



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☒

2
□

3
□

4

5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{1}$

$$\left. \begin{array}{l} ab \neq ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{array} \right\} \begin{array}{l} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc = p \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac = q \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \end{array}$$

$$(abc)^2 = kpq \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{2kpq} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} = \min$$

$\sqrt{2kp_9}$ - четное число } ~~2kp_9~~
"min

k, p, q - целые числа т.е. $k, p, q \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \min(2kpg) = 4 \quad (\text{минимум } \sqrt{2kpg} \text{ был целым})$$

Πίνακας

		28	34
$abc =$	2	7	
min			

Answer: $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



P и Q - центры окр-тей

т.к. AB - касательная к $W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ACQ = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CQ^2 = AC \cdot CB$$

$$CQ = r = 7$$

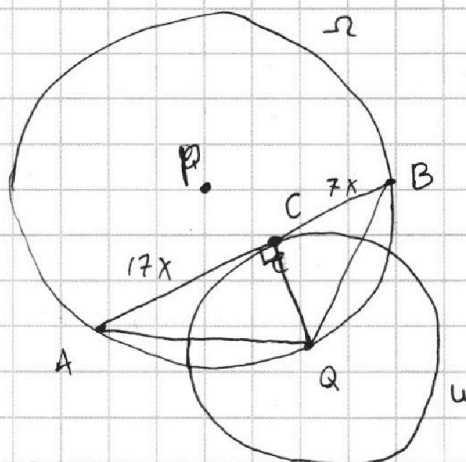
$$49 = 17x \cdot 7x; \quad 7 = 77x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{7}{77}}$$

$$AB = 24x =$$

$$24\sqrt{\frac{7}{77}}$$

Ответ: $AB = 24\sqrt{\frac{7}{77}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} \cdot \frac{\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}}{\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}} = \frac{1-9x}{\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}}$$

$$\frac{3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1}{\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}} = \frac{1-9x}{\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}}$$

$$\frac{1-9x}{\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}} = 1-9x \quad \left| \frac{\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}}{1-9x} \right|$$

$$1-9x=0 \quad \text{— корни} \quad \boxed{x = \frac{1}{9}}$$

~~Сумма корней > 0 ⇒ можем~~

② $1 = \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}$

Т.к. $\sqrt{\dots} \geq 0 \Rightarrow$ каждый из корней ≤ 1

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2 \leq 1; & 3x^2-6x+1 \leq 0; & x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4 \cdot 3}}{6} \\ 3x^2+3x+1 \leq 1; & x^2+x \leq 0; & \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -1 \quad 0 \end{array} \end{cases} \rightarrow \boxed{x \in [-1; 0]} \quad (3)$$

$$3x^2-6x+1 \leq 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{6 \cdot 4}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{4}{6}} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

④ $\boxed{x \in \left[1 - \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right]}$

Интервалы (3) и (4) не пересекаются $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ уравнение (2) не имеет корней

Проверим корни $x = \frac{1}{9}$ подстановкой. Он подходит

Ответ: $\boxed{x = \frac{1}{9}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (x_1; y_1)$$

$$B = (x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$26 \geq y_1, y_2 \geq 0$$

Закрепим точку A

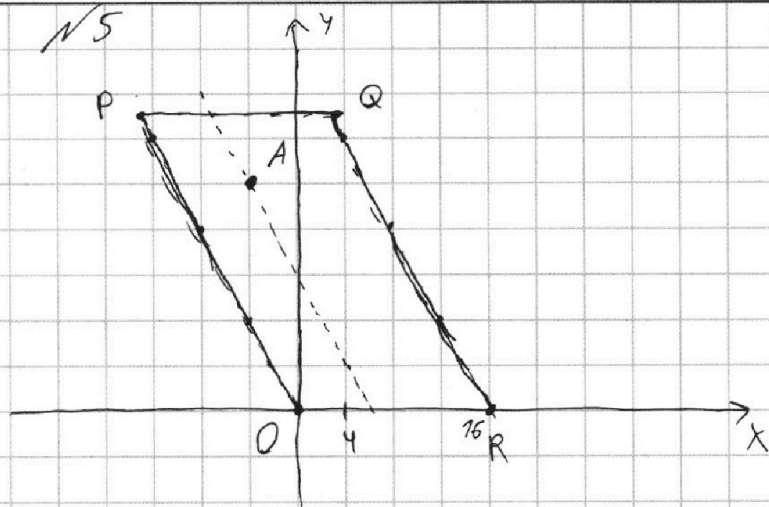
Тогда $y_2 = 14 + y_1 + 2x_1 - 2x_2 = -2x_2 + \underbrace{14 + y_1 + 2x_1}_{const}$

