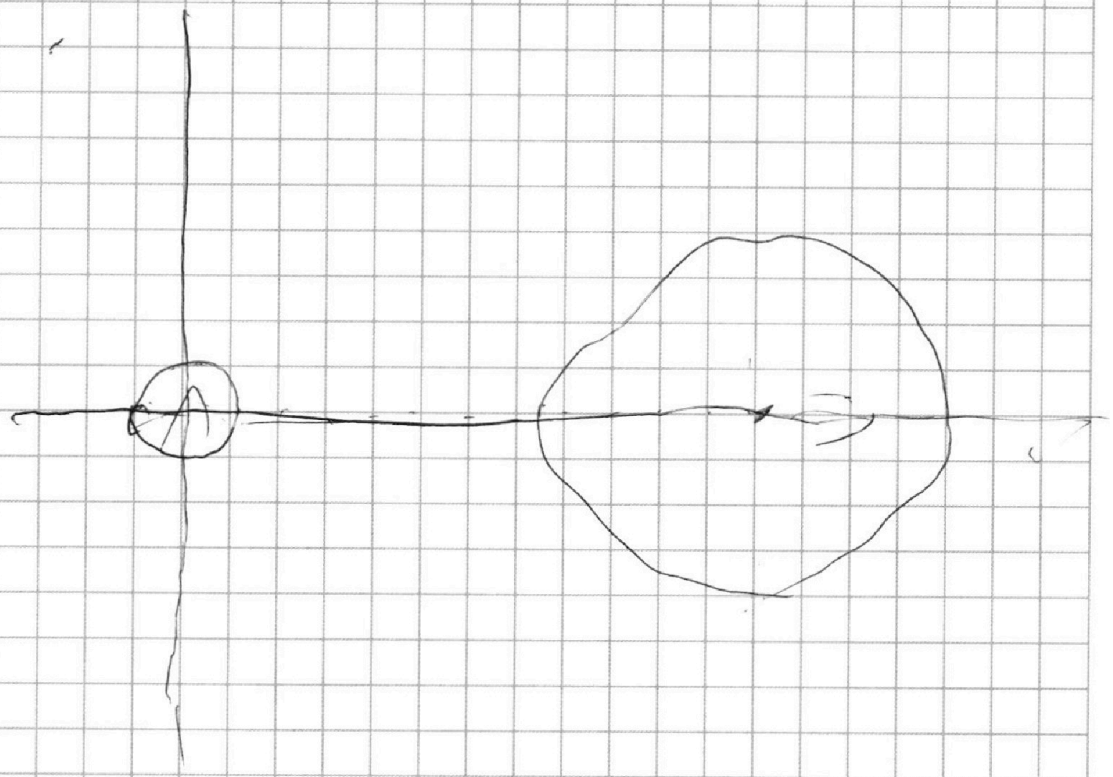
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 задача

