



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = n_1 2^{15} 7^{11} \quad bc = 2^{17} 7^{18} \cdot n_2 \quad ac = 2^{23} 7^{39} n_3$$

$$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \quad \text{Найдем } k = \min(a^2 b^2 c^2)$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{15 \cdot 2} 7^{11 \cdot 2} \cdot 2^{17 \cdot 2} 7^{18 \cdot 2} \cdot 2^{23 \cdot 2} 7^{39 \cdot 2} = 2^{22} \cdot 7^{11} \cdot 2^{34} \cdot 7^{36} \cdot 2^{46} \cdot 7^{78} = 2^{102} 7^{125}$$

$$abc = 2^{h_a m_a} = (2^{h_a m_a}) \cdot (2^{h_b m_b}) \cdot (2^{h_c m_c}) = 2^{h_a h_b + h_c m_a m_b m_c}$$

$$ab = 2^{h_a + h_b} 7^{m_a + m_b} \quad bc = 2^{h_b + h_c} 7^{m_b + m_c}$$

$$ac = 2^{h_a + h_c} 7^{m_a + m_c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_a + h_b \geq 15 \\ m_a + m_b \geq 11 \end{cases} \quad \begin{cases} h_b + h_c \geq 17 \\ m_b + m_c \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} h_a + h_c \geq 23 \\ m_a + m_c \geq 39 \end{cases}$$

Найдем наименьшее $\min(h_a + h_b + h_c)$ и $\min(m_a + m_b + m_c)$

$$U_2 \text{ условие: } \begin{cases} 2h_a + 2h_b + 2h_c \geq 55 \\ 2m_a + 2m_b + 2m_c \geq 66 \end{cases} \quad \begin{cases} h_i \in \mathbb{Z} \\ m_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_a + h_b + h_c \geq \lceil \frac{55}{2} \rceil \\ m_a + m_b + m_c \geq \lceil \frac{66}{2} \rceil \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_a + h_b + h_c \geq 28 \\ m_a + m_b + m_c \geq 34 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{28} 7^{34}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} 7^{34}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-5ab} \quad \text{Если эту дробь}$$

можно сократить на m , то $a+b = mq, q \in \mathbb{N}$

$$[(a-b)^2-5ab] = mp, \quad p \in \mathbb{N} \quad \Downarrow a = mq - b$$

$$\Downarrow (a-b)^2 \equiv 5ab \pmod{m}$$

$$\Rightarrow (mq-2b)^2 \equiv 5b(mq-b) \pmod{m}$$

$$\Rightarrow (m^2q^2 - 4mqb + 4b^2) \equiv 5bmq - 5b^2 \pmod{m}$$

$$\Rightarrow m(m^2q^2 - 4qb) + 4b^2 \equiv m - 5qb - 5b^2 \pmod{m}$$

$$\Rightarrow 4b^2 \equiv -5b^2 \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 = h_1 m + K \\ -5b^2 = h_2 m + K \end{cases} \quad (h_1, h_2 \in \mathbb{Z}) \quad \Rightarrow 4b^2 + 5b^2 = (h_1 + h_2)m$$

$$\Rightarrow 9b^2 = (h_1 + h_2)m \quad \Downarrow \begin{cases} h_1 > 0 \\ h_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9b^2 : m \quad \Leftrightarrow (3b)^2 : m \quad 3b \in \mathbb{N}$$

Если m не простой квадрат, то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$O_{\Delta 3}: \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$3x^2 - 6x + 2 \neq 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^4 - 9x^2 - 3x^2 + 2} = 1 - 9x + 2(x^2$$

$$2\sqrt{3x^4 - 9x^2 - 3x^2 + 2} = -9x + 1 + 2x^2$$

$$36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = \dots$$

Можно заметить, что если x подкоренному выражению $3x^2 + 3x + 1$ прибавить $1 - 9x$, то получится подкоренное выражение $3x^2 - 6x + 2$

