



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы найти минимум abc , предположим,
что ab , bc и ac это ~~целые~~ равные своим
делителям, указанным в условии. $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$,
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{13}$, $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$.

Порешкомив их всех, получим квадрат зна-
чения abc : $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$.

Извлекаю корень из данного выражения, но
не смогу получить натур. степень двоек, по-
этому одно из исходных произведений будет в
2 раза больше, а $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \quad \text{Занимем условие сократи-}$$

мости на m : $\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2-9ab : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 9ab : m \end{cases}$

т.к. a и b взаимно просты данное будет рас-
скапываться числителю в разложении на простые
со множители.

$$9ab : m \Leftrightarrow ab \cdot 3^2 : m \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot b^2 \cdot 3^2 : m, \text{ т.к.}$$

$\frac{a}{b}$ несократима, но отбросим её.

$$b^2 \cdot 3^2 : m \Rightarrow m = \{1; 3; 9; 3b; 9b; 3b^2; 9b^2\}$$

но не забудем про условие $a+b : m$ и то,
что $\frac{a}{b}$ — несократима. Следовательно $m \neq 3b, 9b$,

т.к. $a < b \Rightarrow a+b < 2b$. И также $m \neq 3b^2, 9b^2$,
потому что эти числа ещё больше, в условии
наатуральности b .

Значит $m = \{1; 3; 9\}$. Максимальное из них 9.

Пример: $\frac{a}{b} = \frac{4}{5} \quad a+b = 4+5 : 9$

$$9ab = 9 \cdot 4 \cdot 5 : 9$$

Ответ: $m = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Замена: $a = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$; $b = 1 - 9x$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b \quad || \times \times 2 \Rightarrow a - 2\sqrt{a^2 - ab} + a - b = b^2$$

$$b^2 - 2a + b = -2\sqrt{a^2 - ab} \quad || \times \times 2 \Rightarrow b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 + b^3 - 4ab = 4a^2 - 4ab$$

$$b^4 + 2b^3 + b^2(1 - 4a) = 0 \quad || : b^2 \Rightarrow b^2 + 2b + 1 - 4a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 = 4a \Rightarrow b+1 = 2\sqrt{a}$$

Обратная замена: $9x = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad || \times \times 2$

$$81x^2 - 12x^2 + 24x - 8 = 0 \Leftrightarrow 69x^2 + 24x - 8 = 0$$

$$D = 24^2 + 4 \cdot 8 \cdot 69 = 2784$$

$$x_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{2784}}{138}$$

Подставив в исходное оба корня
удовлетворяют ОДЗ.

Не забудем, что когда мы делили на b^2 , но
возможна ситуация $b = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Ответ: $x = \left\{ \frac{-24 \pm \sqrt{2784}}{138} ; \frac{1}{9} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

Потенци для каждого пар-ма мы можем рас-
смотреть 25 случайных разности координат от

$$x_2 - x_1 = 16; \quad y_2 - y_1 = -18 \quad \text{до} \quad x_2 - x_1 = -6; \quad y_2 - y_1 = -26$$

Заметим соотношение, выполняющееся для кон-
кретных k в каждом случае: $k = (16 - |x_2 - x_1| + 1) \cdot$
 $\cdot (25 - |y_2 - y_1| + 1)$. Получим произведение для каждо-
го случая константу Σ : $\Sigma = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11 +$

$$+ 3 \cdot 13 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 17 + 6 \cdot 19 + 7 \cdot 21 + 8 \cdot 23 + 9 \cdot 25 + 10 \cdot 27 + 11 \cdot 29 +$$

$$+ 12 \cdot 31 + 13 \cdot 33 + 14 \cdot 35 + 15 \cdot 37 + 16 \cdot 39 + 17 \cdot 41 + 18 \cdot 43 + 19 \cdot 45 +$$

$$+ 20 \cdot 47 + 21 \cdot 49 + 22 \cdot 51 + 23 \cdot 53 + 24 \cdot 55 + 25 \cdot 57 = 9(1+25+15) +$$

$$+ 11(1+2+16+25) + 13(3+5+21) + 15(4+16+17) + 17(5+13) +$$

$$+ 19(6+14) + 21 \cdot 7 + 23(8+12) + 25 \cdot 10 + 14 \cdot 7 + 12 \cdot 3 = 3471$$

Также не забудем добавить константу произ-
ведение на два, потому что данный перебор по-
ходит и для точки A , и для точки $B (B(x_1, y_1)$
 $A(x_2, y_2))$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1/5