Точки в области

Точки области

A и B

(x^2+y^2-1) и $x^2+(y-1)^2-1$

имеют разные знаки

Тогда они лежат

в области A и B

$(x^2+y^2-1 \mid (x^2+(y-1)^2-16) \le 0$

прямая $ax+y-8b$

делит области

на части и будет

иметь Золотые

что при прямой

имеют пересечение

только в одной точке или

в бесконечности

Точки $ax+y-8b$ – общие

касательные этих окружностей

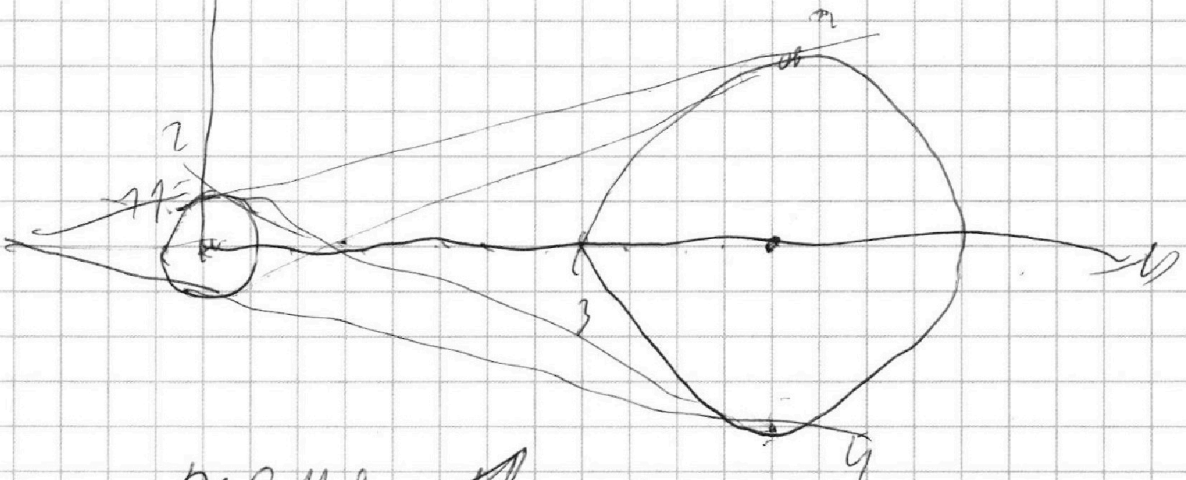
– 13 –

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть A делит
$[0;1]$, $[A;4]$
значит она проекция
и $[0;A]$ точек
$(0;0)$ окружности
и прямая $x+y$

$x+y=a$ $x+y-8b$

$x^2+y^2-8b=1$ x^2+y^2-8b-1

$x=0$

$y^2-8b-1=0$

$y=-2b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 продолжение

прямая

проходит $(-4, 0)$ $(0, 1)$

$$\begin{cases} -4a + 0 - 8b = 0 \\ 1 - 8b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a - 8b = 0 \\ 8b = 1 \end{cases}$$

$-4 \quad b = \frac{1}{8}$

$a = -\frac{1}{4}$

Вторая прямая

имеет вид

проходит $(-4, 0)$ $(0; -1)$

$$\begin{cases} -4a + 0 - 8b = 0 \\ -1 - 8b = b \end{cases}$$

$-4a = 1 \quad b = -\frac{1}{8}$

$a = \frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 предметы

стоят две точки

$n = 3$

они прошли

через $\frac{n}{5}$ или $(\frac{n}{5}, 0)$

другая через 2

$(\frac{12}{5}, 0)$ $(0, 1)$

$\frac{a \cdot 12}{5} + 0 - 8b = 0$

$1 - 8b = 0$ $\quad b = \frac{1}{8}$

$a = \frac{5}{12}$

другая через

$(\frac{12}{5}, 0)$ $(0, -1)$

$\frac{a \cdot 12}{5} + 0 - 8b = 0$

$-1 - 8b = 0$ $\quad b = -\frac{1}{8}$

$a = -\frac{5}{12}$

Ответ: $(a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{8})$ $(a =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 продолжение.

