



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



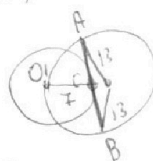
- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \quad O_1C = 7 \quad O_2O_1 = 13$$

- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓1

Как мы знаем, ab кратно $2^{15} \cdot 7^4$, $bc - 2^{17} \cdot 7^{12}$,

$ac - 2^{23} \cdot 7^{39}$. Пусть

$$\begin{cases} ab = x \cdot 2^{15} \cdot 7^4 \\ bc = y \cdot 2^{17} \cdot 7^{12} \\ ac = z \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases}$$

где x, y и z — неизвестные натуральные числа.

Перемножим все 3 уравнения:

$$ab \cdot bc \cdot ac = xyz \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$(abc)^2 = xyz \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{xyz} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34}$$

Чтобы abc было минимально (и

натурально из условия), $\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{2}$ должно
(так как остальные множители (2^{27} и 7^{34}) и так натуральны)
принимать наименьшее натуральное значение,

при котором x, y, z — натуральные числа,

то есть $\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{2} = 2$ (не может быть

$\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{2} = 1$, ведь тогда $xyz = \frac{1}{2}$, что неверно,

так $x, y, z \in \mathbb{N}$).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем

$$abc = (\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{z}) \cdot 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Ответ. $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$ — наименьшее возможное
значение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

У нас есть дробь $\frac{a+b}{a^2+b^2-2ab}$.

Ее числитель и знаменатель кратны m
(их наибольший общий делитель).

Представим их ^(каждый из них) как ~~то~~ произведение

m на какое-то число. Пусть

$$\begin{cases} a+b = xm \\ a^2+b^2-2ab = ym \end{cases}$$

где x, y — некоторые целые числа

$$\begin{cases} a = xm - b \\ (xm - b)^2 + b^2 - 2b(xm - b) = ym \end{cases}$$

$$x^2 m^2 + 9b^2 - 9xmb = ym$$

$$(xm)^2 + xm(-9b) + 9b^2 = ym$$

Мы получили функцию $ym = f(xm)$ — параболу.

Ее вершина находится в точке $-\frac{9b}{2 \cdot 1}$.

Это также максимальное значение xm ,

так коэффициент при старшей степени $(xm)^2$

положительный, ветвь параболы направлена

вниз.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Значит,

$$a + b = - \frac{-9b}{2 \cdot 1}$$

$$a + b = 4,5b$$

$$a = 3,5b$$

Подставим b нашу дробь:

$$\frac{3,5b + b}{(3,5b)^2 + b^2 - 7(3,5b \cdot b)} ;$$

$$\frac{4,5b}{-11,25b^2} ;$$

$$\frac{-18}{45b}$$

Наибольшее число, на которое мы
можем сократить числитель и знаменатель
полученной дроби - это 9. Мы получили
несократимую дробь $-\frac{2}{5b}$, а $m = 9$

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

$$\sqrt{\frac{8(6-2\sqrt{78})^2}{69 \cdot 69} - \frac{8(6-2\sqrt{78})}{69 \cdot 23} + \frac{138}{69}} = \sqrt{\frac{8(6-2\sqrt{78})^2}{69 \cdot 69} + \frac{8(6-2\sqrt{78})}{69 \cdot 23} + \frac{69}{69}} = 1 - \frac{8(6-2\sqrt{78})}{69 \cdot 23}$$

$$\sqrt{\frac{36 + 312 - 24\sqrt{78} - 138(6-2\sqrt{78}) + 138 \cdot 23}{69 \cdot 23}} = \sqrt{\frac{36 + 312 - 24\sqrt{78} + 69(6-2\sqrt{78}) + 69 \cdot 23}{69 \cdot 23}} = \frac{5 + 6\sqrt{78}}{23}$$

$$\sqrt{\frac{36 + 312 - 24\sqrt{78} - 138 \cdot 6 + 138 \cdot 2\sqrt{78} + 138 \cdot 23 - 36 - 312 + 24\sqrt{78} - 69 \cdot 6 + 138\sqrt{78} - 69 \cdot 23}{3}} = 5 + 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{\frac{1584 - 414 \cdot 3 + 138 \cdot 3\sqrt{78}}{3}} = 5 + 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{529 - 414 + 138\sqrt{78}} = 5 + 6\sqrt{78}$$

$$115 + 138\sqrt{78} = 25 + 36 \cdot 78 + 60\sqrt{78}$$

$$2718 = 78\sqrt{78}$$

$$453 = 13\sqrt{78}$$

неверно, $x \neq \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

Получается, $x = \frac{1}{9}$. ~~Вопрос~~

Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Сделаем замену переменных: пусть

$$3x^2 - 6x + 2 = a \quad \text{и} \quad 3x^2 + 3x + 1 = b,$$

при этом $a \geq 0$ и $b \geq 0$ (так как из

них можно извлечь корень). Тогда $1 - 9x = a - b$

Положим:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \\ 1 - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \\ 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{cases} *$$

