



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы найти минимум abc , предположим,
что ab , bc и ac это ~~целые~~ равны своим
делителям, указанным в условии. $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$,
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{13}$, $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$.

Порешком в их всех, получим квадрат зна-
чения abc : $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$.

Известная корень из данного выражения, мож-
но найти наименьшую натур. степень двойки, но-
этому отсюда из целых чисел произведений будет в
2 раза больше, а $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \quad \cdot \quad \text{Занимем условие софисти-$$

$$\text{мости на } m: \begin{cases} a+b \div m \\ (a+b)^2-9ab \div m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \div m \\ 9ab \div m \end{cases}$$

т.к. a и b взаимно просты, значит будет рас-
щеплять числитель в разложении на простые
сошкотились.

$$9ab \div m \Leftrightarrow ab \cdot 3^2 \div m \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot b^2 \cdot 3^2 \div m, \text{ т.к.}$$

$\frac{a}{b}$ несократима, но обратим её.

$$b^2 \cdot 3^2 \div m \Rightarrow m = \{1; 3; 9; 3b; 9b; 3b^2; 9b^2\}$$

но не забудем про условие $a+b \div m$ и то,
что $\frac{a}{b}$ - несократима. Следовательно $m \neq 3b, 9b,$

т.к. $a < b \Rightarrow a+b < 2b$. И также $m \neq 3b^2, 9b^2,$

потому что эти числа ещё больше, в условии
наатуральности b .

Значит $m = \{1; 3; 9\}$. Максимальное из них 9.

$$\text{Пример: } \frac{a}{b} = \frac{4}{5} \quad a+b = 4+5 \div 9$$

$$9ab = 9 \cdot 4 \cdot 5 \div 9$$

Ответ: $m = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Замена: $a = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$; $b = 1 - 9x$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b \quad || \times \times 2 \quad \Rightarrow \quad a - 2\sqrt{a^2 - ab} + a - b = b^2$$

$$b^2 - 2a + b = -2\sqrt{a^2 - ab} \quad || \times \times 2 \quad \Rightarrow \quad b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 + b^3 - 4ab = 4a^2 - 4ab$$

$$b^4 + 2b^3 + b^2(1 - 4a) = 0 \quad || : b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + 2b + 1 - 4a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 = 4a \quad \Rightarrow \quad b+1 = 2\sqrt{a}$$

Обратная замена: $9x = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad || \times \times 2$

$$81x^2 - 12x^2 + 24x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 69x^2 + 24x - 8 = 0$$

$$D = 24^2 + 4 \cdot 8 \cdot 69 = 2784$$

$$x_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{2784}}{138} \quad \text{Подставляем } b \text{ исходное оба корня}$$

удовлетворяют ОДЗ.

Не забудем, что когда мы делили на b^2 , но
возможен случай $b = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Ответ: $x = \left\{ \frac{-24 \pm \sqrt{2784}}{138}; \frac{1}{9} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$
Искать для каждого пар-ма мож можем рас-
смотреть 2-е слагае разности координат от

$$x_2 - x_1 = 16; \quad y_2 - y_1 = -18 \quad \text{до} \quad x_2 - x_1 = -6; \quad y_2 - y_1 = -26$$

Заметим соотношение, выполняющееся для кон-ва
точек k в каждом слагае: $k = (16 - |x_2 - x_1| + 1) \cdot$
 $\cdot (26 - |y_2 - y_1| + 1)$. Достигаем произведения для каждо-
го слагае констант сумму Σ : $\Sigma = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11 +$

$$+ 3 \cdot 13 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 17 + 6 \cdot 19 + 7 \cdot 21 + 8 \cdot 23 + 9 \cdot 25 + 10 \cdot 27 + 11 \cdot 29 +$$
$$+ 12 \cdot 31 + 13 \cdot 33 + 14 \cdot 35 + 15 \cdot 37 + 16 \cdot 39 + 17 \cdot 41 + 18 \cdot 43 +$$
$$+ 19 \cdot 45 + 20 \cdot 47 + 21 \cdot 49 + 22 \cdot 51 + 23 \cdot 53 + 24 \cdot 55 + 25 \cdot 57 +$$
$$+ 26 \cdot 59 + 27 \cdot 61 + 28 \cdot 63 + 29 \cdot 65 + 30 \cdot 67 + 31 \cdot 69 + 32 \cdot 71 +$$
$$+ 33 \cdot 73 + 34 \cdot 75 + 35 \cdot 77 + 36 \cdot 79 + 37 \cdot 81 + 38 \cdot 83 + 39 \cdot 85 +$$
$$+ 40 \cdot 87 + 41 \cdot 89 + 42 \cdot 91 + 43 \cdot 93 + 44 \cdot 95 + 45 \cdot 97 + 46 \cdot 99 = 3471$$

