



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

числовык

№1

$$\begin{aligned} ab &= k 2^{16} 7^4 \\ bc &= n 2^{17} 7^{18} \\ ca &= m 2^{23} 7^{39} \\ \min(abc) &? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a, b, c &\in \mathbb{N} \\ k, n, m &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\min(abc) = X.$$

нужно ↑

$$\begin{cases} x \geq 2^{23} 7^{39} \\ x \in \mathbb{N} \\ x^2 = k n m 2^{55} 7^{68} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{k n m} 2^{27} 7^{34} \\ \sqrt{k n m} \in \mathbb{N} \\ \sqrt{k n m} 2^{27} 7^{34} \geq 2^{23} 7^{39} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{k n m} 2^{27} 7^{34} \\ \sqrt{k n m} \in \mathbb{N} \\ 2^4 \times \sqrt{k n m} \geq 7^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k n m : 2 \\ \sqrt{k n m} : 7^5 \end{cases} \Rightarrow k n m : 2 \times 7^{10}$$

т.к. мы ищем $\min(abc)$, нам нужно $\min(knm)$

$$\Rightarrow knm = 2 \times 7^{10}$$

$$\text{Тогда } \min(abc) = X = \sqrt{2 \times 2 \times 7^{10}} \times 2^{27} \times 7^{34} = 2^{28} \times 7^{39}$$

пример:

$$\begin{aligned} k=2 & \rightarrow ab = 2^{16} 7^{11} \rightarrow c = 2^{12} 7^{28} \\ n=7^{10} & \rightarrow bc = 2^{17} 7^{28} \rightarrow a = 2^{11} 7^{11} \rightarrow abc = 2^{28} 7^{39} \\ m=1 & \rightarrow ac = 2^{13} 7^{19} \rightarrow b = 2^5 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ } 2^{28} 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЧАСОВОИК

№2)

$$\frac{(a+b) : m}{(a+b)^2 - 9ab : m} \rightarrow \frac{(a+b)^2 - 9ab : m}{a+b} : m = a+b - \frac{9ab : m}{a+b} = a+b - 9b + \frac{9b^2}{a+b}$$
$$= a - 8b + 9b \frac{1}{a+b}$$

a не имеет с b никаких
общих множителей (кратн 1), т.е. $\frac{b^2}{a+b}$ - не сократима, но
 $(a+b)$ может иметь общие множители с 9 .

~~Решение~~ $\nabla \text{e max}(m) = 9$.

Пример:

$$\frac{9}{9^2 - 9 \times 4 \times 5} = \frac{1}{9 - 20} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

числовик

№ 4) $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

3. П. $a = 3x^2 + 3x + 1$ $b = 1 - 9x$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$ $\rightarrow a \geq 0$
 $D = 9 - 4x^2 \leq 0$
 $3 > 0 \rightarrow a \geq 0$ всегда при x

$\sqrt{a+b} = b + \sqrt{a}$; $b + \sqrt{a} \geq 0$

$a+b = b^2 + 2b\sqrt{a}$

$b^2 + b(2\sqrt{a} - b) = 0$

$b = 0 \rightarrow b + 2\sqrt{a} - b = 0$

$1 - 9x = 0$

$x = \frac{1}{9}$

1) $\frac{1}{9} + \sqrt{a} \geq 0$

2) $\frac{1}{81} + 3 - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 \geq 0$

$x = \frac{1}{9}$ - корень

$\sqrt{a} = \frac{1-b}{2}$; $\frac{1-b}{2} \geq 0 \rightarrow b \leq 1$

$a = \frac{(1-b)^2}{4}$

$(3x^2 + 3x + 1) \cdot 4 = 81x^2$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$\begin{cases} b + \sqrt{a} \geq 0 \\ b \leq 1 \\ \sqrt{a} = \frac{1-b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} \geq -b \\ b \leq 1 \\ \sqrt{a} = \frac{1-b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-b}{2} \geq -b \\ b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \geq -1 \\ b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 12^2 + 4 \cdot 69 = 4^2 \cdot (3^2 + 69)$

$x_{1,2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{3^2+69}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \leq 0 - x = \frac{6-2\sqrt{78}}{69}$ - не корень

$x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \gg \frac{22}{69} \gg \frac{2}{9} \Rightarrow$