16/89

48/136

15

$$3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 9x + 2 - 1$$

$$a = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b$$

$$b = 9x - 1 \quad 3 \cdot \frac{1}{81} - \frac{1}{3} + 120 = 24$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad 3 \cdot \frac{1}{25} + \frac{2}{3} + 2 \geq 0$$

$$3 \cdot \frac{1}{25} - 1,2 + 2 \geq 0 \quad 4a^2(1 - 2ab + ab)$$

$$a - 2\sqrt{a^2 + ab} + a + b = b^2$$

$$b^2 - 2a - b = -2\sqrt{a^2 + ab}$$

$$b(b-1) = 2a(1-\sqrt{ab})$$

$$b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 - 2b^3 + 4ab = 4a^2 + 4ab$$

$$b^4 - 2b^3 + b^2(1-4a) = 0 \quad || : b^2$$

$$9x - 1 \geq 0$$

$$b^2 - 2b + 1 = 4a$$

$$b^2 - 2b + 1 = 4a \quad (\Rightarrow) \quad (b-1)^2 = 4a \quad (\Rightarrow) \quad b-1 = 2\sqrt{a}$$

$$9x - 2 = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$3x^2 - 6x + 2$$

$$x = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$81x^2 - 36x + 4 = 12x^2 - 24x + 8$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow S = 144 + 1104 = 1248$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{489}}{138}$$

$$4\sqrt{99} \approx 36 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\cdot 39$$

$$4\sqrt{99}$$

$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$1) \quad x_2 - x_1 = 7; \quad y_2 - y_1 = 0$$

$$2) \quad x_2 - x_1 = 6; \quad y_2 - y_1 = 2$$

$$3) \quad x_2 - x_1 = 5; \quad y_2 - y_1 = 4$$

$$4) \quad x_2 - x_1 = 4; \quad y_2 - y_1 = 6$$

$$5) \quad x_2 - x_1 = 3; \quad y_2 - y_1 = 8$$

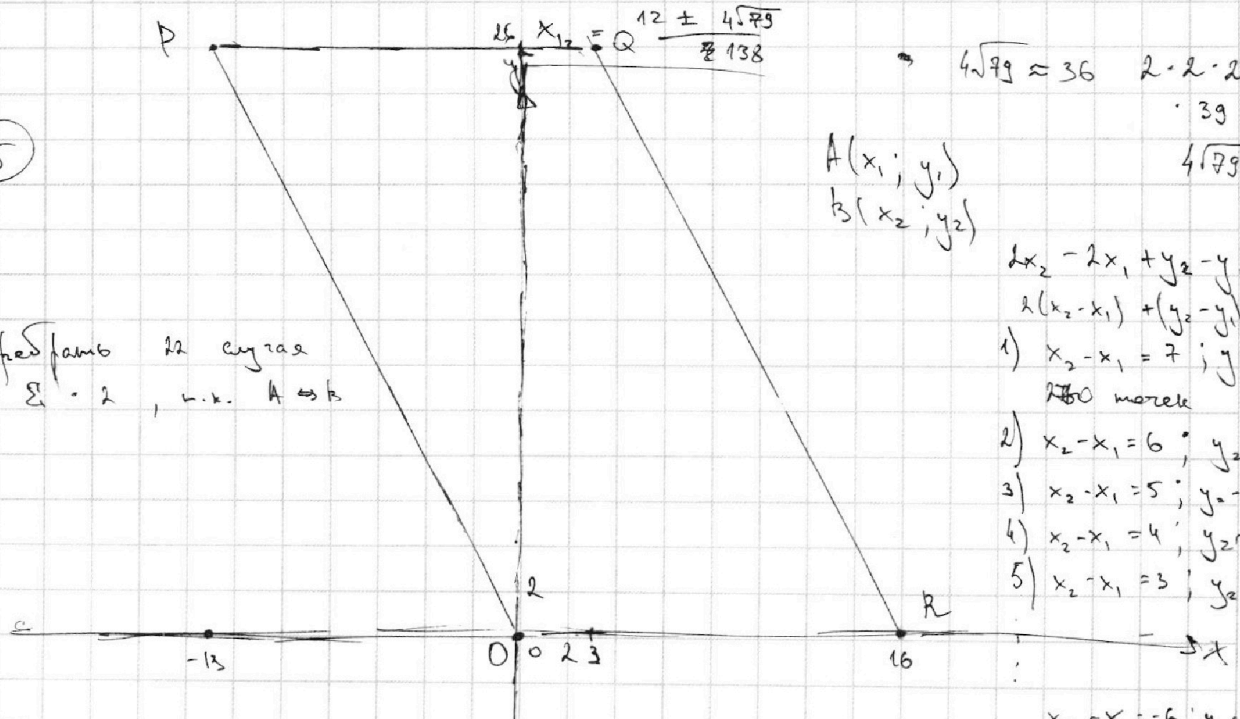
$$x_2 - x_1 = -6; \quad y_2 - y_1 = -18$$

