МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{14}7^{10}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{17}$, $ac$ делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 4,5 и 2.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. 1) Возьмем $ab$, $bc$, $ac$ — мин т.е. $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$,
$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

2) $ab \cdot bc = b^2 \cdot ac = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} = 2^{31} \cdot 7^{27}$

$ac \le b^2 \cdot ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$, что невозможно
т.к. $7^{27} < 7^{37}$

Значит $ab \cdot bc \le 2^{31} \cdot 7^{37}$

3) $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 2^{14+17+20} \cdot 7^{37 \cdot 2} = 2^{51} \cdot 7^{37 \cdot 2}$

51 - нечётное, что невозмож т. $abc$ - натур.
значит степень 2-ки хотя бы 52 ($b^2 (abc)^2$)

тогда $abc \ge 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример: $a = 7^{14} \cdot 2^{9}$
$b = 2^{6}$
$c = 7^{23} \cdot 2^{11}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

1) Если $\frac{a}{b}$ - несократима то $a$ и $b$ - взаимнопрост. числа

2) $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ можно сократить на $m$, значит

$(a+b) \vdots m$

$a^2-6ab+b^2 \vdots m$

$a^2-6ab+b^2 = (a+b)^2 - 8ab \vdots m$ } $8ab \vdots m$

$a+b \vdots m$

$m = p_1^{\alpha} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

если $a \vdots p_i$ то $(a+b) \vdots p_i$ значит $b \vdots p_i$ что противоречит условию

значит $ab \not\vdots m$ и не имеет с $m$ общ. делителей

тогда $8 \vdots m$. максимально возмож $m = 8$

Пример: $a = 5$, $b = 3$ $\quad \frac{5+3}{5^2-6\cdot5\cdot3+3^2} = \frac{8}{25+9-90} = \frac{-8}{56} = \frac{-1}{7}$

Ответ: 8

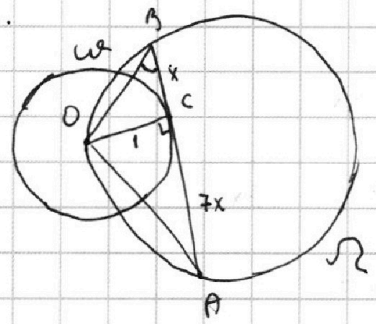
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3.




1) $OC \perp AB$ (радиус провед в т. кас перпендик. касательной)

2) Пусть $BC = x$; $CA = 7x$

3) $\triangle OBC$; $\angle C = 90^\circ$
$OB^2 = BC^2 + OC^2$ по т-ме Пифагора
$OB = \sqrt{x^2+1}$

4) $\triangle OCA$; $\angle C = 90^\circ$
$OA^2 = OC^2 + CA^2$ по т-ме Пифагора
$OA = \sqrt{1+49x^2}$

5) $\triangle OBC$; $\angle C = 90^\circ$; $\sin\angle OBC = \frac{OC}{OB}$ по опр синуса для пр-уг. $\Delta$-ка
$\sin\angle OBC = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

6) $\triangle OBA$;
$\frac{OA}{\sin\angle OBA} = 2R$, где $R$ - радиус $\Omega$. ($R = 5$)
по т-ме синусов
$\sin\angle OBA = \frac{OA}{2R} = \frac{\sqrt{1+49x^2}}{10}$

7) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+49x^2}}{10}$

$100 = (1+49x^2)(1+x^2)$

Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$

$\begin{cases} (1+49t)(1+t) = 100 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49t^2 + 50t - 99 = 0 \\ t > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (49t + 99)(t-1) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{99}{49} \end{array}\right. \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

Обр. замена $x^2 = 1$; $x = 1$

$AB = AC + BC = 8x = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{2}{7} \\ \begin{cases} x > \frac{2}{7} \\ 2x^2+2x+1 \geq 49x^2-28x+4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{2}{7} \\ \begin{cases} x > \frac{2}{7} \\ 47x^2-30x+3 \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee \frac{2}{7}$