\Rightarrow не корень

Ответ: $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



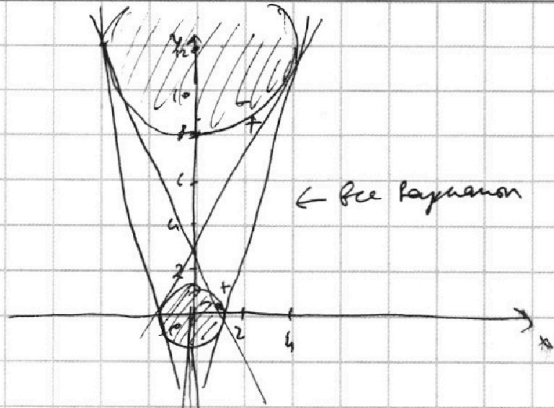
числовик

нб) $a \neq 0 \exists b$, всего 2 решения

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

то как упростили задачу, то решим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases}$$



~~что прямая оба, как две окружн. \rightarrow $4(a+b)$~~
~~то она пересекает ровно одну окр. 2 раза~~

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases} \begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + (8b - ax)^2 = 1 \\ x^2 + (8b - 12 - ax)^2 = 16 \end{cases} \begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2(1+a^2) - 16abx + 64b^2 = 1 \\ x^2(1+a^2) - 2(8b-12)ax + (8b-12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 16^2 a^2 b^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 1) \\ D_2 &= 4(8b-12)^2 a^2 - 4(1+a^2)((8b-12)^2 - 16) \end{aligned}$$

варианты $D_1 = D_2 = 0$
 ~~$D_1 > 0, D_2 < 0$~~
 ~~$D_1 < 0, D_2 > 0$~~

$$\begin{aligned} D_1 &= 2^8 a^2 b^2 - 2^8 a^2 b^2 + 4 + 4 \cdot 2^8 b^2 + 4a^2 = 4a^2 - 2^8 b^2 + 4 \\ D_2 &= 2^8 - 4(8b-12)^2 + 2^6 a^2 \end{aligned}$$

~~$$\begin{aligned} 1) \quad 4a^2 - 2^8 b^2 + 4 &= 0 & \rightarrow \quad 2^6 - 4(8b-12)^2 + 2^4(2^8 b^2 - 4) &= 0 \\ a^2 &= \frac{2^8 b^2 - 4}{4} & \rightarrow \quad 2^4 - (8b-12)^2 + 2^2(2^8 b^2 - 4) &\geq 0 \\ & & (2^8 b^2)^2 + 144 - 24 \cdot 8b - 2^4 + 2^4 - 2^{10} b &= 0 \\ & & 2^{16} b^2 - 2^{10} b - 2^6 \cdot 3b + 144 &= 0 \\ & & D = (2^{10} + 2^6 \cdot 3)^2 - 4 \cdot 2^{16} \cdot (2^4 \cdot 3^2) &\leq 0 \rightarrow \\ & & a \in \emptyset & \\ & & b \in \emptyset & \end{aligned}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Черновик~~ черновик

11)

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{14}$$

$$ca : 2^{23} 7^{29}$$

f - некого назовем $m \cdot n$ (abc), mn некого назовем $k \cdot l$ ($kmn \cdot 2^{34}$),
уточним что $abc \in \mathbb{N}$, или произведение \mathbb{N} чисел.

$$\Rightarrow abc = \sqrt{2 \times 2^{35} 7^{35}} = 2^{28} 7^{34}$$

$$\begin{matrix} 14 & 14 & 0 \\ 10 & 14 & 0 \end{matrix}$$

$$k, m, n \in \mathbb{N} \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$$

$$ab = k \cdot 2^{11} 7^4$$

$$bc = n \cdot 2^{17} 7^{18}$$

$$ca = m \cdot 2^{23} 7^{29}$$

$$\Rightarrow abc = kmn 2^{34} 7^{34}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$a = 1 - 9x \quad t \geq 0 \quad t + a \geq 0$$

$$t = 3x^2 + 1 + 3x$$

$$\sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$\sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$\sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$2\sqrt{t+a} - 2\sqrt{t} = 2a$$

