



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы найти минимум  $abc$ , предположим,  
что  $ab$ ,  $bc$  и  $ac$  это ~~целые~~ равны своим  
делителям, указанным в условии.  $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$ ,  
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{13}$ ,  $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$ .

Порешком в их всех, получим квадрат зна-  
чения  $abc$ :  $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$ .

Известная корень из данного выражения, мож-  
но найти наименьшую натур. степень двойки, но-  
этому отсюда из целых чисел будет в  
2 раза больше, а  $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

Ответ:  $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \quad \cdot \quad \text{Занимем условие софисти-$$

$$\text{мости на } m: \begin{cases} a+b \div m \\ (a+b)^2-9ab \div m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \div m \\ 9ab \div m \end{cases}$$

т.к.  $a$  и  $b$  взаимно просты, значит будем рас-  
суживать числитель в разложении на простые  
сошкотики.

$$9ab \div m \Leftrightarrow ab \cdot 3^2 \div m \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot b^2 \cdot 3^2 \div m, \text{ т.к.}$$

$\frac{a}{b}$  несократима, но обратим её.

$$b^2 \cdot 3^2 \div m \Rightarrow m = \{1; 3; 9; 3b; 9b; 3b^2; 9b^2\}$$

но не забудем про условие  $a+b \div m$  и то,  
что  $\frac{a}{b}$  - несократима. Следовательно  $m \neq 3b, 9b,$

т.к.  $a < b \Rightarrow a+b < 2b$ . И также  $m \neq 3b^2, 9b^2,$

потому что эти числа ещё больше, в условии  
наатуральности  $b$ .

Значит  $m = \{1; 3; 9\}$ . Максимальное из них 9.

$$\text{Пример: } \frac{a}{b} = \frac{4}{5} \quad a+b = 4+5 \div 9$$

$$9ab = 9 \cdot 4 \cdot 5 \div 9$$

Ответ:  $m = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

**МФТИ**

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Замена:  $a = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$  ;  $b = 1 - 9x$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b \quad || \times \times 2 \quad \Rightarrow \quad a - 2\sqrt{a^2 - ab} + a - b = b^2$$

$$b^2 - 2a + b = -2\sqrt{a^2 - ab} \quad || \times \times 2 \quad \Rightarrow \quad b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 + b^3 - 4ab = 4a^2 - 4ab$$

$$b^4 + 2b^3 + b^2(1 - 4a) = 0 \quad || : b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + 2b + 1 - 4a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 = 4a \quad \Rightarrow \quad b+1 = 2\sqrt{a}$$

Обратная замена:  $9x = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad || \times \times 2$

$$81x^2 - 12x^2 + 24x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 69x^2 + 24x - 8 = 0$$

$$D = 24^2 + 4 \cdot 8 \cdot 69 = 2784$$

$$x_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{2784}}{138}$$

Подставив в исходное оба корня  
удовлетворяют ОДЗ.

Не забудем, что когда мы делили на  $b^2$ , но  
возможен случай  $b = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Ответ:  $x = \left\{ \frac{-24 \pm \sqrt{2784}}{138}; \frac{1}{9} \right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$   
Ищем для каждого пар-ма все возможные  
суммы для суммы разности координат от

$$x_2 - x_1 = 16; \quad y_2 - y_1 = -18 \quad \text{до} \quad x_2 - x_1 = -6; \quad y_2 - y_1 = -26$$

Заметим соотношение, выполняющееся для координат  
точек  $k$  в каждом случае:  $k = (16 - |x_2 - x_1| + 1) \cdot$   
 $\cdot (25 - |y_2 - y_1| + 1)$ . Составим произведение для каждо-  
го случая суммируем сумму  $\Sigma$ :  $\Sigma = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11 +$