$14\sqrt{61} \vee 84-77 = 7$

$14\sqrt{61} > 7$

2) $47\cdot\left(\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right)^2 - 30\left(\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right) + 3 \leq 0$

$47(121+244+44\sqrt{61}) - 30\cdot 41(11+2\sqrt{61}) + 3\cdot 41^2 \leq 0$

$47\cdot 365 + 47\cdot 44\cdot\sqrt{61} - 30\cdot 41\cdot 11 - 60\cdot 41\sqrt{61} + 3\cdot 41^2 \leq 0$

$47\cdot 365 - 3\cdot 41\cdot 69 \leq 392\sqrt{61}$

$8668 \leq 392\cdot\sqrt{61}$

$392\cdot\sqrt{61} \leq 392\cdot 8 \leq 8668$ неверно

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ не подходит.

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\sqrt{2x^2+2x+1+2-7x} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Пусть $2x^2+2x+1 = a$, $2-7x = b$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$\begin{cases} \sqrt{a}+b \geq 0 \\ a+b = a+b^2+2\sqrt{a}\,b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} \geq -b \\ b^2+2\sqrt{a}\,b-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ \begin{cases} \sqrt{a} \geq -b \\ b+2\sqrt{a}-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ \begin{cases} \sqrt{a} \geq -b \\ b = 1-2\sqrt{a} \end{cases} \end{array}\right.$$

Обратная замена:

1) $2-7x=0$

$x = \frac{2}{7}$

2) $\sqrt{a} \geq -b$ $\quad \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2$

$2-7x = 1-2\sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x \geq 1 \\ 49x^2-14x+1 = 8x^2+8x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x \geq 1 \\ 41x^2-22x-3=0 \end{cases}$$

$D_1 = 11^2+41\cdot 3 = 121+123 = 244$

$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$

1) $7 = \sqrt{49} < \sqrt{61} < \sqrt{64} = 8$

$-8 < -\sqrt{61} < -7$

$-2\sqrt{61} < -14$

$11-2\sqrt{61} < -3 < 0$

$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} < 0 < \frac{1}{7}$ $\quad \nearrow$ $\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ - не подходит

2) $\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee \frac{1}{7}$

$77 + 14\sqrt{61} \vee 41$

$14\sqrt{61} > -36$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{7}$.

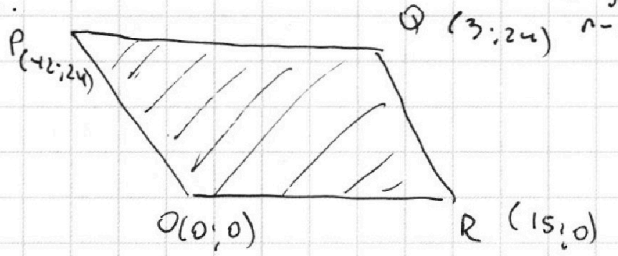
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.




1) Запишем уравнения прямых обр. г-м.

PO: $y = -2x$

RQ: $y = -2x + b$

$0 = -2\cdot 15 + b$

$b = 30$

$y = -2x + 30$

$0 \le y + 2x \le 30$ чтобы ограничить область.

и PQ: $y = 24$

OR: $y = 0$

$0 \le y \le 24$

3) $0 \le 2x \le 30$

$0 \le x \le 15$

6) $2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$

$12 \le 2x_2 + y_2 \le 30$ всего 19 зн-й

~~зн~~ $2x + y = 1$ ~~нет~~ одна пара чисел

$2x + y = 2$ или 3 2 пары и т.д. до 24

$2x + y = 4$ или 5 ~~30~~ 3 пары ~~15 пар.~~ с 24 кол-во пар не

~~6 пар~~ ~~6+15~~ 12 - 6 пар ; 24 - 12 пар мен.