$$\sqrt{t+a} = (a + \sqrt{t})^2 = a^2 + 2a\sqrt{t} + t$$

$$a^2 + 2a\sqrt{t} + t - a = 0$$

$$a = 0 \quad a + 2\sqrt{t} - 1 = 0$$

$$2\sqrt{t} = 1 - a \Rightarrow \frac{1-a}{2} \geq 0$$

$$t = \frac{(1-a)^2}{4} \Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 = \frac{(1-9x+1)^2}{4} \Rightarrow \frac{1-1+9x}{2} \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \frac{(1+9x+1)^2}{4}$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 9x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 69 = 4^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 3 \cdot 22$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{9+69}}{2 \cdot 69}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{69} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{matrix} 1-9x \leq 1 & 9x \geq 0 & x \geq 0 \\ (1-9x) \geq -1 & -9x \geq -2 & x \leq \frac{2}{9} \end{matrix}$$

$$1-6 \geq 0$$

$$b \leq 2$$

$$8 \leq y \leq 9^2$$

$$\begin{cases} b \leq 1 \\ b + a \geq 0 \\ a = \frac{1-a}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1-b}{2} \geq -b$$

$$\frac{1}{2} \geq -\frac{b}{2}$$

$$1 \geq -b$$

$$b \geq -1$$

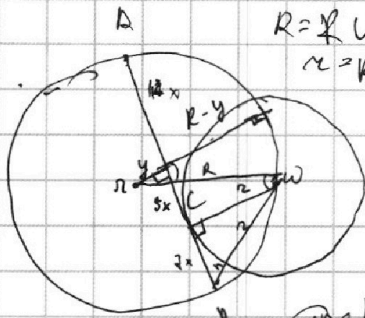
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$R = \sqrt{2} \cdot \omega = 7$
 $r = R \cdot \omega = 13$

AB-?

$\frac{9b^2}{a+b} - \text{англ. } \frac{9ab}{a+b}$

$BC:AC = 7:17$

$\frac{a+b}{9b^2} = \frac{9}{9b^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{k}{n}$

$12^2 x^2 = 0 \cdot k \cdot \frac{1}{b^2} (R - 0) \cdot k \cdot \frac{1}{b^2} (y + R)$

$y^2 - yR + 12^2 x^2 = 0 \quad a = mk - \frac{mk}{3} R^2 - y^2$

$x = R^2 - 12^2 x^2 = 4 \quad a = \frac{4^2 - 4}{3} \quad y = \sqrt{R^2 + 12^2 x^2}$

$y = \frac{9}{2} R \pm \sqrt{k^2 - 24^2 x^2}$

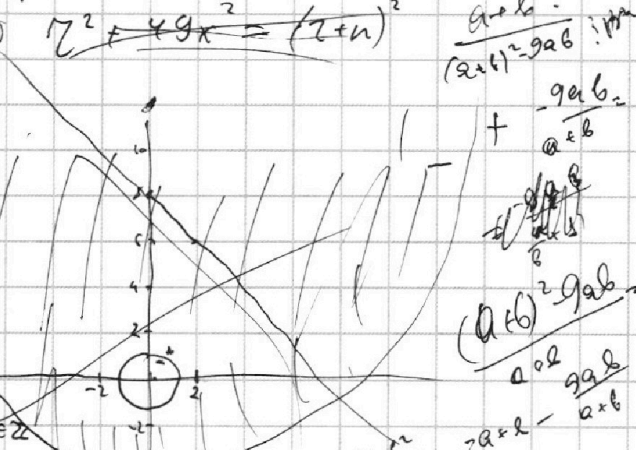
$ax + y - 9b = 0$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) = 0$

$y = 9b - ax$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 24y + 16x^2) = 0$

$(1 + \frac{a}{b})b = m$
 $b^2 (\frac{a^2}{b^2} - 2(\frac{a}{b}) + 1) = m^2$
 $24 \cdot 17^2 = 15 \cdot 8$
 $y = \frac{24 \cdot 17^2}{15}$
 $9ab + 9b^2 - 9a^2 = 9b(a+b) - 9a^2$



$y = 9b - ax$

$x^2 + b^2 a^2 - 16b^2 a x + a^2 x^2 = 1$

$x^2(1+a^2) - 16b^2 a x + (b^2 - 1) = 0$

$4^2 b^2 a^2 - 4 \cdot 4^2 b^2 + 4 = 4^2 a^2 b^2 + 4a^2 \geq 0$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$9 \frac{ab}{a+b} - \frac{9ab}{a+b} = y^2 + (y-12)^2 = 15$