Решим *:

$$1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$1 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{ab} = 1 - a - b$$

$$4ab = 1 + a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2ab$$

$$a^2 + a(-2 - 2b) + (b^2 - 2b + 1) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \frac{2 + 2b \pm \sqrt{4 + 4b^2 + 8b - 4b^2 + 8b - 4}}{2}$$

$$a = 1 + b \pm \frac{\sqrt{16b}}{2}$$

$$\begin{cases} a = 1 + b + 2\sqrt{b} \\ a = 1 + b - 2\sqrt{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = (\sqrt{b} + 1)^2 \\ a = (\sqrt{b} - 1)^2 \end{cases}$$

Получается, что:

$$\begin{cases} a = b \\ a = (\sqrt{b} + 1)^2 \\ a = (\sqrt{b} - 1)^2 \end{cases}$$

Заменяя a и b на $3x^2 - 6x + 2$ и $3x^2 + 3x + 1$
соответственно.

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ 3x^2 - 6x + 2 = (\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1)^2 \\ 3x^2 - 6x + 2 = (\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = (3x^2 + 3x + 1) + 1 \pm 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases} **$$

Решить **: :



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{3x^2} - 6x + 2 = \cancel{3x^2} + 3x + 1 + 1 \pm 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = \pm 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 69 \cdot 4}}{2 \cdot 69}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{138}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 16 \\ \hline 1104 \\ + 1104 \\ \hline 1248 \end{array}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

Проверка:

$$① x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{37}{81}} - \sqrt{\frac{37}{81}} = 0$$

$$0 = 0$$

Все верно, корни подходят

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(2) \quad x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 - 6 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} + 2} - \sqrt{3 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 + 3 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} + 1} =$$

$$= 1 - 9 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\sqrt{\frac{3(36 + 4 \cdot 78 + 24\sqrt{78})}{69 \cdot 69} - \frac{36(6 + 2\sqrt{78})}{69 \cdot 23} + \frac{138}{69}} - \sqrt{\frac{3(36 + 4 \cdot 78 + 24\sqrt{78})}{69 \cdot 69} + \frac{3(6 + 2\sqrt{78})}{69 \cdot 23} + \frac{69}{69}} =$$

$$= \frac{69}{69} - \frac{3(6 + 2\sqrt{78})}{69 \cdot 23}$$

$$\sqrt{\frac{36 + 312 + 24\sqrt{78}}{23 \cdot 69} - 69 \cdot 2 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} + 138 \cdot 23} - \sqrt{\frac{36 + 312 + 24\sqrt{78} + 69(6 + 2\sqrt{78}) + 69 \cdot 23}{69 \cdot 23}} =$$

$$= \frac{23 \cdot 69 - (18 + 6\sqrt{78})}{23}$$

$$\sqrt{\frac{348 + 24\sqrt{78} - 138 \cdot 6 - 276\sqrt{78} + 3174}{3}} - \sqrt{\frac{348 + 24\sqrt{78} + 69 \cdot 6 + 138\sqrt{78} + 1587}{3}} =$$

$$= 5 - 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{\frac{348 + 24\sqrt{78} - 138 \cdot 6 - 276\sqrt{78} + 3174 - 348 - 24\sqrt{78} - 138 \cdot 3 - 138\sqrt{78} - 1587}{3}} =$$

$$= 5 - 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{\frac{1587 - 138 \cdot 9 - 138 \cdot 3\sqrt{78}}{3}} = 5 - 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{529 - 414 - 138\sqrt{78}} = 5 - 6\sqrt{78}$$

$$115 - 138\sqrt{78} = 25 + 36 \cdot 78 - 60\sqrt{78}$$

$$2718 = -78\sqrt{78}$$

неверно. $x \neq \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



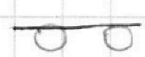
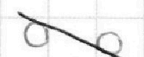
а) Дана
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 4^2 \end{cases}$$