$$+ 3 \cdot 13 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 17 + 6 \cdot 19 + 7 \cdot 21 + 8 \cdot 23 + 9 \cdot 25 + 10 \cdot 27 + 11 \cdot 29 +$$
$$+ 12 \cdot 31 + 13 \cdot 33 + 14 \cdot 35 + 15 \cdot 37 + 16 \cdot 39 + 17 \cdot 41 + 18 \cdot 43 +$$
$$+ 19 \cdot 45 + 20 \cdot 47 + 21 \cdot 49 + 22 \cdot 51 + 23 \cdot 53 + 24 \cdot 55 + 25 \cdot 57 +$$
$$+ 26 \cdot 59 + 27 \cdot 61 + 28 \cdot 63 + 29 \cdot 65 + 30 \cdot 67 + 31 \cdot 69 + 32 \cdot 71 +$$
$$+ 33 \cdot 73 + 34 \cdot 75 + 35 \cdot 77 + 36 \cdot 79 + 37 \cdot 81 + 38 \cdot 83 + 39 \cdot 85 +$$
$$+ 40 \cdot 87 + 41 \cdot 89 + 42 \cdot 91 + 43 \cdot 93 + 44 \cdot 95 + 45 \cdot 97 + 46 \cdot 99 = 3471$$

Также не забудем рассмотреть произведение на два, потому что данный набор координат  
подходит и для точки  $A$ , и для точки  $B (B(x_1, y_1), A(x_2, y_2))$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1/5

16/89

48/136

④  $3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 9x + 2 - 1$

$a = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$\sqrt{a} + \sqrt{a+b} - \sqrt{a+b} = -b$

$b = 9x - 1$

$3x^2 + 3x + 1$

$3 \cdot \frac{1}{81} + \frac{2}{3} + 1 \geq 0$

$3 \cdot \frac{1}{25} - 1,2 + 1 \geq 0$

$3 \cdot \frac{1}{81} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{24}{81}$

$3 \cdot \frac{1}{25} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{136}{75}$

$-\frac{1}{9} \approx -\frac{1}{9}$

$4a^2(1 - 2ab + ab)$

$a - 2\sqrt{a^2 + ab} + a + b = b^2$

$b^2 - 2a - b = -2\sqrt{a^2 + ab}$

$b(b-1) = 2a(1 - \sqrt{ab})$

$b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 - 2b^3 + 4ab = 4a^2 + 4ab$

$b^4 - 2b^3 + b^2(1 - 4a) = 0 \quad || : b^2$

$9x - 1 \geq 0$

$b^2 - 2b + (1 - 4a) = 0$

$b^2 - 2b + 1 = 4a$

$(b-1)^2 = 4a \Rightarrow b-1 = 2\sqrt{a}$

$9x - 2 = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$

$3x^2 - 6x + 2$

$x = 36 - 24 = 12$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

$81x^2 - 36x + 4 = 12x^2 - 24x + 8$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