$\frac{9}{b} - \frac{9}{a+b} = b - \frac{9}{a+b} - 24y + 12 = 15$

$\frac{9(a+b) - 9}{b(a+b)} = \frac{9a + 9b - 9}{b(a+b)} = \frac{9a - 9}{b(a+b)} = \frac{9(a-1)}{b(a+b)}$

$4a^2 - 4^2 b^2 + 4 \geq 0 \quad a^2 - 4^2 b^2 + 1 \geq 0$

$\frac{2+3}{2^2 - 7 \cdot 2 + 1 + 3^2} = \frac{(\frac{2}{3} + 1) \cdot 3}{3^2 (\frac{2}{3})^2 - 7 \cdot \frac{2}{3} + 1}$

$\frac{3+5}{3^2 - 2 \cdot 3 + 5 + 5^2} = \frac{8}{34 - 10 + 25} = \frac{8}{49}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$ab : 2^{15} 7^4 \text{ км(abc) - ?}$

$bc : 2^{12} 7^{10}$

$ac : 2^{23} 7^{39}$

$ab = k 2^{15} 7^{11}$

$bc = n 2^{12} 7^{10}$

$ac = m 2^{23} 7^{39}$

$abc = \sqrt{k n m} 2^{55} 7^{68}$

$2abc = 2^{56} 7^{68}$

$(abc)^2 = 2^{55} 7^{68}$

$2(abc)^2 = 2^{56} 7^{68}$

$abc = 1$

$2abc = 2^{20} 7^{34}$

$abc = 2^{28} 7^{24}$

пусть

$k = 2^{10}$

$n = 7$

$m = 7^5$

$ab = 2^6 7^{11}$

$bc = 7^{28} 2^{12}$

$ac = 2^{11} 7^{39}$

$a = 2^9 7^{24}$
 $b = 2^{25}$
 $c = 2^{15} 7^{28}$

$ab = 2^{15} 7^{11}$
 $bc = 2^{12} 7^{10}$
 $ac = 2^{23} 7^{39}$

$c = \frac{x}{2^{15} 7^{11}}$

$ac = a \frac{x}{2^{15} 7^{11}} = 2^{24} 7^{29}$

$ax = 2^{39} 7^{50}$

$ab = 2^6 7^{11}$

$bc = 7^{28} 2^{12}$

$ac = 2^{11} 7^{39}$

$\frac{9}{9^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{9(9-20)} = \frac{9}{9(-11)}$

$ab = 7^4$
 $bc = 7^{10}$
 $ac = 7^{39}$

$ab^2 = km$
 $a^2b = nm$
 $\frac{ab^2}{a^2b} = \frac{k}{n}$

$\frac{c}{a} = \frac{2^{15} 7^{11}}{2^{15} 7^{11}} = \frac{1}{2^2 7^{10}} = \frac{2^{15} 7^4}{(2^2 7^{10}) \cdot (2^{15} 7^4)}$

$a = 2^{11} 7^{11}$
 $b = 2^5$
 $c = 2^{28} 7^{28}$

$abc = 7^{34}$
 $abc = 7^{34}$
 $ac = 7^{39}$

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

$b = \frac{x}{2^{28} 7^{39}}$

$a = \frac{x}{2^{12} 7^{18}}$

$c = \frac{x}{m 2^{11} 7^{11}}$

$x \geq 2^{23} 7^{39}$
 $x^3 = 2^{55} 7^{68} kmn$
 $x \in \mathbb{N}$

$x^2 = 2^{55} 7^{68} kmn$

$x = \sqrt{2 kmn}$

$\sqrt{2 kmn} \cdot 7^{14} 2^{28} \geq 2^{23} 7^{39}$

$\sqrt{2 kmn} \cdot 2^4 \geq 7^5$
 $\sqrt{2 kmn} \in \mathbb{N}$
 $\sqrt{2 kmn} \geq 7^{5/2}$

