



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓1
Пусть $a = 2^{x_a} \cdot 7^{y_a} \cdot d_a$, $b = 2^{x_b} \cdot 7^{y_b} \cdot d_b$, $c = 2^{x_c} \cdot 7^{y_c} \cdot d_c$, где $x_a, b, c, y_a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
и $d_a, b, c \in \mathbb{N}$: $d_a, b, c \perp 2, 7$. Имеем:

$$\begin{cases} x_a + x_b \geq 15 \\ x_b + x_c \geq 17 \\ x_c + x_a \geq 23 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{x_a + x_b + x_c}^{x_s} \geq \frac{1}{2}(15 + 17 + 23) = 27,5 \Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq 28, \text{ т.к. } x_a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ и 2-простое}$$

$$\begin{cases} y_a + y_b \geq 11 \\ y_b + y_c \geq 18 \\ y_c + y_a \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{y_a + y_b + y_c}^{y_s} \geq \frac{1}{2}(11 + 18 + 39) = 34. \text{ По аналогии } \begin{cases} y_b \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ y_c + y_a \geq 39, y_s \geq 39. \end{cases}$$

$$abc = 2^{x_s} \cdot 7^{y_s} \cdot d_a \cdot d_b \cdot d_c \geq 2^{x_s} \cdot 7^{y_s} \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \text{ (т.к. } d_a, b, c \in \mathbb{N})$$

Пусть $a = 2^{11} \cdot 7^{16}$, $b = 2^5 \cdot 7^0$, $c = 2^{12} \cdot 7^{23}$. Тогда $ab = 2^{16} \cdot 7^{16} : 2^{15} \cdot 7^{11}$, $bc = 2^{17} \cdot 7^{23} : 2^{17} \cdot 7^{18}$,
 $ca = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$. При этом $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ — наименьшее возможное значение достигается.

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Ищем:

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b \equiv m \\ a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab \equiv m \\ m, a, b \in \mathbb{N} \\ a \perp b \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m, a, b \in \mathbb{N} \\ a+b \equiv m \\ 9ab \equiv m \\ a \perp b \end{array} \right.$$

Покажем, что $a \perp b$ и $a+b \equiv m$ $\Rightarrow$ $9ab \equiv m$. Пусть a и b имеют общий делитель $d > 1$ с m , т.е. тогда $a \nmid b$. Предположим НЧД a и m имеют общий делитель d . Тогда $a \perp b \Rightarrow b \perp d \Rightarrow a+b \perp d \Rightarrow a+b \equiv m$, противоречие. Итак, $a, b \perp m$.

$$\left\{ \begin{array}{l} m, a, b \in \mathbb{N} \\ a+b \equiv m \\ a, b \perp m \\ 9ab \equiv m \\ a \perp b \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m, a, b \in \mathbb{N} \\ a+b \equiv m \\ a, b \perp m \\ g \equiv m \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow m \leq 9.$$

Пусть $a=4, b=5, m=9$. Тогда $a, b, m \in \mathbb{N}$; $a+b \equiv m$; $a^2 - 7ab + b^2 = 16 - 140 + 25 = -99 \equiv m$; $a \perp b$. Наибольшее возможное значение m достигнуто.

Ответ: ~~111~~ 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

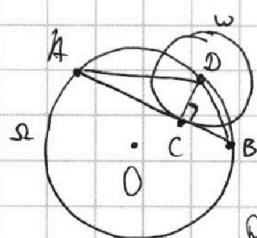
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{3}$ 

$$AC:CB = \frac{17}{7}$$

$$R_{11} = 7 = DC = r$$

$$R_0 = 13 = OA = OD = OB = R$$

$$AB = 9$$

Penyelesaian: Dik. $AC = 17\text{g}$, $BC = 7\text{g}$. Jaga $BD = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{49 + 49a^2} = 7\sqrt{1+a^2}$.