$$3x^2 + 3x + 1 = a, \quad 1 - 9x = b \Rightarrow \sqrt{a+b} \pm \sqrt{a} = b$$

$$\Rightarrow a+b+a-2\sqrt{a^2+ab} = b^2 \Rightarrow b^4 + b^2(4\sqrt{a^2+ab}-1) = 0$$

$$\Rightarrow b^2(b^2 + 4\sqrt{a^2+ab}-1) = 0$$

$$1) b^2 = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \quad x = 1/9$$

$$2) \sqrt{a^2+ab} = 1 - b^2 \quad 16(a^2+ab) = 1 - 2b^2 + b^4$$

$$16a^2 + 16ab + (2b^2 - b^4 - 1) = 0 \quad \Delta_1 = 64b^2 - 32b^2 + 16b^4 + 16 =$$

$$= 16b^4 + 32b^2 + 16 = 16(b^2 + 1)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{-16b \pm 4(b^2 + 1)}{32} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/4 - 1/4b & (i) \\ a = -1/4 - 3/4b & (ii) \end{cases}$$

$$(i) 12x^2 + 12x + 4 = 1 - 1 + 9x \quad 12x^2 + 3x = 0 \quad \Delta < 0$$

$$(ii) 12x^2 + 12x + 4 = -1 - 3 + 27x \quad 12x^2 - 15x + 8 = 0 \quad \Delta < 0$$

Ответ: $x \in \{1/9\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+y-b=0 & (i) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (ii) \end{cases}$$

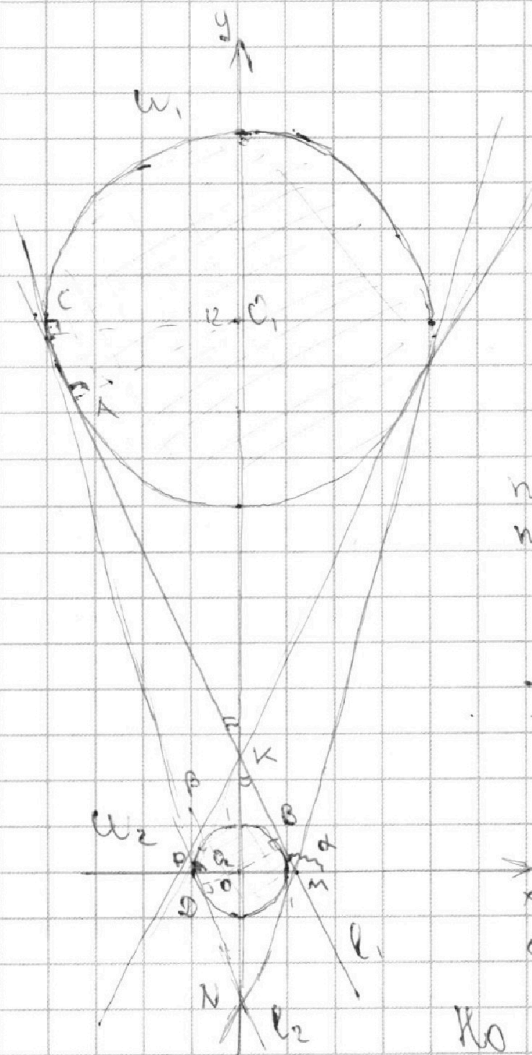
(i) $y = -ax + b$ - прямая, θ угла наклона $-a$, т. $(0; b)$

(ii) 1) $\begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$ -

область внутри окр. с центром в т. $(0; 0)$ и радиусом 1,
но снаружи окр. с центром в т. $(0; 12)$ и радиуса 4

2) $\begin{cases} x^2+y^2 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$ -

область внутри окр. с центром в т. $(0; 12)$ и радиуса 4,
но снаружи окр. с центром в т. $(0; 0)$ радиуса 1



2 решения возникают только
при одновременном касании
прямой двух окружностей
(4 случая)

Касательные можно раз-
делить на 2 типа:
- внешние (не пересекающие Oy)
- внутренние (пересекающие Oy
между окр.)

Для каждого типа пара
прямых имеет одну точку
пересечения с Oy (одно значение b),
а θ угла наклона с противоположными
знаками.