Прямая PO: $y = -kx$; $26 = -k - 13$; $k = 2$

$$y = -2x \Rightarrow \text{коэф наклона для прямой,}$$

на которой могут быть точка B, совпад с коэф наклона параллелограмма

или $14 + y_1 + 2x_1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 6

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 76) \leq 0$$

Построим график 2-го неравенства

(это два круга)

$y = 8b - ax$ - прямая.

Если система имеет 2 решения, значит

$y = 8b - ax$ - касательная к обеим окружностям $\Rightarrow$

внешн. внутренн.

$\Rightarrow$ всего будет 4 варианта

Формула расстояния от точки до прямой: $Ax + By + C = 0$ - прямая
($x_0; y_0$)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$A = a$ Если прямая касается

$B = 1$ окр-ти, то $d = r$

$C = -8b$

Для маленькой окр-ти: $d = 1 = \frac{|a \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$

$$\sqrt{a^2 + 1} = |-8b| ; 8b = \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

$$64b^2 = a^2 + 1$$

Для большой окр-ти:

$$d = 4 = \frac{|a \cdot 0 + 1 \cdot 12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} ; 4\sqrt{a^2 + 1} = |12 - 8b|$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = |3 - 2b| ; a^2 + 1 = (3 - 2b)^2$$

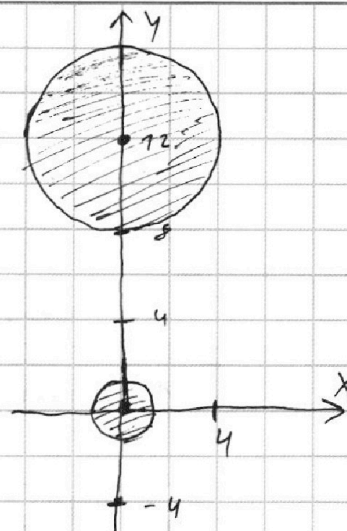
$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \\ a^2 + 1 = (3 - 2b)^2 \end{cases}$$

$$64b^2 - (3 - 2b)^2 = 0 ; (8b - 3 + 2b)(8b + 3 - 2b) = 0$$

$$\begin{cases} b = -0,5 \\ b = 0,3 \end{cases}$$

$$a^2 + 1 = 64b^2 = 64 \cdot 0,25 = 16$$

$$a^2 = \frac{15}{\frac{179}{25}} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \pm \sqrt{\frac{15}{\frac{179}{25}}} \\ a = \pm \sqrt{\frac{15 \cdot 25}{179}} \end{array} \right. \quad \text{Ответ: } \begin{cases} a = \pm \sqrt{15} \\ a = \pm \sqrt{\frac{179}{5}} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

I - центр впис. окр-ти

1) Т.к. M середина дуги $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AM = MB; \angle M H_1 B = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AM H_1 = \triangle M H_1 B$$

$$\text{Аналогично } \triangle A H_2 N = \triangle N H_2 C \Rightarrow N$$

$$\Rightarrow A H_1 = H_1 B \text{ и } A H_2 = H_2 C$$

Заметим, что точки C, I, M лежат на одной

прямой Т.к. I - биссектриса и M - биссектриса

Из вписанных углов: $\angle B C I = \angle M B H_1$, и другие аналогично

Из п/у $\triangle A N C$: Т.к. $\angle A H_2 N = 90^\circ \Rightarrow N H_2^2 = A H_2 \cdot H_2 C = A H_2^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A H_2 = 2,5 = H_2 C$$