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{49 + 17^2 a^2}. \text{ In } \triangle ABD, \frac{AD}{\sin \angle ABD} = 2R. \sin \angle ABD = \frac{DC}{DB}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{AD \cdot BD}{DC} = \frac{\sqrt{49+17^2 a^2} \cdot 2\sqrt{1+a^2}}{7} = \sqrt{49+17^2 a^2} \cdot \sqrt{1+a^2} = \sqrt{17^2 a^4 + (17^2 + 49)a^2 + 49} \quad \text{--- (2)}$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 = 4 \cdot 13^2 = 4 \cdot 169 = 676 = 289a^4 + 338a^2 + 49 \Leftrightarrow 289x^2 + 338x - 627 = 0, \text{ где } x = a^2. \text{ Тогда}$$

$$x = \frac{-338 + \sqrt{338^2 + 4 \cdot 627 \cdot 289}}{2 \cdot 289} = \frac{-169 + \sqrt{169^2 + 827 \cdot 289}}{289} = \frac{-169 + \sqrt{28561 + 181203}}{289}$$

$$= \frac{-169 \pm \sqrt{289764}}{289} = \frac{-169 \pm 2\sqrt{52441}}{289} = \frac{-169 \pm 2 \cdot 229}{289} = 1 \Rightarrow a = 1, \text{ т.к. } x = a^2 \text{ и } a > 0.$$

Поскольку $AC=17a$, $BC=7a$, $AB=24a=24$

Oct 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{4}$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \Leftrightarrow \sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z, \text{ где } y = 3x^2 + 3x + 1, z = 1 - 9x.$$

Решим случай I: Заметим, что $y = 3x^2 + 3x + 1 > 0$, т.к. $D = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0$ и старший коэффициент > 0 .

I. $z \geq 0$ (покажем $y > 0$)

$$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z \Leftrightarrow y+z = y + z^2 + 2\sqrt{y} \cdot z \Leftrightarrow z = z(z + 2\sqrt{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ 2\sqrt{y} = 1-z \end{cases} \text{ Решим } 2\sqrt{y} = 1-z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \leq 1 \\ 4y = (1-z)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1-9x \leq 1 \\ 12x^2 + 12x + 4 = 1 - 18x + 81x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 69 + 4 \cdot 69 \cdot 4}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 9 + 4 \cdot 69}}{69} = \frac{2}{69} (3 \pm \sqrt{78}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ x = \frac{2}{69} (3 + \sqrt{78}), \text{ т.к. } \sqrt{78} > 8 > 3. \end{cases}$$

Проверим $x \leq \frac{1}{9}$. $\frac{2}{69} (3 + \sqrt{78}) \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 18(3 + \sqrt{78}) \leq 69 \Leftrightarrow 54 + 18\sqrt{78} \leq 69 \Leftrightarrow 18\sqrt{78} \leq 15 \Rightarrow \sqrt{78} < 1$.

Противоречие.

Итак, $\begin{cases} z=0 \\ 2\sqrt{y} = 1-z \end{cases} \Leftrightarrow z=0 \Leftrightarrow 1-9x=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$.

II $z < 0$ (покажем $y > 0$)

$$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z \Leftrightarrow \sqrt{t+k} - \sqrt{t} = k, \text{ где } t = y+z, k = -z > 0, t = y+z = 3x^2 - 6x + 2.$$

$$\sqrt{t+k} - \sqrt{t} = k \Leftrightarrow \begin{cases} t+k = t + k^2 + 2k\sqrt{t} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = k(k + 2\sqrt{t}) \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2\sqrt{t} = 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = (1-k)^2 \\ k \leq 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t = (1-k)^2 \\ k \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 - 24x + 8 = (2-9x)^2 = 81x^2 - 36x + 4 \\ 9x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{2}{9} \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{9} \\ x = \frac{2}{69} (3 + \sqrt{78}) \end{cases} \text{ (см. случай II)}. \text{ Проверим } x \leq \frac{2}{9}. \frac{2}{69} (3 + \sqrt{78}) \leq \frac{2}{9} \Leftrightarrow 9(3 + \sqrt{78}) \leq 69 \Leftrightarrow 27 + 9\sqrt{78} \leq 69 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{78} \leq 42 \Leftrightarrow \sqrt{78} \leq \frac{14}{3} \Leftrightarrow 78 \cdot 9 \leq 196 \text{ - неверно. Противоречие.}$$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{1}{9} \right\}$

