



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**

№1

Чистовик

Пусть

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \quad (1) \quad \text{и} \quad a = 2^x \cdot 7^y / 4,$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \quad (2)$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \quad (3)$$

тогда

$$b = 2^{14-x} \cdot 7^{10-y} \quad (\text{из } (1) \text{ и } (4))$$

$$c = 2^{20-x} \cdot 7^{37-y} \quad (\text{из } (3) \text{ и } (4))$$

$\Rightarrow$

из (2)

$$34-2x=17$$

$$x = \frac{17}{2}$$

$$x \notin \mathbb{Z}$$

$$47-2y=17$$

$$y = 15$$

$$b = \frac{2^{14-x}}{7^{-5}} \notin \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$

$$b = 2^{14-x} \cdot 7^{10-y} \cdot z,$$

$$\text{где } z = 2^m \cdot 7^n.$$

из (2)

$$\Rightarrow 14-x+m+20-x=17$$

$$x = \frac{17+m}{2} \in \mathbb{Z}$$

~~Минимальная степень будет, если  $14-x+m=0$~~

Минимальная

степень будет, если

$$14-x+m=0$$

$$14 - \frac{17+m}{2} + m = 0$$

$$28-17-m+2m=0$$

$$m = -11$$

$$x = 3$$

$\Rightarrow$

из (2)

$$10-y+n+37-y=17$$

$$y = \frac{30+n}{2} \in \mathbb{Z}$$

Минимальная

степень будет, если

$$10-y+n=0$$

$$20-30-n+2n=0$$

$$n = 10$$

$$y = 20$$

$$abc = 2^x \cdot 7^y \cdot 2^{20-x} \cdot 7^{37-y} \cdot 2^{14-3} \cdot 7^{10-20} \cdot 2^{-11} \cdot 7^{-11} = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } 2^{20} \cdot 7^{37}$$

стр. 1 из 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☒

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Числовик

№2

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)(a-7b)+8b^2} = \frac{\frac{1}{b}\left(\frac{a}{b}+1\right)}{\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{b}-7\right)+8} = \frac{\frac{a}{b}+1}{b\left(\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{b}-7\right)+8\right)}$$

т.к.  $\frac{a}{b}$  — не сократимая дробь

Можно поделить на  $\left(\frac{a}{b}+1\right)$ , если  $8:(a+b)$ .

$$m = \left(\frac{a}{b}+1\right) \cdot b = a+b \quad (\text{т.к. сначала сократили на } b)$$

т.е.  $8:m \Rightarrow$  наибольшее  $m=8$  (при котором

можно сказать, что и числитель, и знаменатель можно сократить на  $m$ ).

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Чистовик*

$$t = 2x^2 + 2x + 1$$

$$k = 2 - 7x$$

$$t + k = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\sqrt{t+k} - \sqrt{t} = k$$

$$\begin{cases} t+k = (k+\sqrt{t})^2 \\ k+\sqrt{t} \geq 0 \end{cases}$$

$$k+\sqrt{t} \geq 0$$

$$\begin{cases} t+k = k^2 + 2k\sqrt{t} + t \\ k+\sqrt{t} \geq 0 \end{cases}$$

$$k+\sqrt{t} \geq 0$$

$$\begin{cases} k(k+2\sqrt{t}-1) = 0 \\ k+\sqrt{t} \geq 0 \end{cases}$$

$$k+\sqrt{t} \geq 0$$

$$\begin{cases} 2-7x = 0 & (1) \\ 2-7x+2\sqrt{2x^2+2x+1}-1=0 & (2) \\ 2-7x+\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$2-7x+\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0$$

$$(1): x = \frac{2}{7} \quad \left( \sqrt{2\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2\cdot\frac{2}{7} + 1} + 2 - \frac{7\cdot 2}{7} > 0 \right)$$

- верно

$$(2): 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1$$

$$\begin{cases} 4(2x^2+2x+1) = 49x^2 - 14x + 1 \\ 7x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x \geq \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = 121 + 123 = 244$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{244}}{41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$2-7x+\sqrt{2x^2+2x+1} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} < 0 \quad x \geq \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{11+2\sqrt{61}}{41} = x$$

$$1 \neq 2x^2+2x+1$$

$$0 \neq 2x^2+2x$$

$$(x > 0)$$

$$\Rightarrow 2-7x+\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0 \text{ не выполнено}$$

Ответ:  $\frac{2}{7}$ .