$$x_2 - x_1 = 16; \quad y_2 - y_1 = -18$$

14
x 14
88
14
158

5

треугольник 22 см
и S = 2, т.к. A ↔ B



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



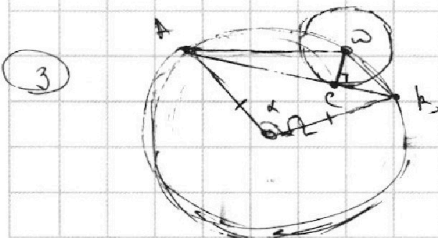
① $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$; $bc : 2^{17} \cdot 7^{16}$; $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$ $\min(abc)?$

$(abc)^2 :$

$2^{55} \cdot 7^{88} = (abc)^2 \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34} - \min$

② $\frac{a}{b} - \text{несообразна}$ $\max(w)?$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$



$AC : CB = 17 : 7$

$AB = 24x$

$AB?$

$r = 7$; $R = 13$

$OA = OB = 13$

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \alpha$

⑤ $\begin{matrix} 7 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \\ (260 + 9 + 12 + 39 + 60 + 38 + 114) \end{matrix}$

$2(16 - (x_2 - x_1) + 1) + 2(26 - (y_2 - y_1)) = 14$ $(16 - (x_2 - x_1) + 1)(26 - (y_2 - y_1))$

$32 - 2x_2 + 2x_1 + 2 + 26 - y_2 + y_1 = 14$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$6058 + 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14 \Rightarrow 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = -46$

$\sum = 9(1 + 25 + 15) + 11(2 + 25 + 1) + 13(3 + 21 + 5) + 15(4 + 17 + 16) + 17(5 + 13) + 19(6 + 14) + 21(7) + 23(8 + 12) + 27 \cdot 10 + 14 \cdot 7 + 12 \cdot 3 =$

$= 363 + 473 + 377 + 555 + 306 + 380 + 147 + 460 + 440 +$

$+ 98 + 36 = 850 + 730 + 440 + 380 + 1071 = 3471$

$\sum \cdot 2 = 6942 \text{ на пол}$

- 1. 9 16 ✓
- 2. 11 15 ✓
- 3. 15 14 ✓
- 4. 15 15 ✓
- 5. 12 12 ✓
- 6. 18 11 ✓
- 7. 21 10 ✓
- 8. 23 9 ✓
- 9. 25 8 ✓
- 10. 27 7 ✓
- 11. 29 6 ✓
- 12. 31 5 ✓
- 13. 33 4 ✓
- 14. 35 3 ✓
- 15. 37 2 ✓
- 16. 39 1 ✓
- 17. 41 0 ✓
- 18. 43 -1 ✓
- 19. 45 -2 ✓
- 20. 47 -3 ✓
- 21. 49 -4 ✓
- 22. 51 -5 ✓
- 23. 53 -6 ✓

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a - 2\sqrt{a^2 - ab} + a - b = b^2$$

$$b^2 - 2a + b = 2\sqrt{a^2 - ab}$$

$$b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 + b^3 - 4ab = 4a^2 - 4ab$$

$$b^4 + b^3 + b^2(1 - 4a) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} \\ \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} \end{array} \right\} 0$$

$$\frac{3}{81} - \frac{2}{3} + 2 ?$$

$$\frac{3}{81} + \frac{1}{3} + 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a+b \text{ in } (a+b)^2 - 9ab \text{ in}$$