ответ: ~~$a = \frac{2}{\pi}$~~

$\left(a = -\frac{2}{\pi}, \quad b = \frac{2}{3}\right)$

$\left(a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{2}{\pi}\right)$

~~$\left(a = \frac{8}{\pi^2}\right)$~~

$\left(a = \frac{5}{\pi}, \quad b = \frac{2}{3}\right)$

$\left(a = -\frac{5}{\pi}, \quad b = -\frac{2}{3}\right)$

~~только~~ 1 и 4 прод

через точку $(-4, 0)$

не касательная 2, 3

проходят через точку

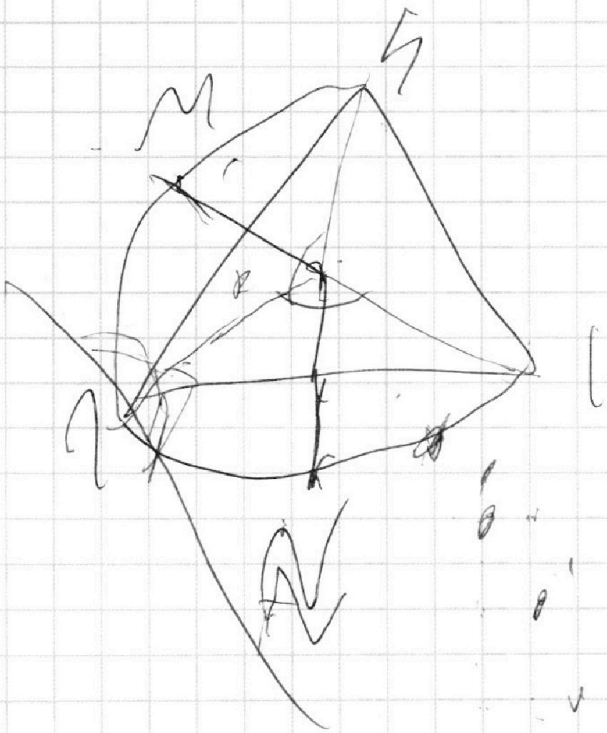
$\left(\frac{\pi}{5}, 0\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7 продолжение

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \qquad b^2 - c^2$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 2{,}5^2$$

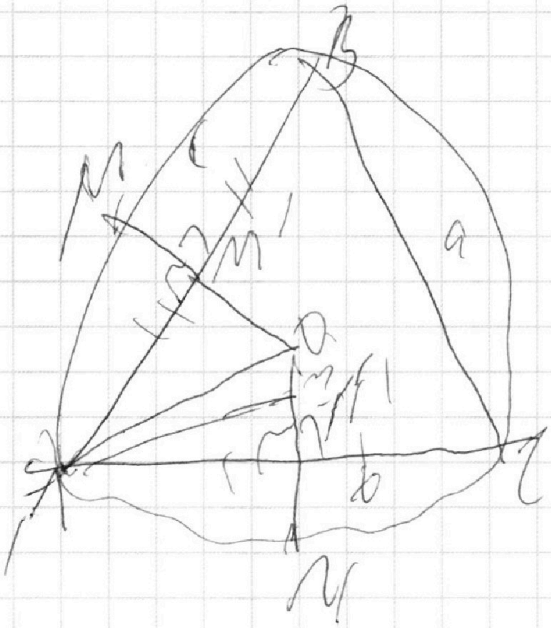
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



O - центр описанной окружности

пусть R - радиус

$OM' = R - 5$

$ON' = R - 7{,}5$

пусть также сторона треугольника $AC = b$

r - радиус вписанной окружности

тогда $AO_1 = r^2$ O_1 - точка вписанной окружности

$p = \frac{a+b+c}{2} = 30$ $(p-a)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AB = 2^{15} \cdot 3^{11}$

$BC = 2^{11} \cdot 7^{11}$

$AC = 2^{11} \cdot 3^{11}$

$AB \cdot BC \cdot AC = 2^{55} \cdot 3^{33}$

$\sqrt{2^{55} \cdot 3^{33}}$

$\frac{ABC}{2} = 2^{33} \cdot 3^{34}$

$a + b + c = 28$

$b + c = 22$

$a + c = 24$

$a + b = 26$

$a + b + c = 28$

$c = 12$

$a = 14$

$b = 16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~ab~~

(abc) дает $x^{55} \cdot y^{66}$

abc дает $x^{28} \cdot y^{34}$

abc $x^{28} \cdot y^{33}$

т.к.

$a = 11 \cdot 28$

$b = 5$

$c = 13$ 28

$a = 1$ $b = 2$

$\frac{5}{4 - 2 \cdot 2 - 1}$

$\frac{5}{4 - 1} = \frac{5}{45} = \frac{1}{5}$

$\frac{a+b}{a^2 - 3ab + b^2}$

~~a+b~~ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2 - 3ab$

$3ab$ дает ли 2

ab дает 11

$n = \text{HOK}(3ab; a+1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$3x^2+3x+1$

$D=9-12=-3$

$-\frac{6}{60}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$

$-\frac{8}{5}-\frac{3}{2}+1$

$\frac{3}{5}-\frac{6}{5}+1=-\frac{3}{5}+1=\frac{1}{5}$

$\frac{12}{6}:2,\ \frac{6}{6}=1$

$3-6+2=-1$

$36-24=12$

$\frac{6\pm\sqrt{12}}{6}$ ±1 $\frac{6\pm2\sqrt{3}}{6}=$

$=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$3\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+3\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+1=$