$S = \frac{6+11}{2}\cdot\frac{19}{2}\cdot 2 + 12\cdot(30-24+1) = 17\cdot 6 + 12\cdot 7 =$

$= \cancel{13 + 12\cdot 6 = 201} = 186$

Ответ: ~~201 пара~~ 186

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.

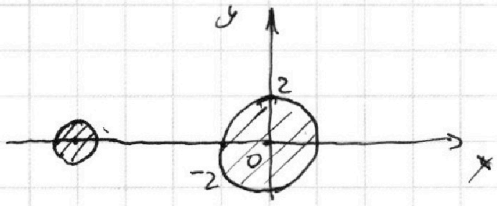
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + b \\ \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \le 1 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \ge 1 \\ x^2 + y^2 \ge 4 \end{cases} \quad (2) \end{array} \right. \end{cases}$$

Решим графически

1) $y = ax + 10b$ – прямая если $a \ne 0$ и точка если $a = 0$

2) $(x+8)^2 + y^2 = 1$ окружность с центром $(-8; 0)$ радиусом 1

3) $x^2 + y^2 = 4$ – окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 2



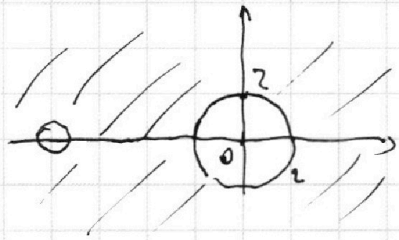

1) для системы (1)

$(x+8)^2 + y^2 \le 1$
решением явл. внутр. область окр

(методом проб. т. $(-8; 0)$ $(-8+8)^2 + 0 = 0 \le 1$
аналог для $x^2 + y^2 \le 4$

заметим что области не пересекаются значит (1) система реш. не имеет

2)




для 2 сист. реш. явл. инвертиров. пр-во.

прямая не может пересекать выдел. область ровно в 2х точках
одна точка тоже

Значит таких $a$ не существует

Ответ: $\varnothing$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.

(2) $\frac{NT \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{KM \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

$\frac{NT}{KM} = \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)^2 = \frac{2}{4,5} = \frac{4}{9}$

$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2}{3}$

(3) $AF = \frac{NT \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$

(5) $AE = 2AF = 6$

Ответ: 6.

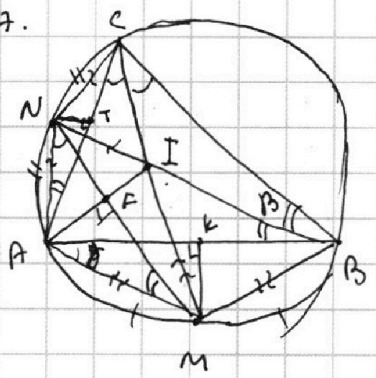
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7.




1) Вписанные $\angle CBN = \angle ABN$
как углы опир. на рав. дуги
$BN$ – бис. угла $B$
аналог $CM$ – бис $\angle C$

2) $CM \cap BN = I$, $I$ – центр
впис окр $\triangle ABC$

3) из леммы о трезубце $NI = AN = NC$
$AM = MB = MI$

4) $AN = NI$
$IM = AM$
$MN$ – общ
$\Big\}$ $\triangle NIM = \triangle NAM$ по 3 сторонам

5) $I$ и $A$ симметричны отн. $MN$
$AI \perp MN$; $AI \cap MN = F$; $AI = 2AF$

6) $MK \perp AB$, $K \in AB$
$NT \perp AC$; $T \in AC$ доп. постр.