Также не забудем рассмотреть константное произ-
ведение на два, потому что данный перебор ког-
родит и для точки A , и для точки $B (B(x_1, y_1)$
 $A(x_2, y_2))$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1/5

16/89

48/136

④ $3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 9x + 2 - 1$

$a = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b$

$b = 9x - 1$

$3x^2 + 3x + 1$

$3 \cdot \frac{1}{81} + \frac{2}{3} + 1 \geq 0$

$3 \cdot \frac{1}{25} - 1,2 + 1 \geq 0$

$3 \cdot \frac{1}{81} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{24}{81}$

$3 \cdot \frac{1}{25} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{136}{75}$

$-\frac{1}{9} \approx -\frac{1}{9}$

$4a^2(1 - 2ab + ab)$

$a - 2\sqrt{a^2 + ab} + a + b = b^2$

$b^2 - 2a - b = -2\sqrt{a^2 + ab}$

$b(b-1) = 2a(1 - \sqrt{ab})$

$b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 - 2b^3 + 4ab = 4a^2 + 4ab$

$b^4 - 2b^3 + b^2(1 - 4a) = 0 \quad || : b^2$

$9x - 1 \geq 0$

$b^2 - 2b + (1 - 4a) = 0$

$b^2 - 2b + 1 = 4a$

$(b-1)^2 = 4a \Rightarrow b-1 = 2\sqrt{a}$

$9x - 2 = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$

$3x^2 - 6x + 2$

$x = 36 - 24 = 12$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

$81x^2 - 36x + 4 = 12x^2 - 24x + 8$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$\Rightarrow D = 144 + 1104 = 1248$

$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{138}$

$4\sqrt{99} \approx 36 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $\cdot 39$
 $4\sqrt{99}$