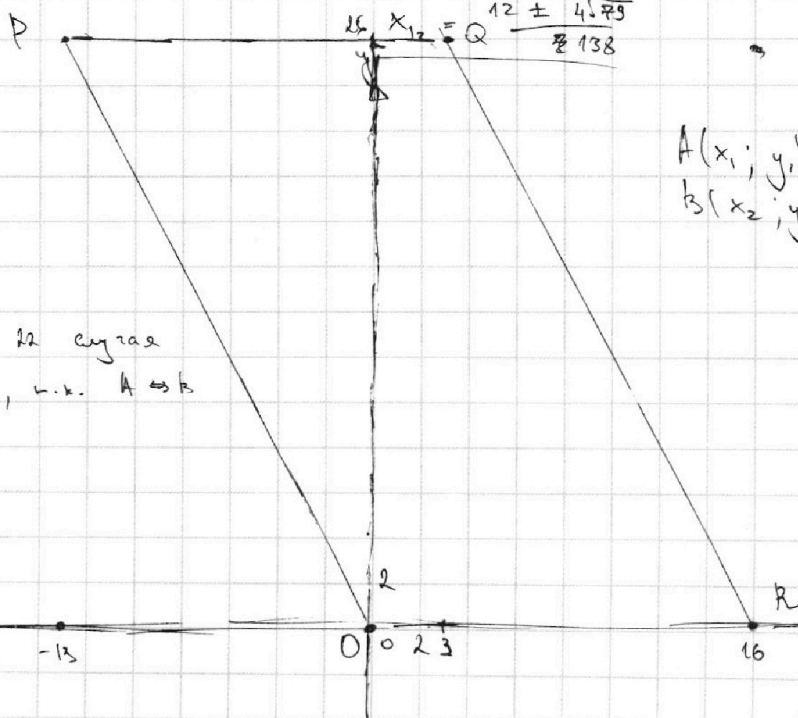
$\Rightarrow D = 144 + 1104 = 1248$

$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{138}$

$\sqrt{1248} \approx 36 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$\cdot 39$

$\sqrt{1248}$



$A(x_1; y_1)$   
 $B(x_2; y_2)$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

1)  $x_2 - x_1 = 7; y_2 - y_1 = 0$

2)  $x_2 - x_1 = 6; y_2 - y_1 = 2$

3)  $x_2 - x_1 = 5; y_2 - y_1 = 4$

4)  $x_2 - x_1 = 4; y_2 - y_1 = 6$

5)  $x_2 - x_1 = 3; y_2 - y_1 = 8$

$x_2 - x_1 = -6; y_2 - y_1 = 14$

$x_2 - x_1 = 16; y_2 - y_1 = -18$

⑤

треугольник 22 угла  
и  $\Sigma = 2$ , т.к.  $A \leftrightarrow B$

14  
x 14  
56  
14  
156

x 69  
16  
414  
69  
1404  
x 16  
7  
1120



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



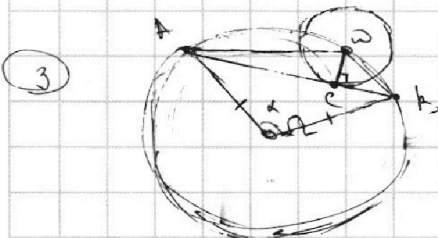
①  $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$  ;  $bc : 2^{17} \cdot 7^{16}$  ;  $ac : 2^{23} \cdot 7^{30}$   $\min(abc)?$

$(abc)^2 :$

$2^{55} \cdot 7^{68} = (abc)^2 \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34} - \min$

②  $\frac{a}{b}$  - несократима  $\max(m)?$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$



$AC : CB = 17 : 7$      $r = 7$  ;  $R = 13$

$AB = 24x$      $AB?$

$OA = OB = 13$

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \alpha$

⑤  $(260 + 9 + 22 + 39 + 60 + 88 + 114)$

$2(16 - (x_2 - x_1) + 1) + (26 - (y_2 - y_1)) = 14$      $(16 - (x_2 - x_1) + 1)(26 - (y_2 - y_1))$

$32 - 2x_2 + 2x_1 + 2 + 26 - y_2 + y_1 = 14$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

- 1. 9 16 ✓
- 2. 11 15 ✓
- 3. 15 14 ✓
- 4. 15 15 ✓
- 5. 17 12 ✓
- 6. 18 11 ✓
- 7. 21 10 ✓
- 8. 23 9 ✓
- 9. 25 8 ✓
- 10. 27 7 ✓
- 11. 29 6 ✓
- 12. 31 5 ✓
- 13. 33 4 ✓
- 14. 35 3 ✓
- 15. 37 2 ✓
- 16. 39 1 ✓
- 17. 41 0 ✓
- 18. 43 -1 ✓
- 19. 45 -2 ✓
- 20. 47 -3 ✓
- 21. 49 -4 ✓
- 22. 51 -5 ✓
- 23. 53 -6 ✓

$6058 + 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14 \Rightarrow 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = -46$

$\sum_{i=1}^n = 9(1 + 25 + 15) + 11(2 + 25 + 1) + 13(3 + 21 + 5) + 15(4 + 17 + 16) + 17(5 + 13) + 19(6 + 14) + 21(7) + 23(8 + 12) + 27 \cdot 10 + 14 \cdot 7 + 12 \cdot 3 =$

$= 363 + 473 + 377 + 555 + 306 + 380 + 147 + 460 + 470 + 98 + 36 = 850 + 730 + 440 + 380 + 1071 = 3471$