$=3\left(1+\frac{1}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+3-\sqrt{3}+1=8-2\sqrt{3}$

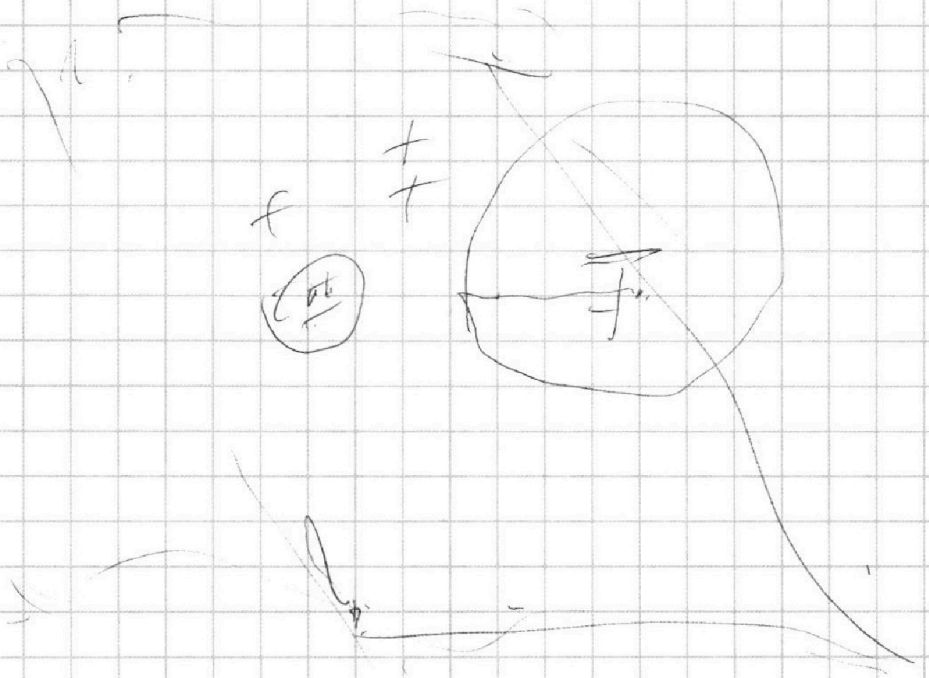
$=3+1-2\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y \geq 0 \quad y \leq q\,6$

$x \geq -\frac{y}{2}$

$x \leq 26 - \frac{y}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

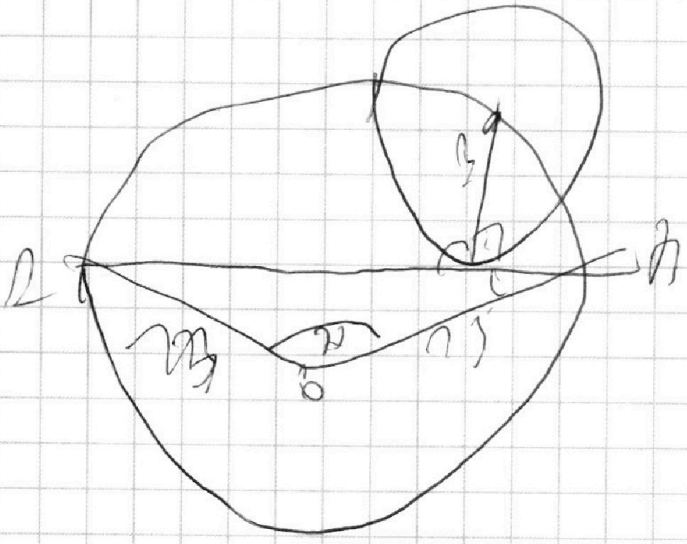
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [X] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