решения будут находиться
внутри и на окружности (2)

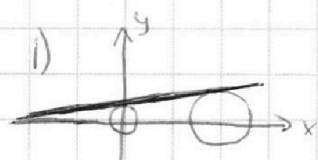
б) Дана
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 4^2 \end{cases}$$

решения будут находиться
внутри и на окружности (3)

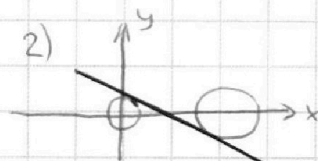
Чтобы решение было два при объединении
решений а) и б) и пересечении с прямой,
прямая должна касаться каждой из окружностей.
Всего возможно 4 случая:

(примерные схемы: 1)  2)  3)  4) 

найдем соответствующие a и b .

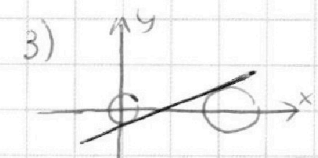


~~$y = kx + b$~~
$$\begin{cases} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

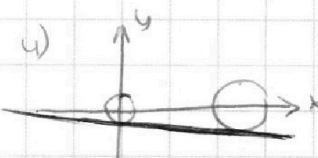


$$\begin{cases} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ x \in [-4; 4] \\ y \in [-1; 1] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$



4)
$$\begin{cases} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + a^2x^2 + b^2 - 2abx = 1 \end{cases}$$



$$x^2(1+a^2) + x(-2ab) + (b^2-1) = 0$$

$$x = \frac{2ab \pm \sqrt{4a^2b^2 - 4(1+a^2)(b^2-1)}}{2(1+a^2)}$$

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - b^2 + 1 - a^2b^2 + a^2}}{1+a^2} = \frac{ab \pm \sqrt{a^2 + 1 - b^2}}{a^2 + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

26

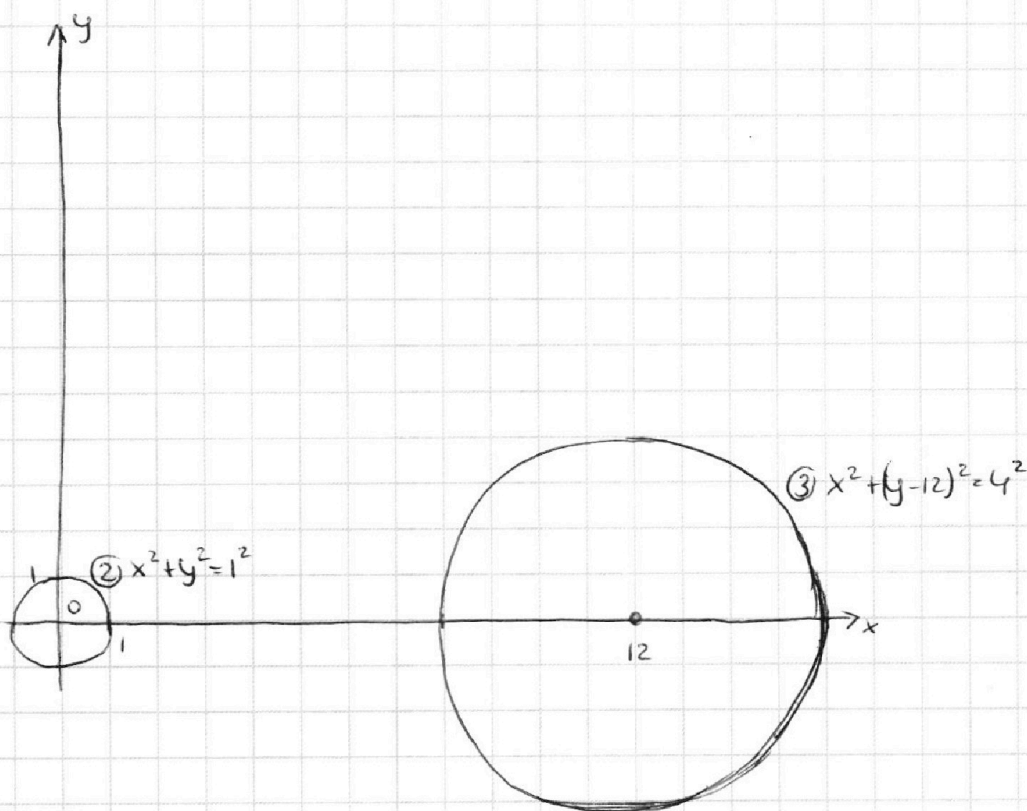
$$\begin{cases} ax+y-86=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 86 & \text{①} \\ x^2 + y^2 \leq 1^2 & \text{②} \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 4^2 & \text{③} \end{cases}$$

① - президиум

② и ③ - оцрусности

Изображения $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ и $\textcircled{3}$ графически для $\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№

цель

Равные дуги заключают равные хорды,

значит, $AN = NC$, $AM = MB$.