$\sum \cdot 2 = 6942$   $\text{на пол}$

17
x/18
136
17
306







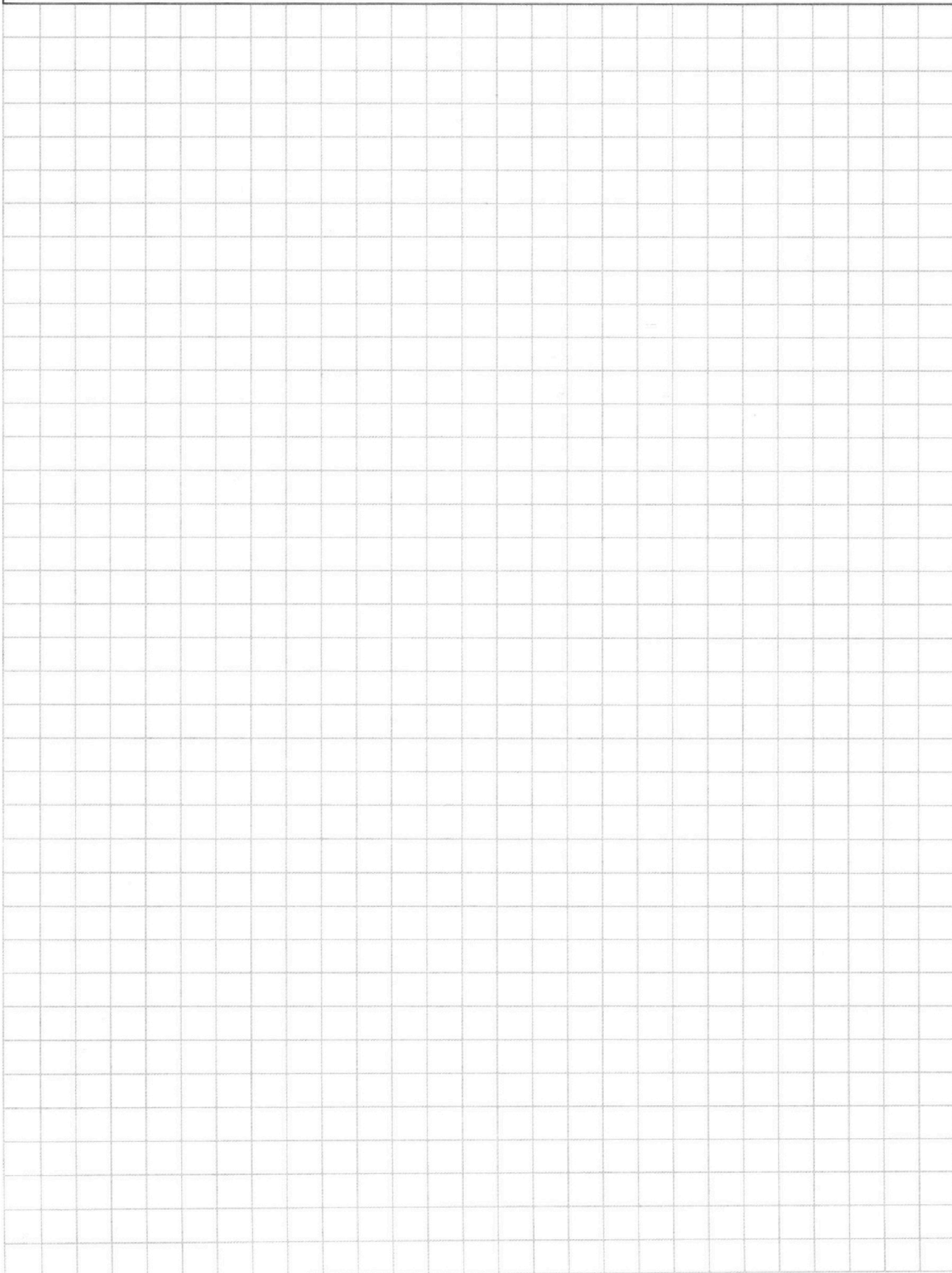
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