I) Внутренние касательные
(см. рис)

Пусть $l_1 \cap W_1 = T.A$, $l_2 \cap W_2 = T.B$

$$\Rightarrow O_1A \perp l_1, O_2B \perp l_2$$

$$\Rightarrow \triangle AOK \sim \triangle BOK \quad OK = OA = 1$$

$$K \in l_1 \cap l_2 \Rightarrow OK = OB = 1$$

$$\text{Но } OK + KO_2 = CO_2 = R \Rightarrow T.K(0; 2.4)$$

$$\Rightarrow b = 2.4 \Rightarrow b = 0.2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 ΔO_2KB $\tan KO_2B = \tan(\frac{\pi}{2} - BKO_2) = \cot BKO_2 = \frac{KB}{KO_2}$

6 ΔKBO_2 $\cos KBO_2 = \frac{OB}{OK} = \frac{1}{2,4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos^2 KBO_2 = \frac{25}{144}$

$\Rightarrow \tan^2 KO_2B = \frac{144}{25} - 1 = \frac{144-25}{25} = \frac{119}{25} \Rightarrow \tan KO_2B = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$\Rightarrow \tan \alpha = \tan KMX = -\tan KMO_2 = -\tan KO_2B = -\frac{\sqrt{119}}{5} = -a$

$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{119}}{5} \Rightarrow \text{Получаем } (a;b): (\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3), (-\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3)$

II) Внешние касательные

Пусть $l \cap W_1 = T, C$ $l \cap W_2 = T, D \Rightarrow O_1C \perp l, O_2D \perp l$

$\Rightarrow \Delta O_1CN \sim \Delta O_2DN$ ($\angle N - l \cap O_1O_2$) $\Rightarrow \frac{O_1N}{O_2N} = \frac{O_1C}{O_2D} = \frac{4}{1}$

Но $O_1N - O_2N = O_1O_2 = 12$

$\Rightarrow T.N(0;-4) \Rightarrow OB = -4 \Rightarrow b = -1/2$

6 ΔO_2DN $\cos NO_2D = \frac{O_2D}{NO_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan NO_2D = \sqrt{15}$

$\Rightarrow \tan \beta = \tan CPX = -\tan O_2PD = -\tan DO_2N = -\sqrt{15} = -a$

$\Rightarrow a = \sqrt{15} \Rightarrow \text{Получаем } (a;b): (\sqrt{15}; -1/2), (-\sqrt{15}; -1/2)$

Ответ: $(\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3), (-\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3), (\sqrt{15}; -1/2), (-\sqrt{15}; -1/2)$



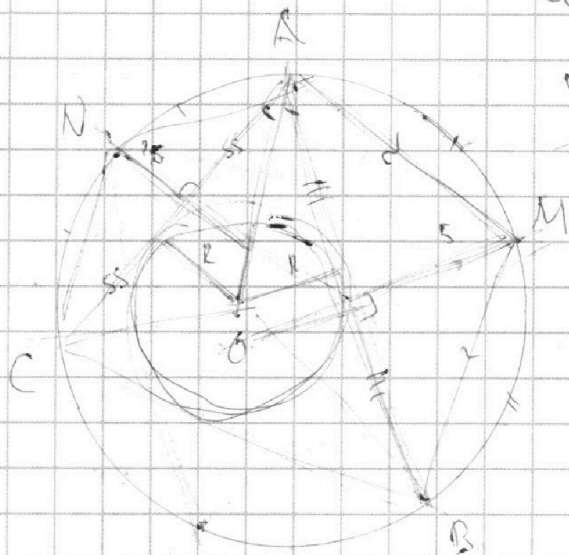
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2a+b-2\sqrt{a^2+ab}=b^2$$

$$2a+b=b^2+2\sqrt{a^2+ab}$$

$$4a^2+4ab+b^2=b^4+4b^2\sqrt{a^2+ab}+4(a^2+ab)$$

$$16(b^4+2b^2+16)=$$

$$\frac{-8b+4b+4}{16} = \frac{4-4b}{16} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}b$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$2 = 225 \sim$$