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь

$$a+b : m \quad \text{и} \quad \max(m)$$

$$9ab : m$$

$$\frac{9a}{b} : m \Rightarrow \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{9} \quad 9ab \geq m \cdot k$$

a или b - простое

$$(a; b) = 1$$

$$4 + 5 : 9$$

$$4 \cdot 5 \cdot 9 : 9$$

$$9 \cdot a \cdot b = \frac{a \cdot b \cdot 3^2}{m} \quad 2+4 : 6$$

$$m \quad 72 : 6$$

$$\Rightarrow m = 3^2$$

$$m = b^2 \quad \text{не, можем быть, т.к. } a+b < b^2$$

$$m = 3b/9b \quad \text{нет, } a < b$$

из того, что дробь несократима $\Rightarrow m = 9$

$$\text{Пример } \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

$$3x^2 - 6x + 2$$

$$3 \cdot \frac{1}{64} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \geq 0$$

$$3 \cdot (-\frac{1}{2}) + 6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \geq 0$$

$$\sqrt{174} \approx 13$$

$$x_1 \approx \frac{-24 + 42}{138} \approx \frac{1}{3}$$

$$x_2 \approx \frac{-24 - 42}{138} \approx -\frac{1}{2}$$

$$= 2784$$

$$\frac{9}{69} \quad \frac{3}{23}$$

$$1784 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 87$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 97$$

$$24^2 = (2^3 \cdot 3)^2 = 2^6 \cdot 3^2$$

$$69 = 3 \cdot 23$$

$$32 = 2^5$$

$$\frac{66}{138} = \frac{34}{69}$$

$$4\sqrt{174}$$



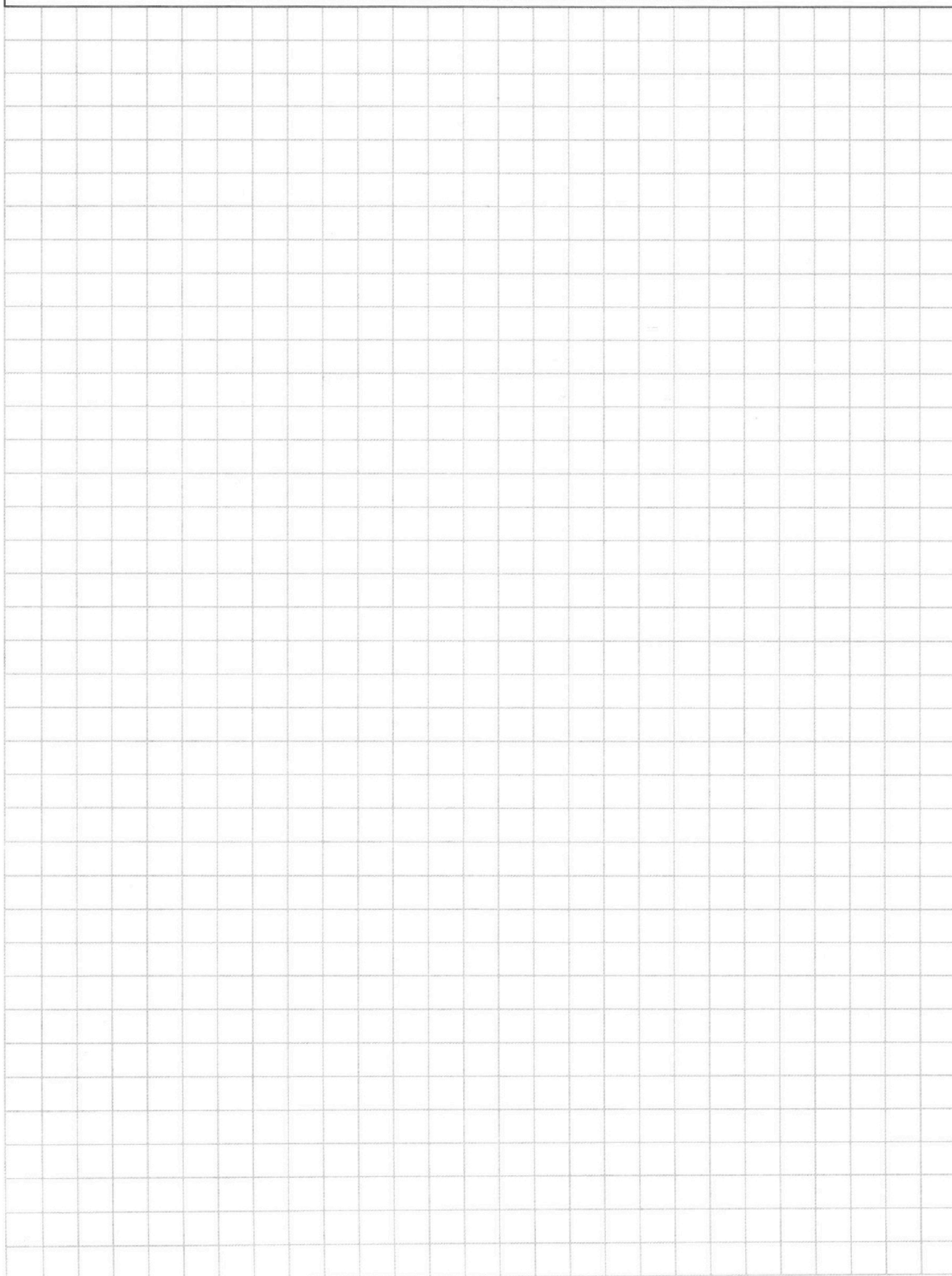
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