7) Пусть $\angle ACM = \gamma = \angle MCB$; $\angle ABN = \angle CBN = \beta$

8) Вписанные $\angle MCB = \angle MAB = \gamma$ (опир на $\overset{\frown}{MB}$)
$\angle ANM = \angle ACM = \gamma$ (опир на $\overset{\frown}{AM}$)
$\angle CBN = \angle NAC = \beta$ (опир на $\overset{\frown}{NC}$)
$\angle NMA = \angle NBA = \beta$ (опир на $\overset{\frown}{NA}$)

9) $\angle AFM = \angle AKM = 90^\circ$, наход по од. стор от $AM$
опир на $AM$ $\Rightarrow$ $AFKM$ – впис в $\omega_2$ по т-ме
о принадл. их т. одной окр. (у $\omega_2$ – радиус $R_2$)

10) $\triangle AKM$ $\dfrac{KM}{\sin\gamma} = 2R_2$
$\triangle AFM$ $\dfrac{AF}{\sin\beta} = 2R_2$ $\Big\}$ по т. синусов

$AF = \dfrac{KM \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

11) аналогично $AFTN$ впис в $\omega_3$ с радиусом $R_3$
$\dfrac{AF}{\sin\gamma} = \dfrac{NT}{\sin\beta}$; $AF = \dfrac{NT \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1 2 6 7 ; 4 г

$\sqrt{2x^2+2x+1-7x+2} - \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 2-7x$

$a \quad b$

$11-2\sqrt{61} \vee \frac{1}{7}$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$

$7 < \sqrt{61} < 8$

$-8 < -2\sqrt{61} < -7$

$-2\sqrt{61} < -4$

$\cancel{a+b+a} \quad \cancel{a}+b = b^2 + \cancel{a} + 2b\sqrt{a}$

$b^2 + 2b\sqrt{a} - b = 0$

$\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2.$

$\frac{25}{41} \sim \frac{27}{41}$

$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b+2\sqrt{a}-1=0 \end{array}\right.$

$\frac{25}{41} \sim \frac{27}{41}$

$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1-2\sqrt{a} \end{array}\right.$

$7x=2$

$x=3{,}5$

$\frac{11+14}{41} \approx \frac{2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{11+8}{41}$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee \frac{1}{7}$

$11+2\sqrt{61} \vee \frac{82}{7}$

$2\sqrt{61}$

$2-7x = 1-2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1$

$4x^2+4x+4 = 49x^2-14x+1$

$\cancel{47x^2-17x=0}$

$\cancel{x=0}$

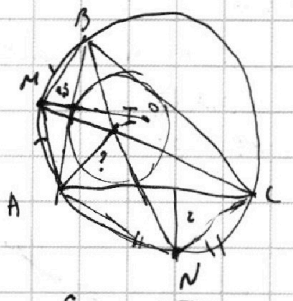
$\cancel{x=\frac{17}{47}}$

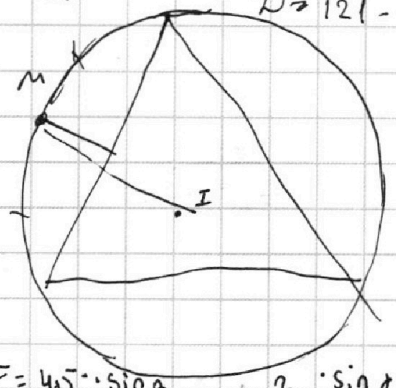
$\cancel{45x^2-19x+1=0}$

$41x^2-22x-3=0$

$\cancel{(41x-3)(}$

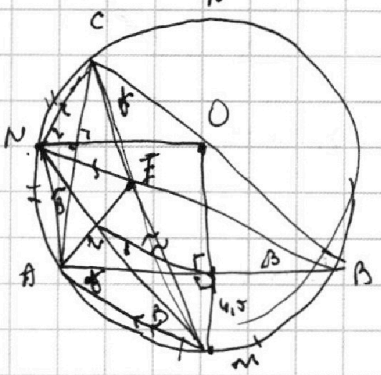
$D=121-123<0$





$\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2$

$\left[\begin{array}{l} x \leq \frac{2}{7} \\ \cancel{4x^2+4x+4 \geq 49x^2-28x+4} \\ \cancel{x \geq \frac{2}{7}} \end{array}\right.$