стр. 2 из 7





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

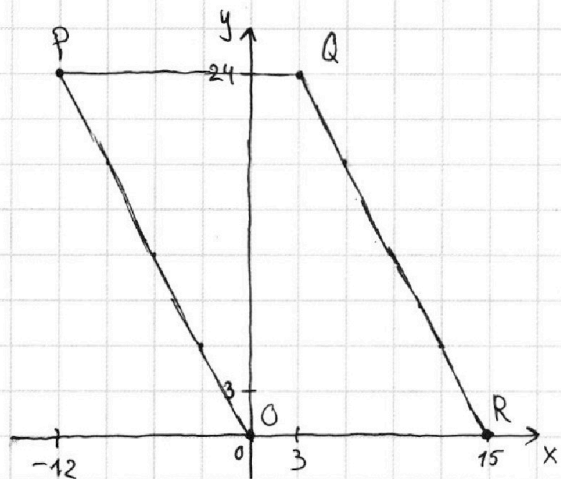
|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чистовик

№5



Всего целочисленных точек:

$$24 \cdot 15 = 360.$$

$$y_1 \in [0; 24] \text{ и } y_2 \in [0; 24].$$

$$x_1 \in [-12; 15] \text{ и } x_2 \in [-12; 15].$$

$$y_2 - y_1 = 12 + 2(x_1 - x_2) \leq 24$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

стр. 6 из 7

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

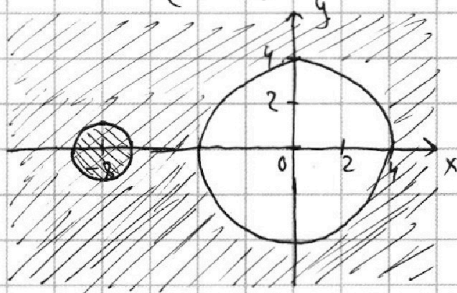


Чистовик

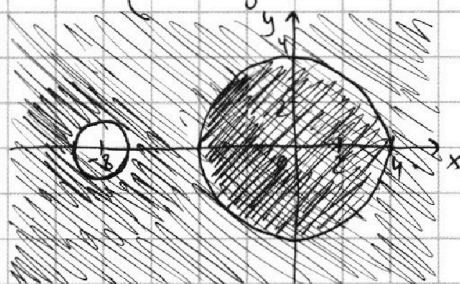
N6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

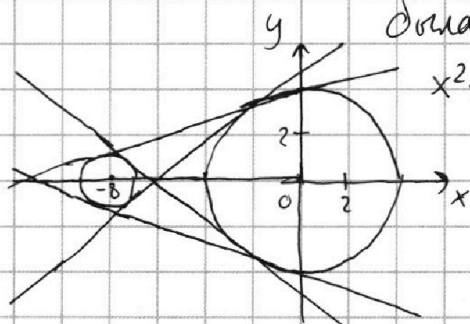
(2): 1)  $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$



2)  $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$



Чтобы было у системы ровно 2 решения,  
необходимо, чтобы прямая вида  $y = ax + 10b$   
была общей касательной 2-х кр.



$x^2 + y^2 = 4$  и  $(x+8)^2 + y^2 = 1$ .

4 варианта касательных

1)  $\begin{cases} y_1 = ax_1 + 10b \\ (x_1+8)^2 + y_1^2 = 1 \end{cases}$  — 1 реш. (т.е. 1 пересек.)

$x_1^2 + 16x_1 + 64 + a^2x_1^2 + 20abx_1 + 100b^2 = 1$

$(a^2+1)x_1^2 + 2(8+10ab)x_1 + 63+100b^2 = 0$

$\frac{D}{4} = 64 + 160ab + 100a^2b^2 - 63a^2 - 63 - 100a^2b^2 - 100b^2 =$

$= 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0$  (т.к. 1 реш.)

$63a^2 - 160ab + 100b^2 - 1 = 0$

~~$63a^2 - 160ab + 100b^2 - 1 = 0$~~

$\frac{D}{4} = 6400a^2 - 6300a^2 + 100 \geq 0$

$b = \frac{80a \pm 10\sqrt{a^2+1}}{100} = \frac{8a \pm \sqrt{a^2+1}}{10}$  (верно для  $\forall a$ )

см. продолжение  
стр. 3 из 7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