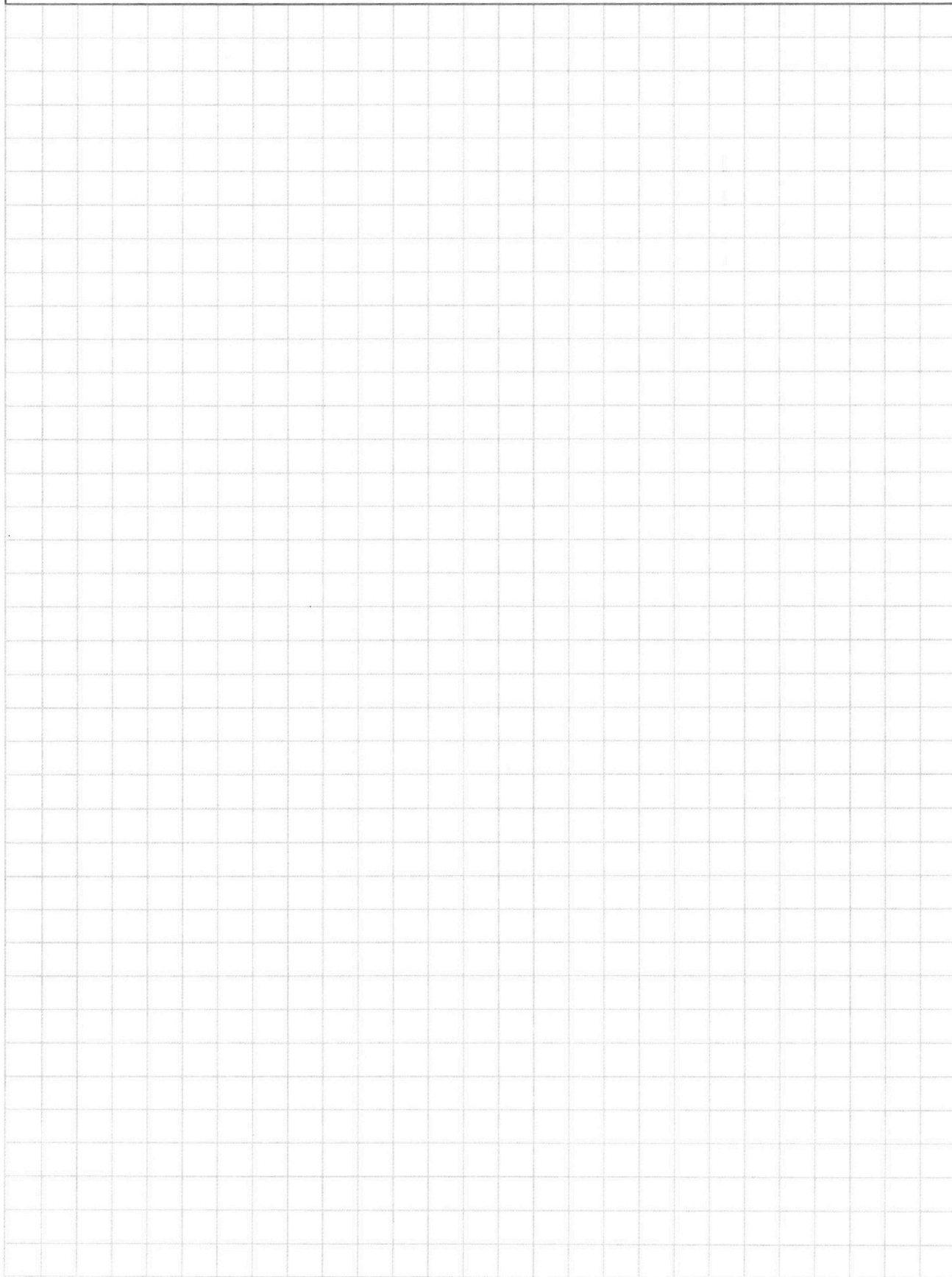
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