MH_1 и NH_2 - высоты в равнобедренных

треугольниках (из вершин), а значит, они

являются медианами. Если продлить MH_1 и NH_2

до пересечения, получим точку O , $MH_1 \cap NH_2 = O$,

где O - центр описанной около $\triangle ABC$ окружности,

ведь MH_1 и NH_2 - серединные перпендикуляры $\triangle ABC$.

(MH_1 - расс. от M до AB ,

NH_2 - расс. от N до AC)

$MH_1 = 5$; $NH_2 = 2,5$

AH_1, OH_2 можно вписать в окр.

(так $\angle AH_1O + \angle AH_2O = 180^\circ$)

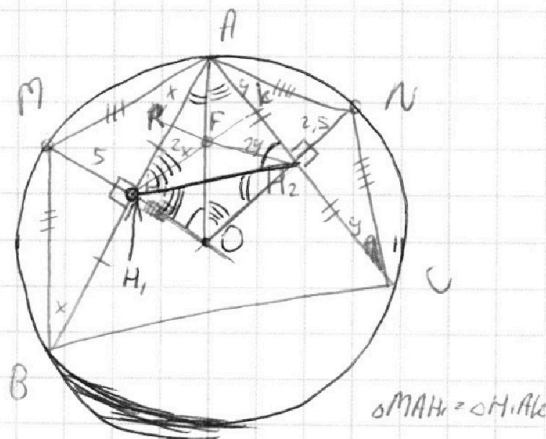
$\Rightarrow \angle AON = \angle AH_1H_2 = 2\angle ACN$ (центральный угол)

$\angle AOM = \angle AH_2H_1 = 2\angle MBA$

$\Rightarrow$ проведем биссектрисы $\angle AH_1H_2$ и $\angle AH_2H_1$, образующие

углы, равные соответственно $\angle ACN$ и $\angle MBA$

$AH_1H_2 \sim \triangle ABC$ с $k=2$, так $AH_1 = \frac{1}{2}AB$, $AH_2 = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \frac{AF}{AH_1} = \frac{1}{2}$



MAH_1 и NAH_2
параллельны.

$\angle F = 2\angle AF$



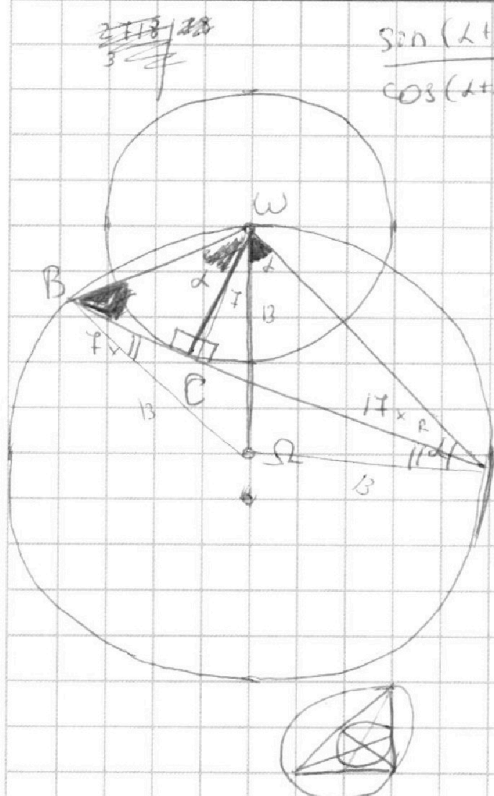
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$WC = 7$$

$$OW = 13$$



$$\angle WOA = 180 - \alpha - \beta$$

$$\angle WBA = \frac{\angle WOA}{2} = 90 - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\angle BWC = 90 - \angle WBA = 90 - \frac{90 - \alpha}{2} = \frac{90 + \alpha}{2}$$