$\frac{b}{a+b} = \frac{4+5}{(4+5) - 9 \cdot 10}$

$a^2 - 2ab + b^2$

$\frac{x}{(x-15k)(x-13k)}$

$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} - 1$

$\frac{(a+b)}{b} = \frac{a}{b} + 1$

$\frac{a+b}{a+b} = 1$

$\sqrt{2 kmn} \geq \frac{7^{10}}{2^{10}}$
 $kmn \geq \frac{7^{10}}{2^{10}}$



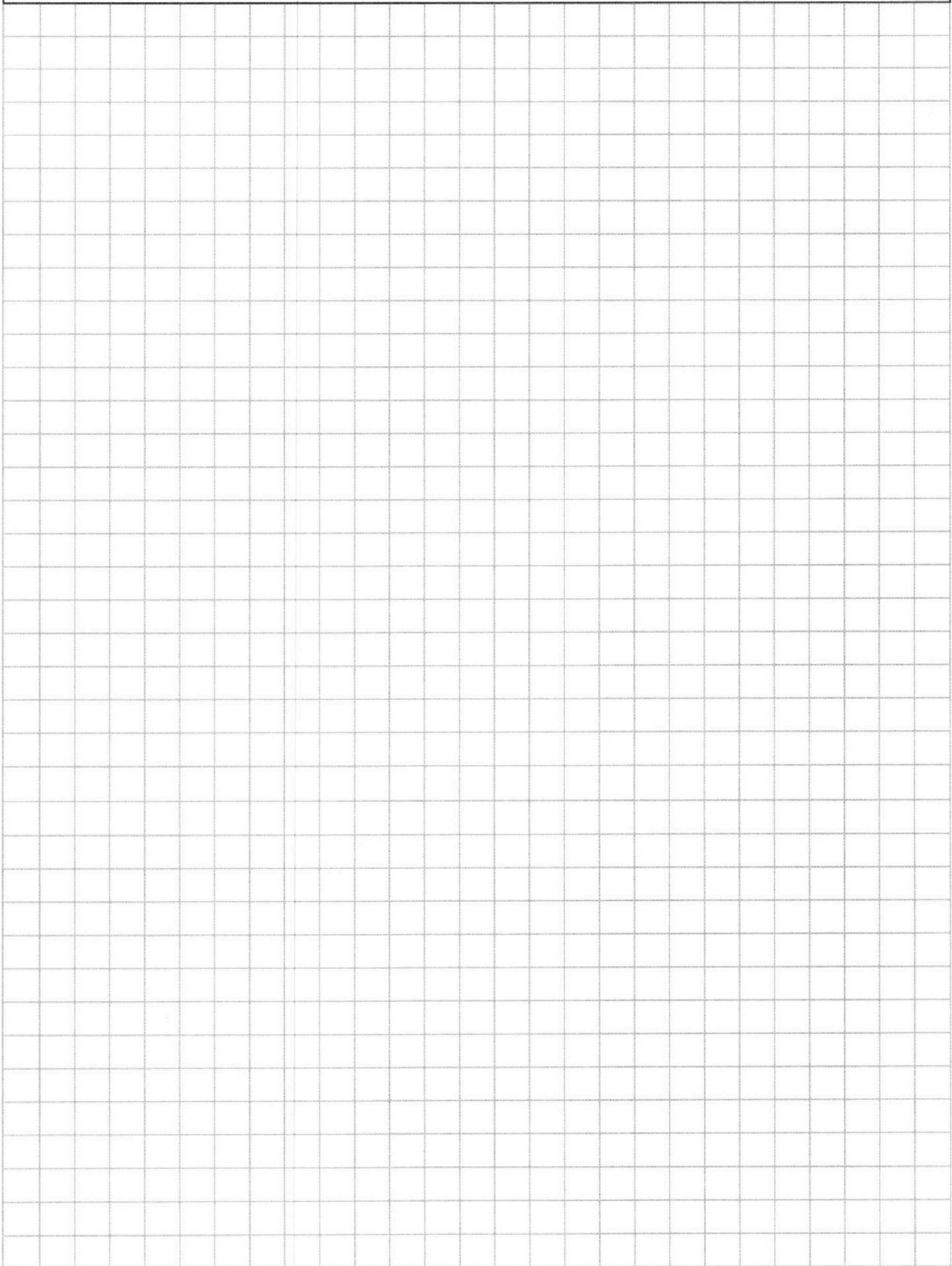
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