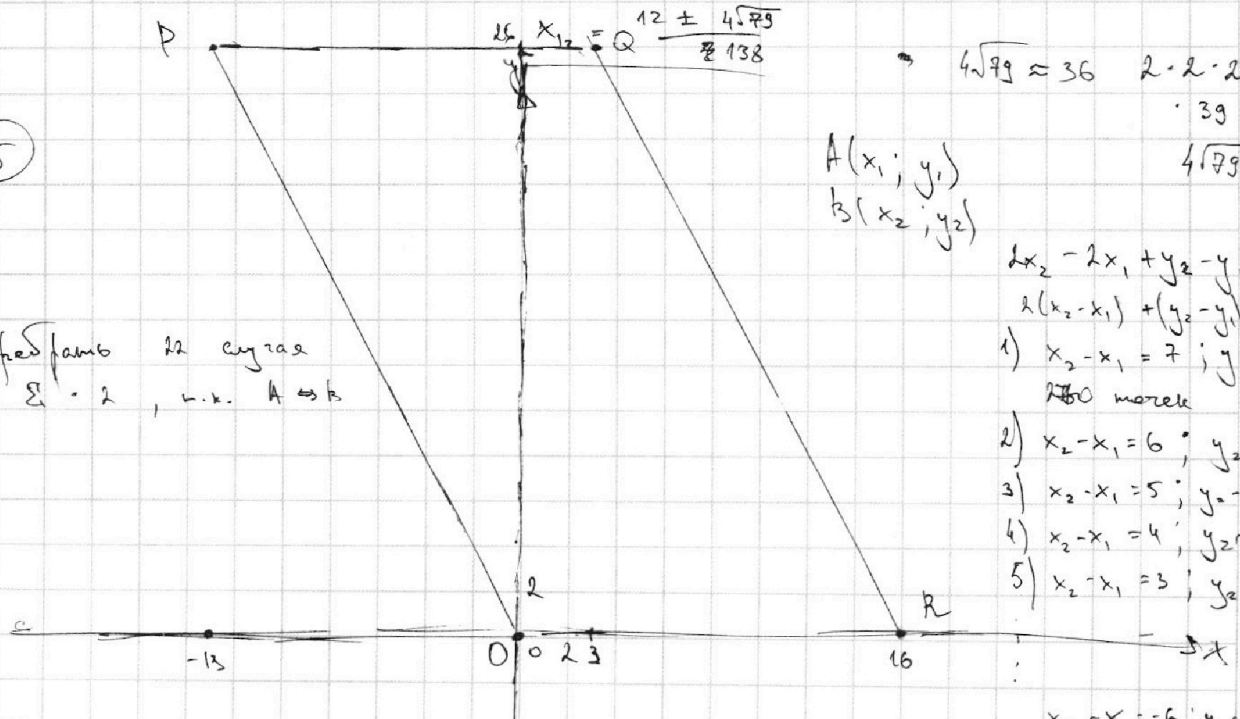
14
x 14
56
14
156

⑤

треугольник 22 угла
и $\Sigma = 2$, т.к. $A \leftrightarrow B$

$A(x_1; y_1)$
 $B(x_2; y_2)$

- 1) $x_2 - x_1 = 7; y_2 - y_1 = 7$
- 2) $x_2 - x_1 = 6; y_2 - y_1 = 2$
- 3) $x_2 - x_1 = 5; y_2 - y_1 = 4$
- 4) $x_2 - x_1 = 4; y_2 - y_1 = 6$
- 5) $x_2 - x_1 = 3; y_2 - y_1 = 8$



$x_2 - x_1 = -6; y_2 - y_1 = -18$



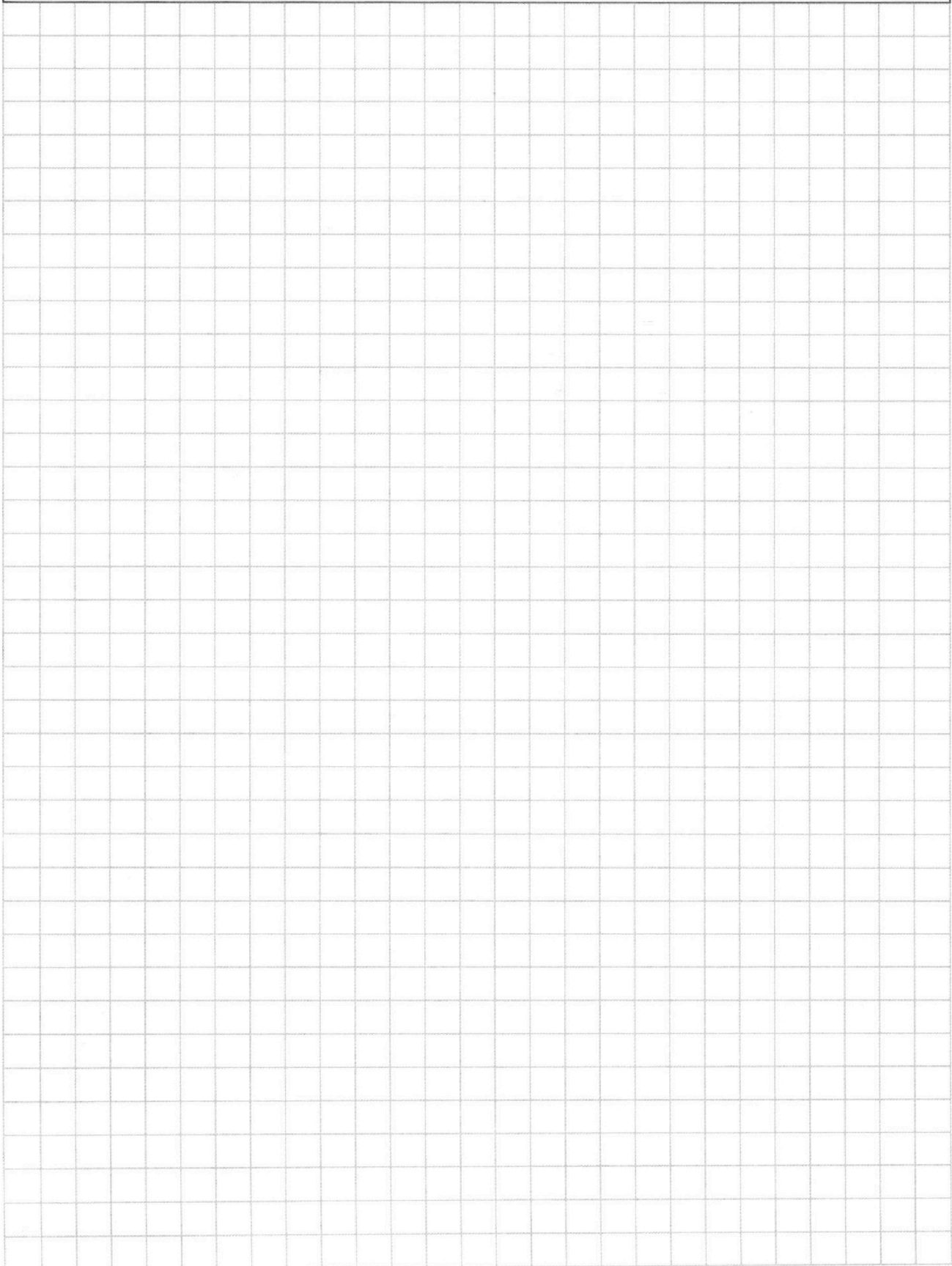
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