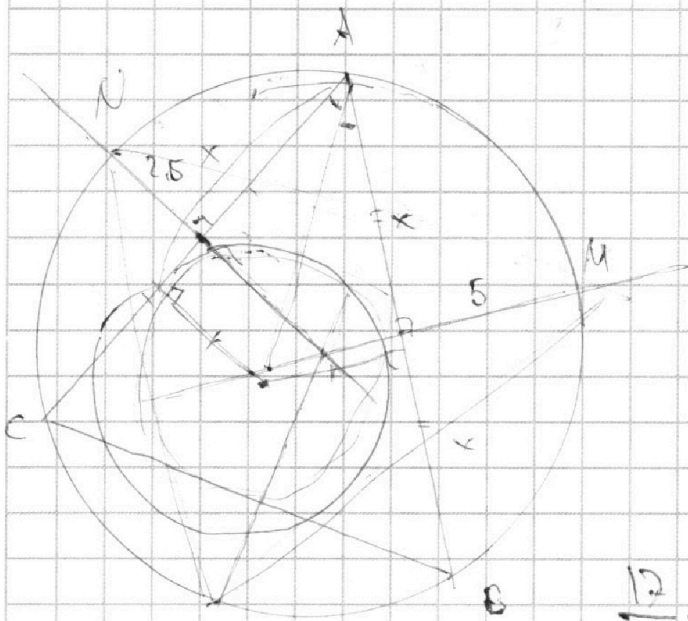
$$\frac{29}{112}$$

$$\sqrt{\frac{14}{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{199}$$

$$\frac{12}{5} + \frac{1}{1} =$$

$$= 1$$



$$\frac{119}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49 + 119x^2 + 49x^2 + 119x^4 = 627$$

$$168x^2 + 119x^4 - 627 = 0$$

$$119k^2 + 168k - 627 = 0$$

$$k = \frac{-84 \pm \sqrt{84^2 + 627 \cdot 119}}{119}$$

$$3x^2 - 6x + 1$$

$$3x^2 + 3x + 1$$

$$(3x^2 - 6x + 1) + 1$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) = (a-b)^2$$

$$= (a-b)^2 - 5ab$$

$$a+b = mq$$

$$a-b = mq \text{ и } 5ab$$

$\begin{array}{r} 84 \\ 64 \\ \hline 148 \\ 119 \\ \hline 267 \\ 119 \\ \hline 386 \\ 119 \\ \hline 505 \end{array}$	$\begin{array}{r} 84 \\ 64 \\ \hline 148 \\ 119 \\ \hline 267 \\ 119 \\ \hline 386 \\ 119 \\ \hline 505 \end{array}$	$\begin{array}{r} 627 \\ 49 \\ \hline 676 \\ 26 \\ \hline 702 \\ 1118 \\ \hline 1820 \\ 627 \\ \hline 2447 \\ 7056 \\ \hline 9503 \end{array}$
$\begin{array}{r} 812 \\ 119 \\ \hline 931 \\ 119 \\ \hline 1050 \\ 119 \\ \hline 1169 \\ 119 \\ \hline 1288 \end{array}$	$\begin{array}{r} 80000 \\ 8 \cdot 10000 \\ 80000 \\ 80000 \\ 80000 \\ 80000 \\ 80000 \\ 80000 \\ 80000 \\ 80000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 64 \\ 197 \\ \hline 261 \\ 197 \\ \hline 458 \\ 64 \\ \hline 522 \\ 282 \\ \hline 804 \\ 2009 \\ \hline 2213 \\ 524 \\ \hline 2737 \end{array}$



