



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доеке записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 | 2 и 7 простые числа,

значит  $a, b, c$  могут состоять только

из 2 и 7 в разложении по пр. множителям,

и если в разложении есть другие множители,  
то это не соответствует условию

~~тогда~~  $a_1 : m \Rightarrow k a_1 : m$

в разложении  $a, b, c$  нам нужно подобрать  
 $m$  и  $n$  чтобы 2 и 7 делили

$a_2, b_2, c_2$  - делители 2 в разложении

$a_7, b_7, c_7$  - делители 7 в разложении

мы имеем  $a_2, b_2, c_2$  - мин. тогда

$$a_2 + b_2 = 15$$

$$b_2 = 17 - c_2$$

$$a_2 + c_2 = 23$$

$$a_2 + 17 - c_2 = 15$$

$$a_2 + c_2 = 17$$

$$a_2 = 23 - c_2$$

$$23 - c_2 + 17 - c_2 = 15$$

мин 1 из 4

$$2c_2 = 25$$

$$c_2 = 12,5 \quad a_2 = 10,5 \quad b_2 = 4,5$$

целых делителей быть не может

мы можем увелич. одну ст. на 0,5, и увеличим две на 0,5  
тогда мы не изменим сумму

мы можем увелич. две ст. на 0,5: одну увелич. на 0,5  
параметры  $a_2 = 11 \quad b_2 = 5 \quad c_2 = 12 \quad abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

$$abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$n_{\min} = 39 \quad \text{пример: } a_7 = 16 \quad b_7 = 0 \quad c_7 = 23$$

$$\frac{abc}{abc_{\min}} = \frac{2^{28} \cdot 7^{39}}{2^{23} \cdot 7^{39}}$$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 | продолжение  $abc_{min} = 2^{28} 7^{39}$

получаем при

$$a = 2^{11} 7^{16}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{12} 7^{23}$$

ММТ 2034



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$\frac{a}{b}$  несократима ①

тогда  $\text{НОД}(a; b) = 1$  наибольший общий делитель

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

числитель и знаменатель  
можно сократить на  $m$  только если

$$(a+b) : m \Rightarrow (a+b)^2 : m$$

$$(a^2 - 7ab + b^2) : m$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$$

$$(a+b)^2 : m$$

значит и  $9ab : m$

если  $ab : m$ , то получаем противоречие с условием ①

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad \text{одна из этих дробей делится на } m$$
  
$$\text{и } \frac{a}{b} \text{ несократима}$$

тогда  $9 : m$  значит  $\max m = 9$

$$\boxed{\text{Ответ: } \max m = 9}$$

Леша 3 из 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

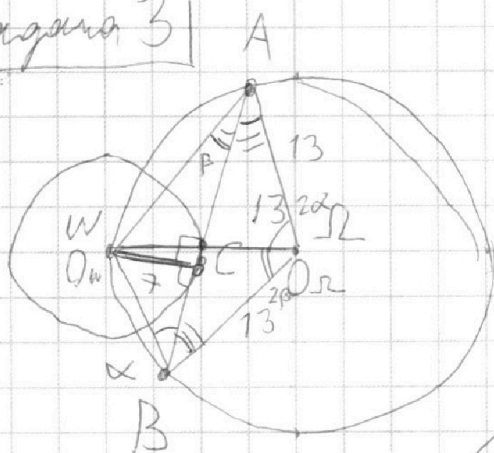
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