$AF = \frac{4{,}5 \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2 \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$

$\frac{47}{\times 3}$

$141$

$\cancel{49x^2}$

$\begin{cases} 2x^2+2x+1 \geq 49x^2-28x+4 \\ x \geq \frac{2}{7} \end{cases}$

$47x^2-30x+3 \leq 0$

$225-141=84$

$.5x \leq 15 \pm \frac{\sqrt{84}}{3}$

$\cancel{45x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$244 \mid 4$, $24 \mid 61$, $44$

$c = a \cdot 7^7$

ab min 2 $\quad a^2 \cdot 7^7 = 7^{37}$

$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = 2 \quad 244$

$7^1$

a - b взаим пр. $\quad 14+17+20 = 31+20 = 51$

7

$\frac{a}{c} = 2^9$ $\quad c = a \cdot 2^4$

$ac = 2^{20}$

$a \cdot a \cdot 2^9 = 2^{20}$ $\quad c = 2^4$

$a = 2^8 \quad b = 2^8$

$\frac{c}{a} = 7^7$

$c = 7^7 \cdot a$

$a^2 = 7^{15}$

| | | |
|---|---|---|
| a | $7^{14}$ | $2^9$ |
| b | $7^{23}$ | $2^{11}$ |
| c | $7^{23}$ | $2^6$ |

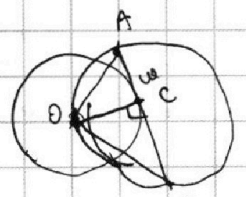
$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

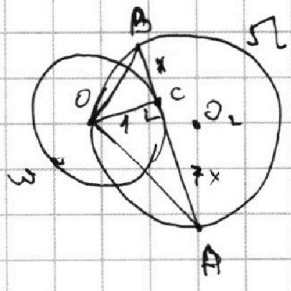
$a+b \vdots m$

$a^2 - 6ab + b^2 \vdots m$

$25 + 9 - 6 \cdot 5 \cdot 3 =$

$= \quad - ($





$6 \cdot 15 = 90 - 34 = 56.$

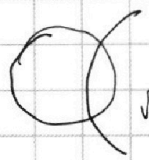
$15$

$\frac{6}{0}$

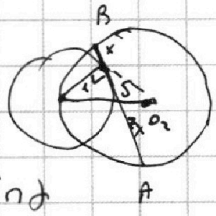
$(7t+11)(7t-3)$

$y_2$

$\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-2$



$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \sin\alpha$



$\frac{\sqrt{7x^2+1}}{2R} = \sin\alpha$

$(a+b) = mk$

$(a+b)^2 - 8ab = mt$

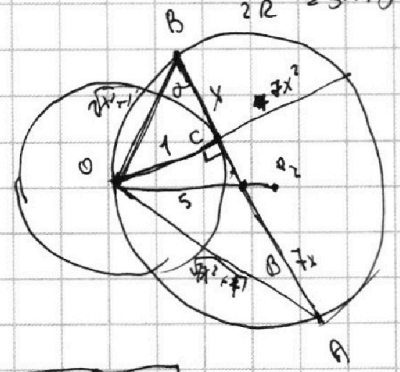
$m^2k^2 - 8ab = mt$

$8ab \vdots m \quad 8 \vdots m$

$x \geq \frac{2}{7}$

$4x^2+4x+1 \geq$

$m$ - макс. 8



$\frac{5+3}{(5+3)^2 - 8 \cdot 15}$ $\quad 2^8$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$(2x-3)(x-1)$

$7x + 2\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$.