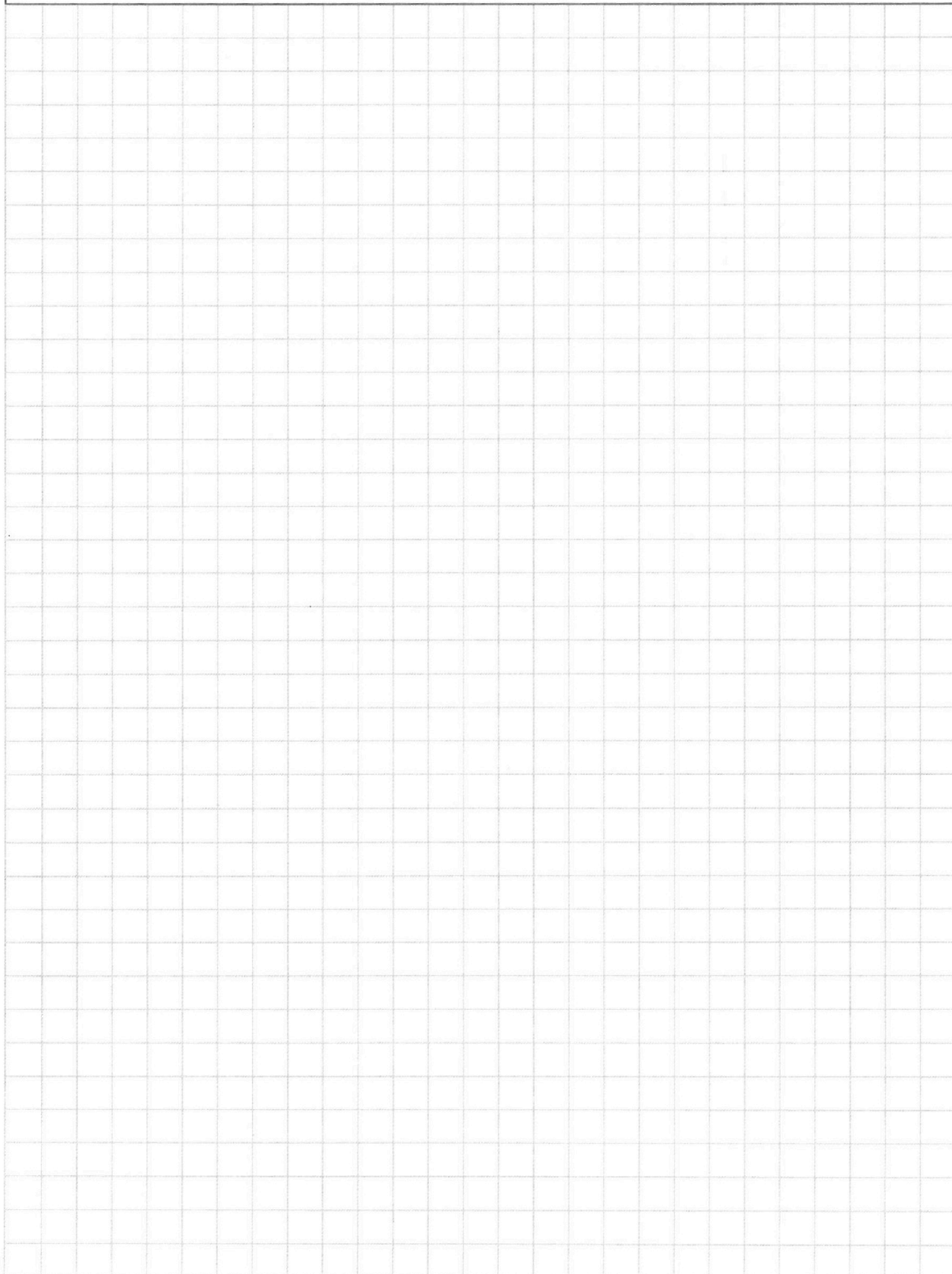
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