Чистовик

$$2) \begin{cases} y_2 = ax_2 + 10b \\ x_2^2 + y_2^2 = 4 \end{cases} \quad 1 \text{ реш. (1 пересек)}$$

$$x_2^2 + a^2 x_2^2 + 20abx_2 + 100b^2 - 4 = 0$$

$$(a^2 + 1)x_2^2 + 20abx_2 + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 4a^2 + 4 - 100b^2 = 0$$

$$a^2 + 1 = 25b^2$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$1. \quad \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = 8a$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64a^2 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$2. \quad \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$3\sqrt{a^2 + 1} = 8a$$

$$\begin{cases} 9a^2 + 9 = 64a^2 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$3. \quad -\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$3\sqrt{a^2 + 1} = -8a$$

$$\begin{cases} 9a^2 + 9 = 64a^2 \\ a \leq 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$4. \quad -\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = -8a$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64a^2 \\ a \leq 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{1}{\sqrt{63}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

стр. 4 из 7





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



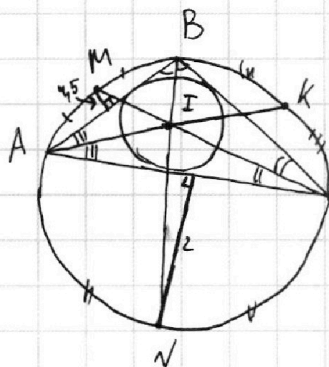
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Чистовик*

№ 7

AI - ?



$$\begin{aligned} 1) \quad & \angle ABN = \angle NBC \\ & \angle ACM = \angle MCB \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} \text{т.к. опираются} \\ \text{на равные} \\ \text{дуги} \end{array} \right)$$

$$2) \Rightarrow BN \cap MC = I \quad (I - \text{центр вписанной окр.})$$

$$3) \quad K \in AI$$

$$\angle BAK = \angle KAC$$

$$\Rightarrow BK = KC \quad (\text{т.к. равные углы})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{aligned} a &= 2^x \cdot 7^y \\ c &= 2^{20-x} \cdot 7^{37-y} \\ b &= 2^{14-x} \cdot 7^{10-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{17}{2} \\ y &= 15 \end{aligned}$$

~~20-x=17~~

$$a = 2^x \cdot 7^y$$

$$c = 2^{20-x} \cdot 7^{37-y}$$

$$b = 2^{14-x} \cdot 7^{10-y} \cdot z$$

$$z = 2^m \cdot 7^n$$

$$34-2x=17$$

$$\frac{17+m}{2} = x$$

$$m=1$$

$$x=9$$

$$10-y+37-y=17$$

$$30=2y$$

$$y=15$$

$$\begin{aligned} n &= 5 \end{aligned}$$

$$2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^5 \cdot 2 = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$14-x+m \geq 0$$

$$14 \geq m+x$$

$$14 \geq m + \frac{17+m}{2}$$

$$28 \geq 2m + 17 + m$$

$$11 \geq 3m$$

$$\frac{11}{3} \geq m$$

$$\frac{45+17}{2} = 31$$

$$45+17-31=28$$

$$4+3=7$$

$$5+1=6$$

$$10-y+n+37-y=17$$

$$40=2y+n$$

$$y = \frac{40-n}{2}$$

$$11 \geq 2+m$$

$$14-3-7=4$$

$$14-1-8=5$$

$$14+1-9=6$$

$$14-x+m=0$$

$$14 - \frac{17+m}{2} + m = 0$$

$$28-17-m+2m=0$$

$$11+m=0$$

$$m=-11$$

$$\begin{aligned} 10-y+n &= 17 \\ y &= 10-n \end{aligned}$$

$$10-y+n=0$$

$$y=10+n$$

$$y=n+10$$

$$2n+20=30+n$$

$$n=10$$

$$10-30+20$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$ab \equiv 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc \equiv 2^{19} \cdot 7^{19}$$

$$ac \equiv 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$abc = ?$

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{(a+b)(a-7b) + 8b^2}{(a+b)(a-7b) + 8b^2}$$

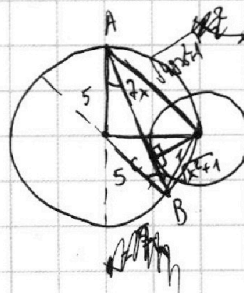
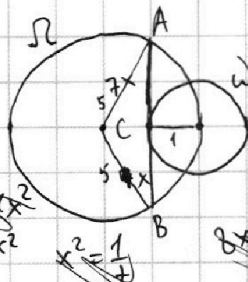
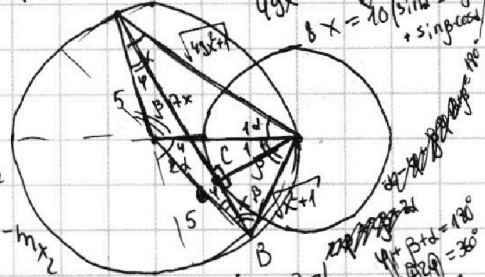
$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{a-7b}$$