$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{\ldots} = 49x^2 - 28x + 4$

$-2\sqrt{\ldots} = 45x^2 - 25x$

$5x(9x-5) = 2\sqrt{\ldots}$

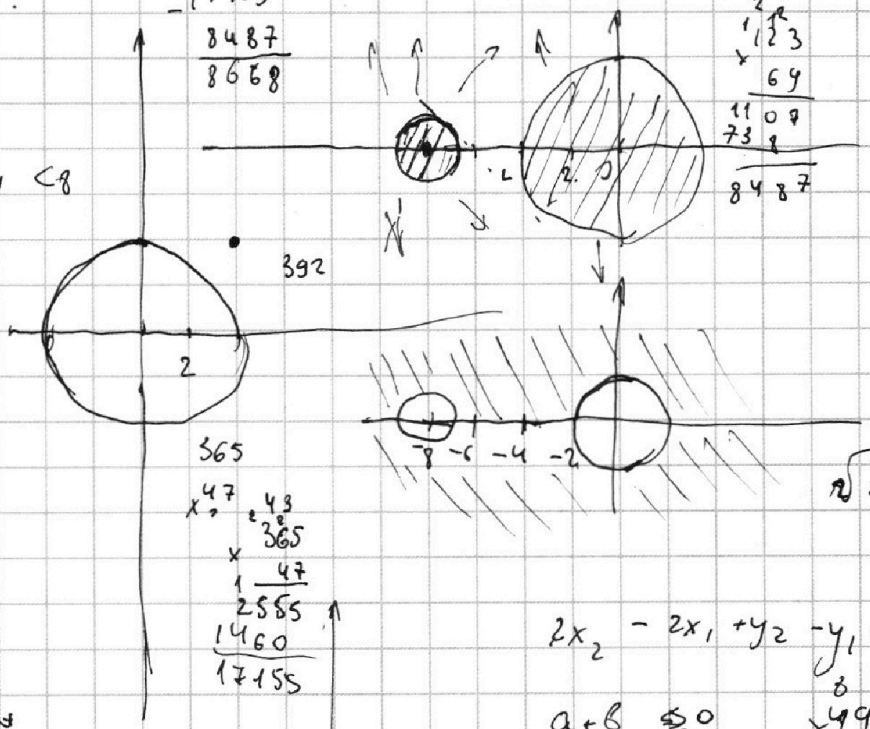
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$17155$
$8487$
$8668$




$123 \times 69$
$1107$
$7380$
$8487$

$y = ax + 10b$

$\sqrt{61} < 8$

$4{,}5 \cdot \frac{2}{3} = 9$

$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$

$\sqrt{2 \cdot (\frac{11+2\sqrt{61}}{}}$

$365 \times 47$
$2555$
$1460$
$17155$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12.$

$a + b \leq 0$

$99 \times 99$
$441$
$441$
$9801$

$47x^2 - 30x + 3 \leq 0$

$D = 225 - 141 = 84$
$4 \cdot 21$

$\frac{15 \pm 2\sqrt{21}}{}$

$2x^2 + 2x + 1 + 2 -$

$ax^2 - 5x + 3 \geq 0$

$(2x - 3)(x - 1) \geq 0$

$x \geq 1{,}5$

$x \leq 1$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 49x^2$

$2460$
$2068$
$392$

$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \vee 1$

$11 + 2\sqrt{61} \vee 41$

$2\sqrt{61} \vee 15$

$\sqrt{61} < 15.$

$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \vee \frac{2}{7}$

$77 + 14\sqrt{61} \vee 82$

$14\sqrt{61} \vee 5$

$\sqrt{61} \vee$

$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$

$22 \times 47$
$44$
$188$
$188$
$1034$

$\frac{15 - 2\sqrt{21}}{47} < \frac{2}{7} < x < \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \vee$

$41 \cdot 15 + 2\sqrt{21} \cdot 41 \vee 47 \cdot 11.$

$(7t - 11)(7t + 9)$ $\quad (49t + 99)(t - 81)$

$110$
$41$
$69$

$41 \cdot (123 - 330)$ $\quad 3 \cdot 41(110 - 41) = 3 \cdot 41 \cdot$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 ■ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$$