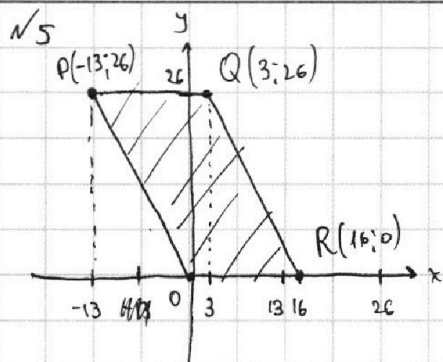
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим внутреннюю (включая границу) параллелограмм $OPRQ$ как I .

$$E = (x; y) \in I \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ 2x + y \geq 0 \\ 2x + y \leq 32 \end{cases}$$

Зафиксируем $A = (x_1; y_1) \in I$ и рассмотрим мн-во всех $B = (x_2; y_2) : 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$.

Значит, что это мн-во - прямая, параллельная QR , одна из точек которой отстоит от A на $+7$ в направлении x и на 0 в направлении y .

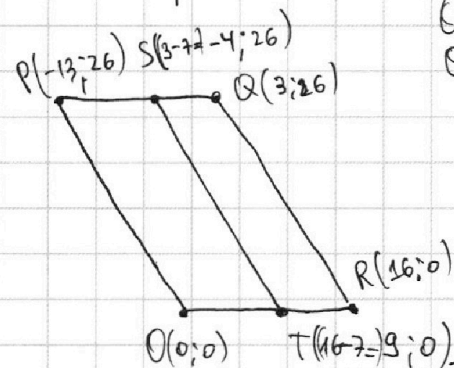
Обозначим внутреннюю (включая границу) параллелограмм $OPST$ как J .

Очевидно, если $A \in J$, и y_1 чётно, подходящих B

равно $\frac{26-0}{2} + 1 = 14$; если $A \in J$ и y_1 нечётно, подхо-

дящих B равно $(26-0+1) - 14 = 13$; если $A \notin J$, подхо-

дящих B нет.



Тогда пар $(A; B)$ равно $\underbrace{(x_s - x_p)}_{=9} \cdot \left(\underbrace{\left(\frac{26-0}{2} + 1 \right)}_{=14} \cdot 14 + \underbrace{\left((26-0+1) - \left(\frac{26-0}{2} + 1 \right) \right)}_{=13} \cdot 13 \right) = 9(14^2 + 13^2) =$

#положений A при фикс. x_1 и чётн y_1 #положений A при фикс. x_1 и нечётн y_1

$$= 9(196 + 169) = 9 \cdot 365 = 3285$$

Ответ: 3285

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓ 6

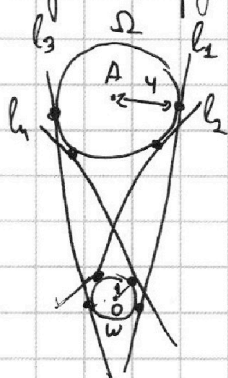
$$a = ? : \exists b \in \mathbb{R} : \exists \text{ ровно } 2 (x, y) : \begin{cases} ax + y - 8 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 4^2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \text{точка } (x, y) \text{ принадлежит ровно 1 из кругов } B_1 \text{ и } B_2, \text{ где } B_1 \text{ имеет центр } B(0, 0) \text{ и радиус } 1, B_2 \text{ имеет центр } B(0, 12) \text{ и радиус } 4.$$