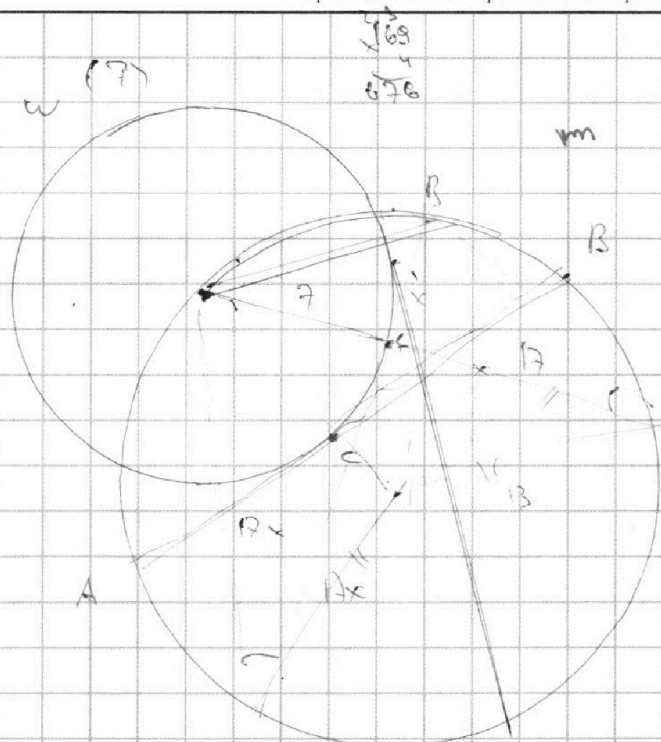
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

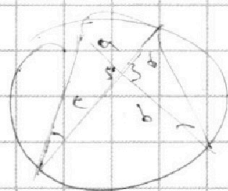


$$1+x^2 = 6 \cdot 6(49 + 19x^2)$$
$$(1+x^2)(49 + 19x^2) = 6 \cdot 6$$

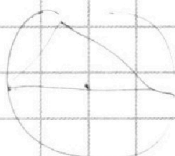
$$12, 12, 24$$
$$\frac{12}{12x} = \frac{x}{12}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3}$$
$$= 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3}$$



$$\frac{a}{d} = \frac{c}{b} \quad ab = cd$$



$$ab = h \cdot 2 \cdot 7$$

$$bc = 2 \cdot 7 \cdot h_2$$

$$ca = 2 \cdot 7 \cdot h_3$$

$$a^2 b^2 c^2$$

$$HOK$$

$$2 \cdot 7 \cdot h$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} = a^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$= 1 - 3x + 3x^2 + 3x + 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 =$$

$$= 1 - 3x + 3x^2 + 12x$$

$$\frac{49 + 49x^2}{49(49 + 19x^2)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 6x^2 + 6x$$

$$abc = 2^{23} \cdot 2^3$$

$$9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 6x^2 + 6x$$

$$b = 1$$

$$c = 2^{10} \cdot 2^3$$

$$a = 2$$

$$9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 6x^2 + 6x$$

$$= 9x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 2$$

$$\begin{array}{r} 626 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$abc = 2^k \cdot n$$

$$49 + 119x^2 + 49x^2 + 119x^4 = 626$$

$$ab =$$

$$119x^4 + 168x^2 - 622 = 0$$

$$168$$

$$x = \frac{-84 \pm \sqrt{84^2 + 119 \cdot 622}}{119}$$

$$\begin{array}{r} 626 \cdot 2 \\ 338 \cdot 2 \\ 169 \cdot 2 \\ 13 \cdot 77 \end{array}$$

$$4 \cdot 13^2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 13$$

$$626 =$$

$$x_1, y_1$$

$$x_2, y_2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$abc = 2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^7$$

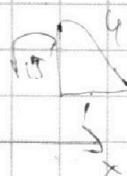
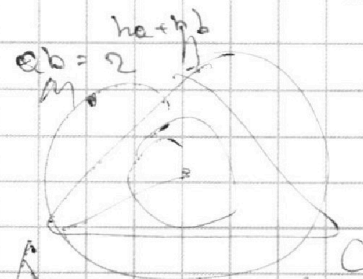
$$(mq - 2b) \equiv 5b(mq - b) \pmod{m}$$

$$-2b \equiv -5b^2 \pmod{m}$$

$$4b^2 = h \cdot m + k$$

$$-5b = h_2 m + k$$

$$9b^2 = g m$$



$$\frac{16}{1} = 1 \cdot 16$$

$$25$$