$$\text{Аналогично } A H_1 = H_1 B = 5$$

$$\sin(\varphi) = \frac{2,5}{5} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

$$\sin(\varphi) = \frac{2,5}{0,5 AC} = \frac{5}{AC}$$

$$\sin \varphi = \frac{5}{AC} \quad AB = \frac{10}{\sin \beta}$$

$$\sin(\beta) = \frac{5 M H_1}{\frac{1}{2} AB} = \frac{10}{AB}$$

$$\sin(\beta) = \frac{r}{CP}; CP = \frac{r}{\sin \beta}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{r}{AP}; AP = \frac{r}{\sin \alpha}$$

$$AP + CP = AC = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \frac{5}{\sin \varphi}$$

$$\text{Аналогично } AB = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) \quad BC = r \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$$

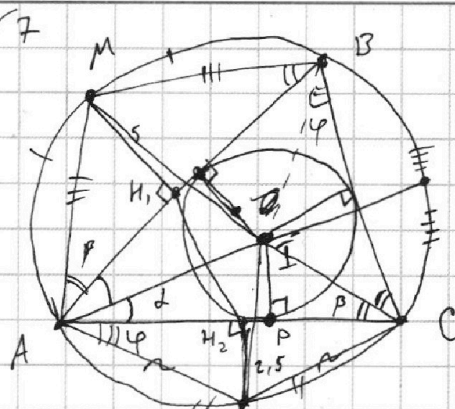
$$\frac{10}{\sin \beta} = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \varphi} \right)$$

$$\frac{5}{\sin \varphi} = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$$

$$\text{Тогда } \sin: \frac{AC}{\sin(2\varphi)} = \frac{AB}{\sin(2\beta)}$$

$$\frac{5}{2 \sin^2(\varphi) \cos(\varphi)} = \frac{10}{2 \sin^2(\beta) \cos(\beta)}$$

$$\sin^3(\varphi) \cos(\varphi) = 2 \sin^2(\beta) \cos(\beta)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N6

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

График

$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = 8b - ax$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (8b - ax)^2 = 1; \quad x^2 + 64b^2 + a^2x^2 - 16abx = 1$$

Имеет только 1 решение $\Rightarrow D = 0$

$$(16ab)^2 - 4(1+a^2)64b^2 = 0$$

$$2^8 a^2 b^2 - 2^8 (1+a^2)b^2 = 0;$$

$$a^2 b^2 - 1 - a^2 = 0$$

$$a^2(b^2 - 1) - 1 = 0$$

$$x^2 + (4 \pm 8b - ax - 12)^2 \leq 16$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)(8b - ax - 12) = x^2 + 64b^2 - 8abx - 96b - 8abx + a^2x^2 + 12ax - 96b + 12ax + 144$$

$$= x^2 + 64b^2 + 144 + a^2x^2 - 16abx + 24ax - 2 \cdot 96b = 96$$

$$x^2(1+a^2) - x(16ab - 24a) + 64b^2 - 2 \cdot 96b + 128 = 0$$

$$96 = 8 \cdot 12 = 4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2^5$$

$$D = 0; \quad 8^2 a^2 (2b - 3a)^2 - 4(a^2 + 1) \cdot (64b^2 - 2 \cdot 96b + 128) = 0 \quad | \cdot \frac{1}{64}$$

$$8^2 a^2 (2b - 3a)^2 - (a^2 + 1)2^8 (2b^2 - 3 \cdot 2^6 b + 2^7) = 0$$

$$a^2(2b - 3a)^2 - 4(a^2 + 1)(b^2 - 3b + 2) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 7 - 9x$$

$$\text{ОДЗ: } 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad x \in \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty \right)$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 81x^2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 - 9x + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} =$$

$$\frac{1 - 9x}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}}$$

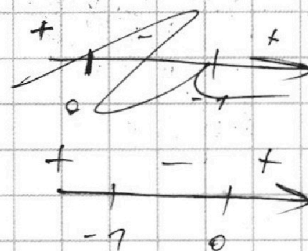
$$(1 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \leq 1; \quad 3x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1; \quad 3x^2 + 3x \leq 0; \quad x \in [0; -1]$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6}; \quad x \in \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$