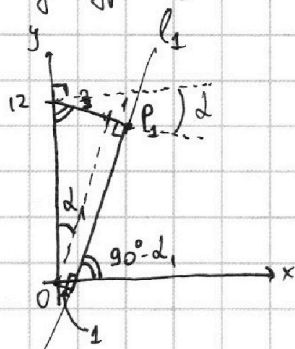
Очевидно, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Тогда "ровно 1" $\Leftrightarrow$ "хотя бы 1"

$ax + y - 8 = 0$ — ур-е прямой (A, b) . Тогда все (x, y) , являющиеся решением исходной системы охватывают пересечение прямой и совокупности двух непересекающихся кругов. Поскольку круги не пересекаются и пересечение прямой и круга содержит либо 0, либо 1, либо 2 точки, то, что спрашивают $\Leftrightarrow$ прямая $ax + y - 8 = 0$ касается B_1 и B_2 .

Обозначим окружности — радиусы B_1 и B_2 ω и Ω , соответственно. Ой, прямая проходит через центр $A(0, 12)$.



Находим ур-е l_1 .

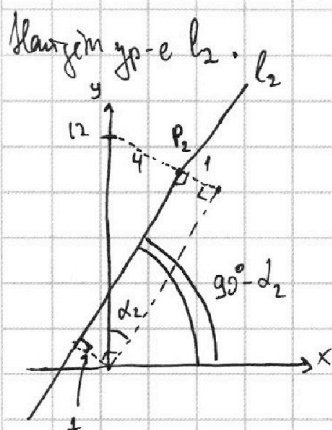


$$\sin \alpha_1 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}. \alpha_1 \in (0; 90^\circ) \Rightarrow \cos \alpha_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{1 + \sin^2 \alpha_1}{\sin \alpha_1} = \sqrt{15} = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha_1).$$

$$\text{Прямая проходит через } P_1 = (0 + 4 \cos \alpha_1, 12 - 4 \sin \alpha_1) = (\sqrt{15}, 11). l_1 \text{ вида } y = k_1 x + b_1; k_1 = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha_1) = \sqrt{15}. P_1 \in l_1 \Leftrightarrow 11 = \sqrt{15} \cdot \sqrt{15} + b_1 \Rightarrow b_1 = -4.$$

$$l_1: y = \sqrt{15}x + (-4) \Leftrightarrow -\sqrt{15}x + y - 8 = 0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{15} \text{ подходит}$$

Итак, $\{a = -\sqrt{15} \text{ подходит}\}$
Покажем, что l_3 симметрична отн. AB , т.е. $O(0,0)$ тоже подходит



Находим ур-е l_2 .

$$\sin \alpha_2 = \frac{5}{12}. \alpha_2 \in (0; 90^\circ) \Rightarrow \cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \frac{\sqrt{119}}{12}; \operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{1 + \sin^2 \alpha_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{119}}{5} = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha_2)$$

$$\text{Прямая проходит через } P_2 = (0 + 4 \cos \alpha_2, 12 - 4 \sin \alpha_2) = \left(\frac{\sqrt{119}}{3}, 12 - \frac{5}{3}\right)$$

Итак, что нужно найти такое b , что

$$l_2 \text{ вида } y = k_2 x + b_2 = \frac{\sqrt{119}}{5} x + b_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + \left(-\frac{\sqrt{119}}{5}\right)x + (-b_2) = 0. \text{ Итак, что нужно найти подходящее } b_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \text{ подходящее } b. a = -\frac{\sqrt{119}}{5} \text{ подходит. Аналогично, } a = \frac{\sqrt{119}}{5} \text{ подходит.}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ -\sqrt{15}; +\sqrt{15}; -\frac{\sqrt{119}}{5}; +\frac{\sqrt{119}}{5} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$a+b \nmid m; a^2 - 7ab + b^2 \nmid m. a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)(a+b) - 9ab.$$

$$\begin{cases} 9ab \nmid m \\ a+b \nmid m \\ m \rightarrow \max \\ a \perp b. \end{cases}$$