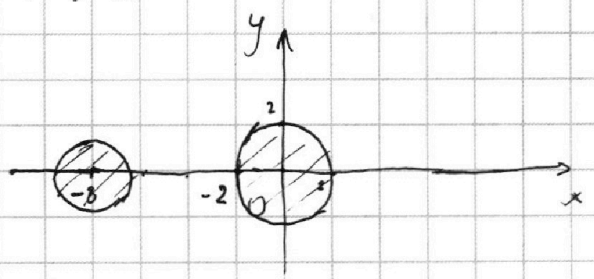
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \le 1 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \ge 1 \\ x^2 + y^2 \ge 4 \end{cases} (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим графически

1) $y = ax + 10b$ — прямая, если $a \neq 0$ и точка если $a = 0$

2) $(x+8)^2 + y^2 = 1$ — окружность с центром $(-8; 0)$ радиусом 1

3) $x^2 + y^2 = 4$ — окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 2




1) для первой системы в совокупности

$(x+8)^2 + y^2 \le 1$

от реш. явл. внутр. область окр. вкл

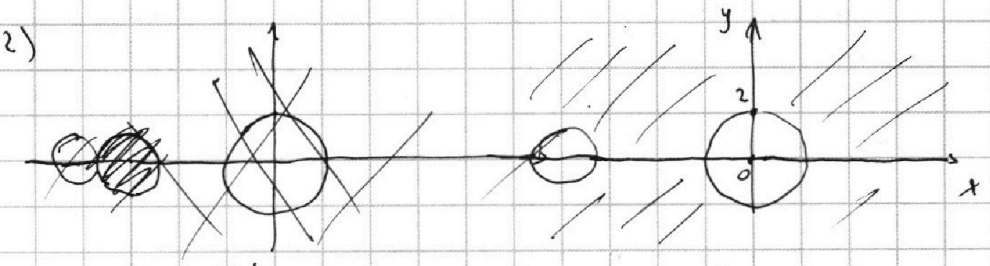
(методом проб. т.

$(-8; 0)$; $(-8+8)^2 + 0^2 = 0 \le 1$

аналог для $x^2 + y^2 \le 4$

Заметим что области не пересекаются значит (1) система реш. не имеет.

2)




для (2) реш. явл. инвертиров. пр-во.

Прямая не может пересекать выдел. область в 2х точках. одна точка тоже.

Значит таких $a$ не существует

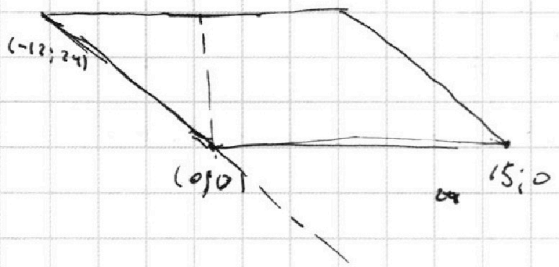
Ответ $\varnothing$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ




$y_1$
$y_2$ $\leq 24.$

$y_7.$

$24 = (-12)\,k$

$k = -2$

$y = -2x \geq 0$

$y + 2x \geq 0$

$y_2 = 2x + b$

$0 = -2 \cdot 15 \qquad b = 30$

$y + 2x - 30 \leq 0$

$0 \leq y + 2x \leq 30$

$(y_2 - y_1)(x$

$y_2 + 2x_2 - (2x_1 + y_1) = 12$

$(0;30) \qquad (0;30)$

$30$

$y_2 + 2x_2 = 5$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 13 \\ 9 \\ \hline 117 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \times 12 \\ 7 \\ \hline 84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 117 \\ + 84 \\ \hline 201 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 201 \\ - 12 \\ \hline 186 \end{array}$$

1

$\times 12$
7