пусть $\angle AOB = 2\alpha$

$\angle AOB = 2\alpha$

$AO = 32$ $OB = 33$

точка $AB = 77$

$S = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 33 \sin 2\alpha = 77$

$\sin 2\alpha = \frac{77}{33}$

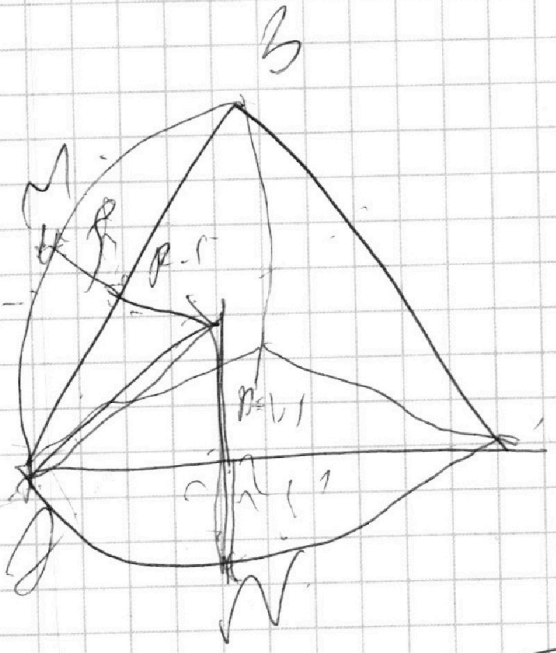
$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\phantom{1 - \frac{144}{169}}}$

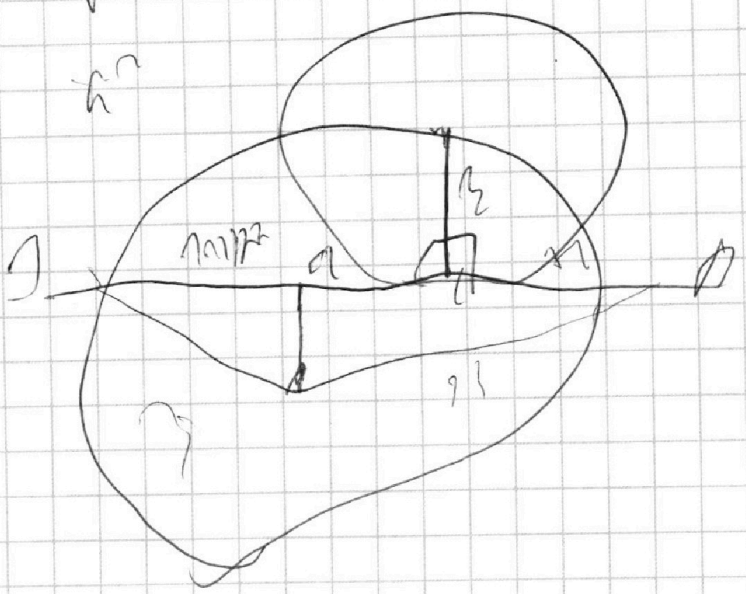
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

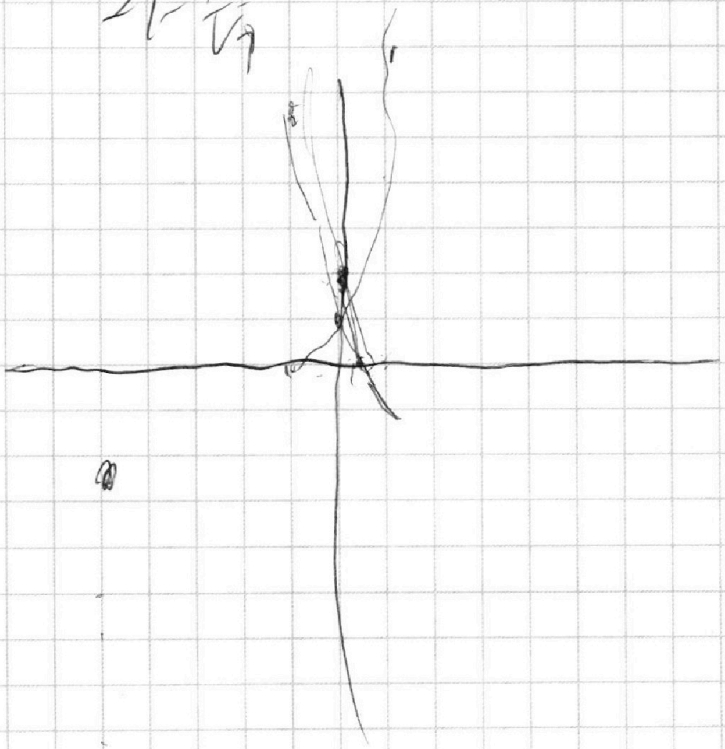
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 6\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 1 =$$

$$= 3 + 1 - \frac{6}{\sqrt{3}} - 6 + \frac{6}{\sqrt{3}} + 1 = 0$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