Пусть $m > 1$. Попробуем $a \perp b$

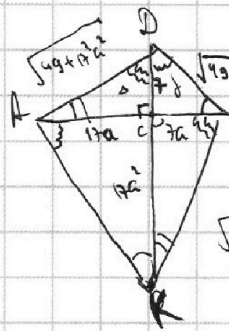
$$a+b \nmid m \Rightarrow a, b \nmid m.$$

$$\begin{aligned} 7g &= 9a \\ 7g &= 9a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \nmid m \\ a+b \nmid m \\ m \rightarrow \max \\ a \perp b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &181203 \\ &+ 28561 \\ \hline &209764 \end{aligned}$$

$$\frac{4+5}{16-7 \cdot 4 \cdot 5+25} = \frac{9}{-99}$$



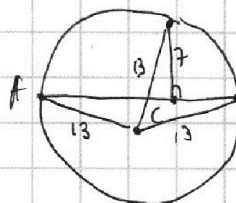
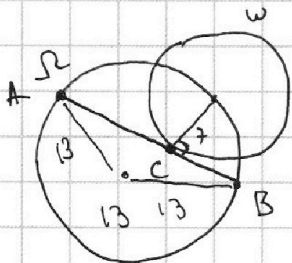
$$\sqrt{49+17a^2} + \sqrt{17a^2} = 2R$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$\begin{aligned} &17 \\ &119 \\ &17 \\ \hline &289 \\ &+ 49 \\ \hline &338 \\ &\times 50 \\ \hline &16900 \end{aligned}$$

$$338 \cdot (50-1) = 16900 - 338$$

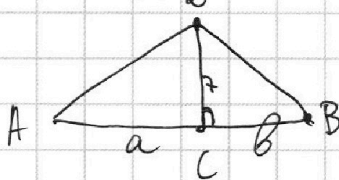
$$\begin{aligned} &16562 \\ &209764 \\ \hline &52441 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &17^2 = (20-3)^2 = 400 - 2 \cdot 3 \cdot 20 + 9 = 289 \\ &+ 49 \\ \hline &338 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 6 \cdot 5^5 = 2 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 5^7 \\ &15 \cdot 10^4 = 300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - a &= 0 \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} \frac{a}{x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \end{aligned}$$



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$R_0 = 13$$

$$\frac{AD}{DC} = 2R = \frac{AD \cdot DB}{7} \Rightarrow AD \cdot DB = 2 \cdot 13 \cdot 7 = 182$$

$$\frac{BD}{DC} = 2R = \frac{AD \cdot BD}{7} \Rightarrow AD \cdot BD = 2 \cdot 13 \cdot 7 = 182$$

$$AD \cdot DB = 182$$

$$\frac{AD^2 - 49}{BD^2 - 49} = \frac{17^2}{49}$$

$$xy = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$\frac{x-49}{y-49} = \frac{17^2}{49} \Leftrightarrow 49x - 7^4 = 17^2 y - 49 \cdot 17$$

$$\frac{a}{b} = \frac{17}{7} \Leftrightarrow a = \frac{17}{7} b$$

$$(a^2 + 49)(b^2 + 49) = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$\frac{17^2}{7^2} b^4 + 17^2 b^2 + 7^2 b^2 + 7^4 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$\begin{aligned} &17^2 b^2 + 49 \\ &17^2 b^2 + 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &289x^2 + 16562x \\ &\times 627 \end{aligned}$$

$$355 + \frac{209764}{710} < 355 + \frac{209764}{700} < 355 + \frac{210000}{720} = 355 + 300 = 655$$

$$\begin{aligned} &5643 \\ &5016 \\ \hline &1254 \\ &161203 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &17 \\ &17 \\ \hline &289 \\ &+ 49 \\ \hline &338 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &17 \\ &17 \\ \hline &289 \\ &+ 49 \\ \hline &338 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &17 \\ &17 \\ \hline &289 \\ &+ 49 \\ \hline &338 \end{aligned}$$