$$\frac{90 - \alpha}{2} + \beta = \frac{90 + \alpha}{2} + \gamma \Rightarrow \frac{180 - 90 + \alpha}{2} = \frac{90 + \alpha}{2}$$

$$\gamma = 90 - \alpha - \beta \quad \text{tg} 45 + 45 = \text{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$R = \alpha - \beta$$

$$\text{tg} 30 + 30 = \text{tg} 30 \cdot \text{tg} 60$$

$$\frac{90 - \alpha}{2} + \beta = \frac{90 + \alpha}{2} + 90 - \alpha - \beta$$

$$\frac{90 - \alpha - 90 + \alpha}{2} = 90 - 2\alpha$$

$$-\alpha = 90 - 2\alpha$$

$$\alpha = 90$$

$$\text{tg}(\alpha + \gamma) = \frac{17x}{h}$$

$$\angle BWA = 180 - 2\alpha$$

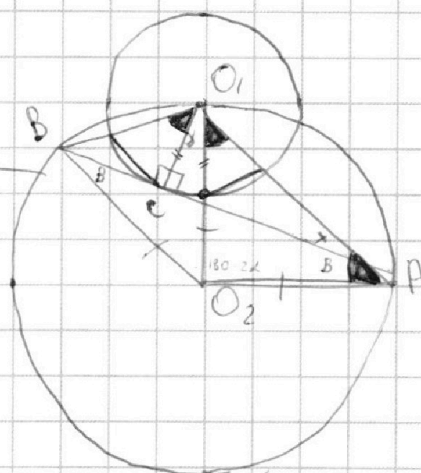
$$\angle WBA = \frac{\angle BWA}{2} = 90 - \alpha \quad \text{tg}(\alpha + \gamma) = \frac{\text{tg} \alpha}{17}$$

$$\angle BWC = 90 - \angle WBA = \alpha$$

$$\beta + (90 - \alpha) = \alpha + (90 - (180 - (180 - 2\alpha) - \beta))$$

$$\beta + 90 - \alpha = \alpha + 90 - 2\alpha + \beta$$

$$\alpha + 2\alpha + \beta = 180$$



$$\beta + 90 - \alpha = \alpha + (90 - (180 - 2\alpha - \beta + x))$$

$$x = 180 - 90 - \beta - 190 - (180 - 2\alpha - \beta + x)$$

$$2x = 90 - \beta - 90 + 180 - 2\alpha - \beta + x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = xm$$

$$a = xm - b$$

$$(a+b)^2 - 9ab = ym$$

$$(xm)^2 + b^2 - 2xmb + b^2 - 9b(xm - b) = ym$$

$$9b^2 + xm(xm - 9b) - ym = 0$$

$$(xm)^2 + xm(-9b) + (9b^2 - ym) = 0$$

xm - парабола

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ \times 3,5 \\ \hline 175 \\ + 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$xm = \frac{9b \pm \sqrt{81b^2 - 36b^2 + 4ym}}{2} = \frac{9b \pm \sqrt{45b^2 + 4ym}}{2}$$

$$xm = \frac{9b \pm \sqrt{45b^2 + 4a^2 + 4b^2 - 28ab}}{2}$$

$$xm = \frac{9b \pm \sqrt{(7b-2a)^2}}{2}$$

$$xm = \frac{9b \pm |7b-2a|}{2}$$

$$xm = \frac{9b \pm (7b-2a)}{2} = \frac{6(9 \pm 7)}{2} \pm \frac{2a}{2} = 6(4,5 \pm 3,5) \pm a$$

$$\text{Верши: } -\frac{-9b}{2} = 4,5b$$

$$4,5b = a + b$$

$$a = 3,5b$$

$$\frac{-4,5}{16,2} = -\frac{18}{45b}$$

$$\begin{array}{l} 8b+a \\ 8b-a \\ b+a \\ b-a \end{array}$$

$$a, b = 6, b-a$$

$$m \cdot x = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$-\frac{18}{45b} : 9 = -\frac{2}{5b}$$