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{a-7b}$$

$$a+b = mx_1$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = mx_2$$

$$8ab = m^2 x_1^2 - mx_2$$



$$ab = \frac{m^2 x_1^2 - mx_2}{8}$$

$$(mx_1 - a)a = \frac{m^2 x_1^2 - mx_2}{8}$$

$$8mx_1 a - 8a^2 = m^2 x_1^2 - mx_2$$

$$8a^2 - 8mx_1 a + mx_2 - m^2 x_1^2 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$t = 2x^2 + 2x + 1$$

$$t - 7x = 2x^2 - 5x$$

$$\frac{D}{4} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{4} = 10$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 40$$

$$x^2 + 1 = 1600$$

$$x^2 = 1599$$

$$x = \sqrt{1599}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 7x = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 14x\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 49x^2 = 2x^2 + 2x + 1 + 4 + 4\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$14x\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\sqrt{t - 7x} - \sqrt{t} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{t - k} - \sqrt{t} = k$$

$$\sqrt{t - k} = (k + \sqrt{t})^2$$

$$k + \sqrt{t} \geq 0$$

$$k = 2 - 7x$$

$$k - k = k^2 + 2\sqrt{t}k + t$$

$$k^2 + 2\sqrt{t}k + t = 0$$

$$k(k + 2\sqrt{t} + 1) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

$$\begin{cases} 2-7x=0 \\ 2-7x+2\sqrt{2x^2+2x+1}+1=0 \\ 2-7x+\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-3$$

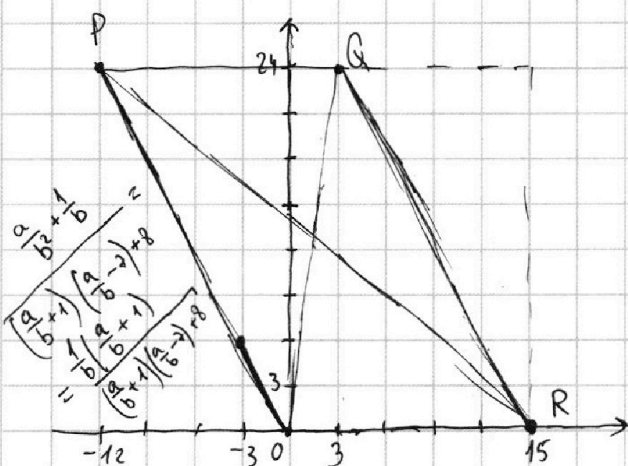
$$\begin{cases} 4(2x^2+2x+1) = 49x^2-42x+9 \\ 7x+3\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 41x^2-50x+5=0 \\ x\geq -\frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = 625-205=420$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{420}}{41}$$

$$= \frac{25 \pm 2\sqrt{205}}{41}$$



$$\frac{a}{b+1} \cdot b = \frac{a}{b+1} \cdot \left(\frac{a}{b} - 1\right) + 8$$

$$= \frac{a}{b+1} \cdot \left(\frac{a-b}{b}\right) + 8$$

$$y = -2x$$

$$y = -2x + 30$$

$$27 \text{ var } x$$

$$24 \text{ var } y$$

$$y_2 = -2x_2 + 30$$

$$y_1 = -2x_1 + 30$$

$$y_2 - y_1 = 12 + 2(x_2 - x_1)$$

$$2(x_1 - x_2) \leq 12$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$y = kx$$

$$28 = k \cdot 3$$

$$y = kx + b$$

$$24 = -12k + b$$

$$0 = 15k + b$$

$$b = -15k$$

$$-24k = 24$$

$$k = -1$$

$$b = 15$$

$$y = -x + 15$$

$$y_1 \leq 24$$

$$y_2 \leq 24$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$2x_1 \geq -y_1$$

$$-2x_1 \leq y_1$$

$$-2x_1 + 30 \geq y_1$$

$$2x_1 - 30 \leq y_1$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$y_2 - y_1 = 12 + 2(x_2 - x_1)$$