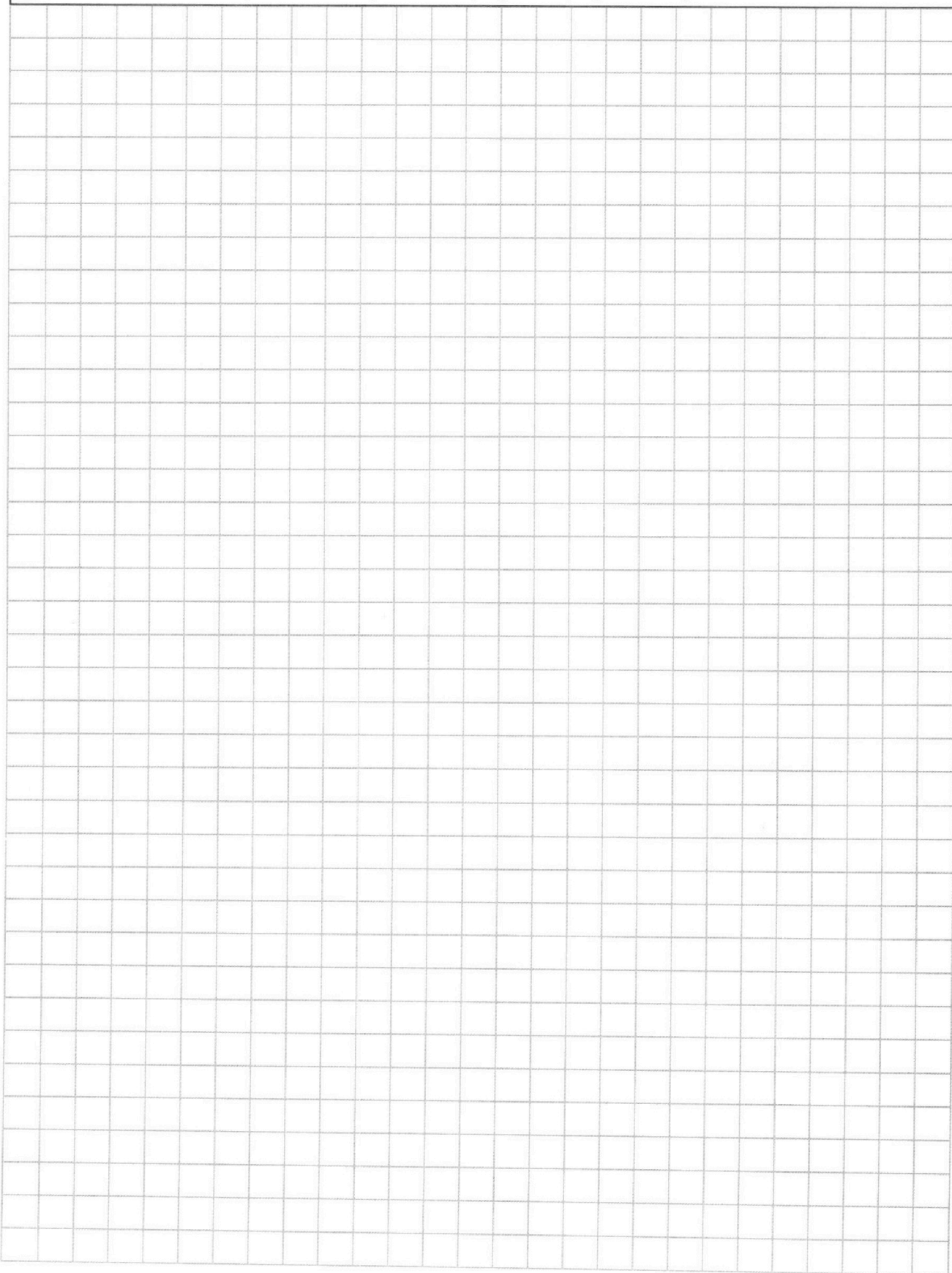
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