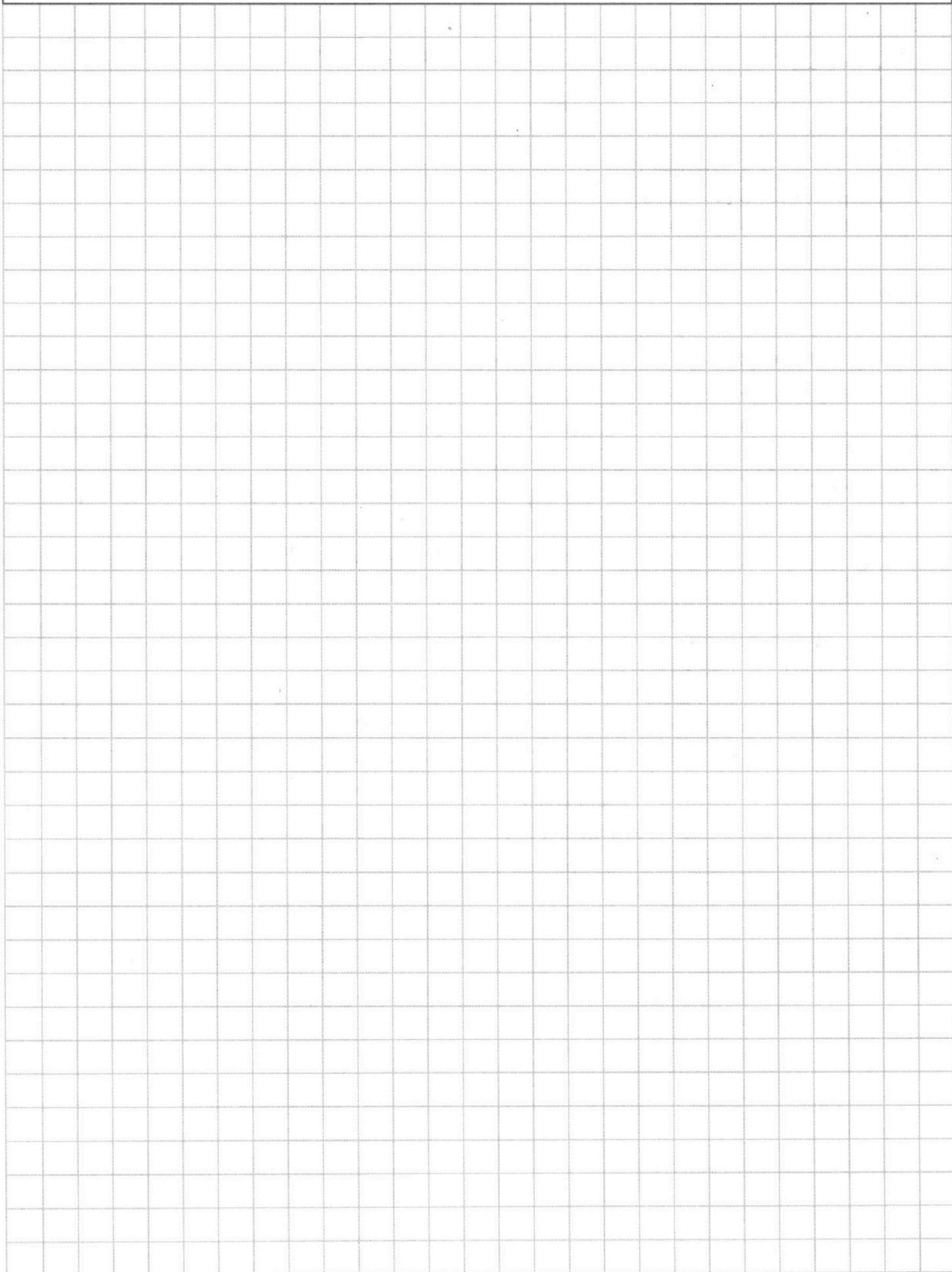
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 235 \\ \times 235 \\ \hline 705 \\ 470 \\ \hline 55225 \end{array}$$