O₂-y. Внут.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = a \geq 0 \quad 1 + \frac{3(6 + 2\sqrt{78})}{69 \cdot 23} = \frac{23 + 6 + 2\sqrt{78}}{12 \cdot 23} = \frac{29 + 2\sqrt{78}}{276}$$

$$1 - 9x = b \quad 3x^2 - 6x + 2 = b \geq 0 \quad 2 - \frac{36 + 12\sqrt{78}}{69 \cdot 23} = \frac{46 - 12 - 4\sqrt{78}}{23} = \frac{34 - 4\sqrt{78}}{23}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad \sqrt{b} - \sqrt{a} = b - a$$

$$b - a = b^2 + a^2 - 2ab \quad b + a - 2\sqrt{ab} = b^2 + a^2 - 2ab$$

$$a^2 + a(1 - 2b) + (b^2 - b) = 0 \quad b + a + 2ab - b^2 - a^2 = 2\sqrt{ab}$$

$$a = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{1 + 4b^2 - 4b - 4b^2 + 4b}}{2} \quad \sqrt{b} - \sqrt{a} = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$$

$$a = \frac{2b - 1 \pm 1}{2} \quad (\sqrt{b} - \sqrt{a})(1 - \sqrt{b} - \sqrt{a}) = 0$$

$$a = b - \frac{1 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} \sqrt{b} = \sqrt{a} \\ 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{cases}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 2 - \frac{1 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} a = b \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

$$9x = 1 - \frac{1 \pm 1}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ 1 - a - b = 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

$$* \quad 1 + a^2 + b^2 + 2ab - 2a - 2b = 4ab$$

$$a^2 + a(-2 - 2b) + (b^2 - 2b + 1) = 0$$

$$a^2 + a(-2 - 2b) + (b - 1)^2 = 0$$

$$(a^2 - 2a(1 + b) + (b - 1)^2 = 0)$$

$$a = \frac{2 + 2b \pm \sqrt{4 + 4b^2 + 8b - 4b^2 - 4 + 8b}}{2}$$

$$a = 1 + b \pm \frac{\sqrt{16b}}{2} = 1 + b \pm \frac{4\sqrt{b}}{2} = 1 + b \pm 2\sqrt{b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc \cdot 2^{12} \cdot 7^{18}$$

$$ac \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\left. \begin{array}{l} ab \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc \cdot 2^{12} \cdot 7^{18} \\ ac \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \end{array} \right\} \times a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = 7^{34} \cdot 2^{18} \quad (\text{так как } \text{натур.})$$

$\min abc$

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} =$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$a+b$ кратно m

$$a^2+b^2+ab : m$$

$$= \frac{x}{(a+b)^2-9ab} + \frac{y}{(a+b)^2-9ab}$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2-9ab : m \end{cases}$$

$$\frac{x(a+b)}{(a+b)^2} + \frac{y}{9ab}$$

$$\begin{cases} -9ab : m \\ a+b : m \end{cases}$$

$$(a+b)$$

$$y : -9ab$$

$$\begin{cases} a+b = xm : 2 \\ -9ab = ym : 9 \end{cases}$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad -(a+b)^3 9ab = -9ab((a+b)^2-9ab)x + y(a+b)^2(a^2+b^2-7ab)$$

$$a = xm - b$$

$$(a+b)^2(9a^2b+9ab^2+y(a^2+b^2-7ab)) = 9ab(a^2+b^2-7ab)$$

$$x = \frac{(a+b)^2(9a^2b+9ab^2+y(a^2+b^2-7ab))}{9ab(a^2+b^2-7ab)}$$

$$-9xm + 9b^2 = ym$$

$$9b^2 - 9b xm - ym = 0$$

$$b = \frac{9xm \pm \sqrt{81x^2m^2 + 36ym}}{18} = \frac{9xm \pm 3\sqrt{9x^2m^2 + 4ym}}{18} \in \mathbb{N}$$

$$xm : 2 \quad \sqrt{9x^2m^2 + 4ym} : 6$$

$$xm : 2$$

$$ym : 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

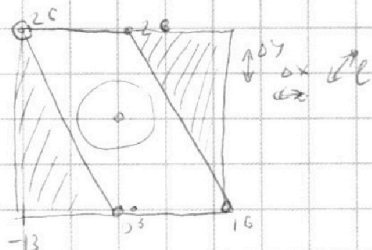
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \times 2 \Rightarrow 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

$$2\Delta x + \Delta y = 14$$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = l^2$$

$$\Delta y = 14 - 2\Delta x$$

$$\Delta x^2 + 196 + 4\Delta x^2 - 56\Delta x = l^2$$

$$l^2 = 5\Delta x^2 - 56\Delta x + 196$$

l - радиус окруж.

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

2 реш.

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