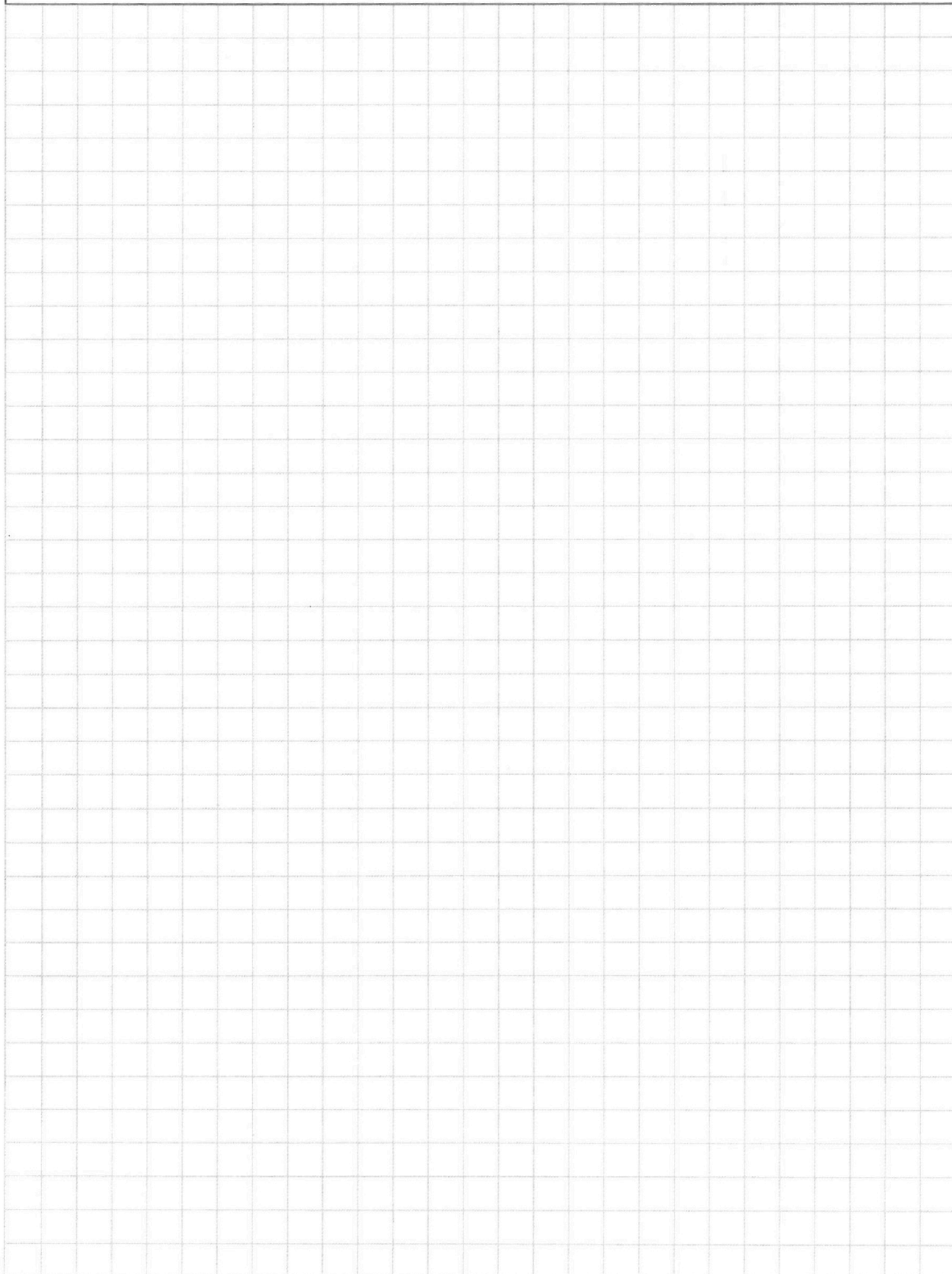
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