$$x_3 = 117 + \frac{52441}{470} = 228$$

$$x_4 = 114 + \frac{52441}{456} = 114 + 115 = 229$$

$$\begin{array}{r} 52441 \overline{) 470} \\ 470 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$(230-1)^2 = 52900 - 460 + 1 = 52441$$

$$2 \cdot 229 = 458$$

$$\sin \left\{ \frac{\sqrt{5}}{4}; \frac{\sqrt{10}}{12} \right\}$$

$$s^2 + c^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$12 \cdot 2444 - 25 =$$

$$144 - 25 = 119$$

$$\frac{144-25}{144} = \frac{119}{144}$$

$$21 - 12 = 9$$

$$312 = 3 \cdot 104 = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 13$$

$$9 - 4 \cdot 3 \cdot 1$$

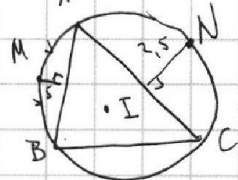
$$260 - 4 = 256$$

$$31^2 \cdot y + 7$$

$$0 \geq 9x - 1 \geq 1$$

$$y \leq 3x^2 + 3x + 1$$

$$\sqrt{y+1-9x} - \sqrt{y} = 1-9x$$



$$I. 1-9x \geq 0$$

$$1-9x \geq 2\sqrt{y(1-9x)} \Leftrightarrow 1-9x \geq 0$$

$$II. 1-9x \leq 0 \Leftrightarrow 9x - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{y} - \sqrt{y+(1-9x)} = 9x-1$$

$$1-9x$$

$$260 - 4 = 256$$

$$31^2 \cdot y + 7$$

$$0 \geq 9x - 1 \geq 1$$

$$\sqrt{y+(1-9x)} - \sqrt{y} = 1-9x \Leftrightarrow 2y+(1-9x)-2\sqrt{y}\sqrt{y+(1-9x)} = 1-9x$$

$$y \geq 0$$

$$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z \Leftrightarrow y+z = y+z^2+2\sqrt{y}\cdot z \Leftrightarrow z = z(z+2\sqrt{y}) \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = 1-z$$

$$129x \geq 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{5}$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36+4 \cdot 69}}{69} = \frac{6 \pm \sqrt{300}}{69}$$

$$y+z = z^2+y+2z\sqrt{y}$$

$$y^2 = 49 \cdot 4^2 \Rightarrow z = z(z+2\sqrt{y})$$

$$= 49 \cdot 196$$

$$z=0$$

$$2\sqrt{y} = 1-z$$

$$16 \cdot 69 = 87$$

$$4y = 81x^2$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$9 + 69 = 78$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 69 \cdot 4}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm \sqrt{36+69 \cdot 4}}{69}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{36+69 \cdot 4}}{69} = \frac{2}{69} \pm \sqrt{\frac{36}{69}}$$

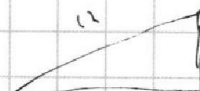
$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 2 \geq 0 \checkmark$$

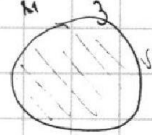
$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$$



$$10 < 144 - 25 < 11$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 170 \\ x^2 + (y-12)^2 - 4^2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 100 \\ x^2 + y^2 - 100 \\ x^2 + (y-12)^2 - 4^2 \geq 0 \end{cases}$$



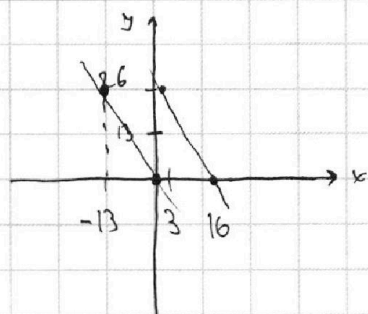
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y \in [0; 26]; \begin{cases} y + 2x \geq 0 \\ y + 2x \leq 32 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 169 + 156 \\ 196 \\ \hline 3650 \\ - 265 \\ \hline 3285 \end{array}$$