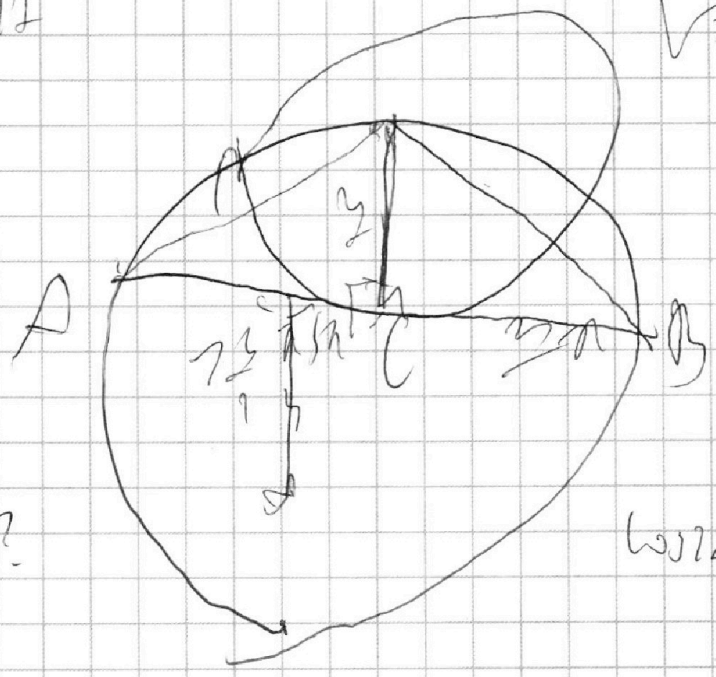
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☑ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

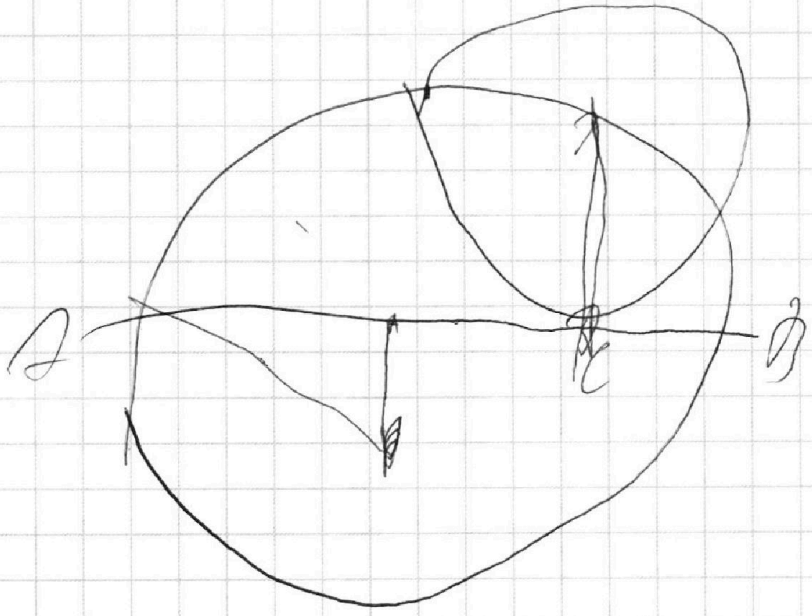
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$13^2-(12x)^2=169-144x^2$

$\sqrt{169-144x^2}+\frac{1}{2}+25x^2=169$

$169-144x^2+49+25x^2+2\sqrt{169-144x^2}\cdot\frac{1}{2}=169$

-169

$-144x^2+49+25x^2+2\sqrt{169-144x^2}\cdot\frac{1}{2}=0$

$24\sqrt{169-144x^2}=119x^2-49$

$\sqrt{169-144x^2}=\frac{119x^2-49}{24}$

$x^2=t$