$$R_W = 7 \quad R_\Omega = 13$$

из-за касания окружностей

$$\angle ACO_w = 90^\circ$$

$$O_w O_\Omega, AO_\Omega, BO_\Omega = 13$$

$$\angle AO_\Omega O_w = \angle ABO_w$$

$$\angle O_w O_\Omega B = \angle O_w AB$$

поэтому из-за касания

$$\frac{BC}{O_w C} = \frac{7}{7}$$

$$BC = 7$$

$$AB = \frac{24}{7} BC = 24$$

Ответ:  $AB = 24$

ММ 9 из 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

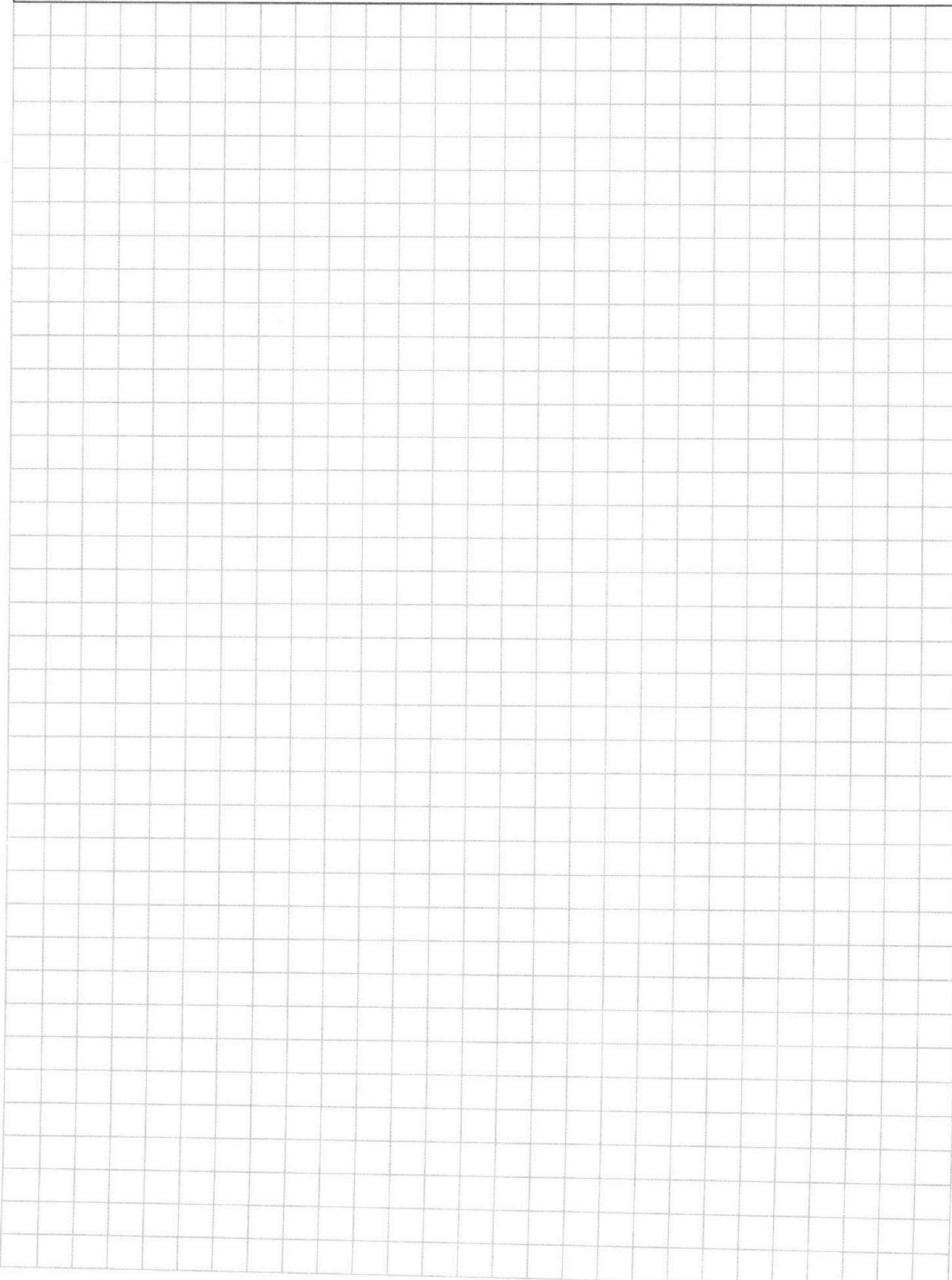
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