$$y_2 \geq -2x_2$$

$$2x_1 - 2x_2 + 30 \geq y_2 - y_1$$

$$12 - 2x_2 + 2x_1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

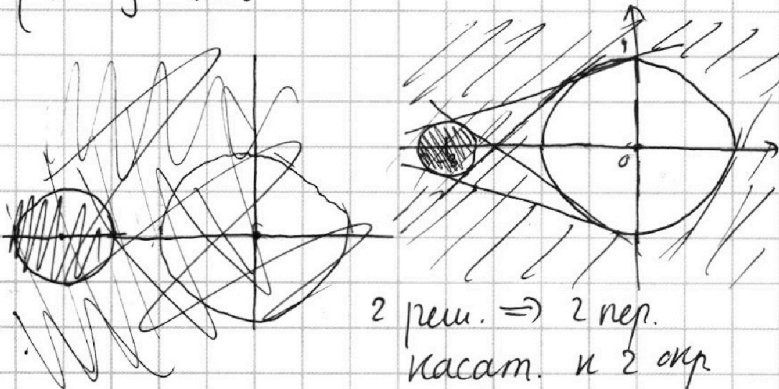


Черновик

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$1. \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$



2 реш.  $\Rightarrow$  2 пер.  
касат. и 2 окр.

4 вар.

$$\begin{cases} (x_1+8)^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + y_2^2 = 4 \end{cases}$$

$$x_1^2 + 16x_1 + 64 + y_1^2 = 1$$

$$x_1^2 + 16x_1 + 64 + 4 - 4 = 1$$

$$x_1^2 + 16x_1 + 64 = 1$$

$$x_1^2 + 16x_1 + 63 = 0$$

$$x_1 = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 63}}{2} = \frac{-16 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = -3 \text{ or } x_1 = -9$$

$$16x_1 + 64 = -3$$

$$16x_1 = -67$$

$$x_1 = -\frac{67}{16}$$

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + 10b \\ y_2 = ax_2 + 10b \end{cases}$$

$$1) x_1^2 + 16x_1 + 64 + a^2x_1^2 + 20abx_1 + 100b^2 = 1$$

$$(a^2+1)x_1^2 + 2(10ab+8)x_1 + 63 + 100b^2 = 0$$

1 реш.

$$\frac{D}{4} = 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 63 - 100b^2a^2$$

$$= -100b^2 + 160ab + 1 = 0$$

$$100b^2 - 160ab - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 6400a^2 + 100 - 6300a^2 = 100a^2 + 100 \geq 0$$

$$100a^2 \geq -100$$

$$a^2 \geq -1$$

$$2) x_2^2 + a^2x_2^2 + 20abx_2 + 100b^2 = 4$$

$$(a^2+1)x_2^2 + 20abx_2 + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 100a^2b^2 - 100b^2a^2 + 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = 25b^2 - 1$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{a^2+1}}{5}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{a^2+1}}{5}$$

$$a^2+1 = 8a^2$$

$$a \geq 0$$

$$7a^2 = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2+1}}{10}$$

$$\sqrt{a^2+1} = 8a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Черновик*

$$a+b = m \cdot k$$

$\frac{k}{n}$  — не сопр.

$$a^2 - 6ab + b^2 = m \cdot n$$

$$(a+b)^2 - 8ab = mn$$

$$k^2 \cdot m^2 - n \cdot m - 8ab = 0$$

$$k^2 m^2 - n \cdot m - 8a(mk - a) = 0$$

$$k^2 \cdot m^2 - (n + 8ak)m + 8a^2 = 0$$

$$D = (n + 8ak)^2 - 32a^2 k^2 =$$

$$= n^2 + 16ank + 32a^2 k^2 = \ell^2$$

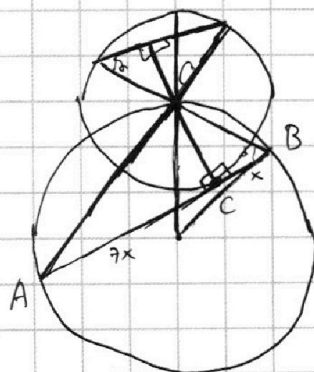
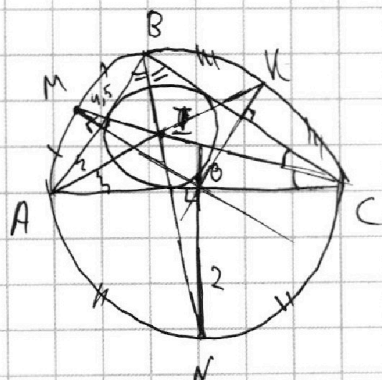
$$m = \frac{n + 8ak \pm \ell}{2k^2}$$

$$a \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 6$$

$$m = \frac{a}{b} \cdot \frac{1 + \frac{1}{(\frac{b}{a})^2} - \frac{6ab}{a}}{1 + \frac{1}{(\frac{b}{a})^2} - \frac{6ab}{a}}$$

AI-?



22-