



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем t могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на t ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы найти минимум abc , предположим,
что ab , bc и ac это ~~некие~~ любые числа
делителей, указанных в условии. $ab = 2^{15} \cdot 7^7$,
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$, $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$.

Согласно этим числам, получим выражение зна-
чения abc : $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$.

Найдем корень из данного выражения, мож-
но с помощью нахождения корней степеней двойки, но
этому огло из числовых приближений будем в
2 раза больше, а $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$
Однако: $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Запишем условие сокраще-

$$\text{мосум на } m : \begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 9ab : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 9ab : m \end{cases}$$

т.к. a и b взаимно просты давнее будем рассматривать единицу b расположение на атоме сокращения.

$$9ab : m \Leftrightarrow ab \cdot 3^2 : m \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot b^2 \cdot 3^2 : m, \text{ т.к.}$$

$\frac{a}{b}$ нерациональна, но обратим её.

$$b^2 \cdot 3^2 : m \Rightarrow m = \{1; 3; 9; 3b; 9b; 3b^2; 9b^2\}$$

но не забудем что условие $a+b : m$ и то,

что $\frac{a}{b}$ - рациональна. Невозможно $m \neq 3b; 9b$,

т.к. $a < b \Rightarrow a+b < 2b$. И максимум $m \neq 3b^2; 9b^2$,

но тому что эти числа еще больше, в условии нанесли б.

Значит $m = \{1; 3; 9\}$. Максимальное из них 9.

Пример: $\frac{a}{b} = \frac{4}{5} \quad a+b = 4+5 : 9$

$$9ab = 9 \cdot 4 \cdot 5 : 9$$

Ответ: $m = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{Замена: } a = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 ; b = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b \quad || \times 2 \Rightarrow a - 2\sqrt{a^2-ab} + a-b = b^2$$

$$b^2 - 2a + b = -2\sqrt{a^2-ab} \quad || \times 2 \Rightarrow b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 + 2b^3 - 4ab = 4a^2 - 4ab$$

$$b^4 + 2b^3 + b^2(1-4a) = 0 \quad || : b^2 \Rightarrow b^2 + 2b + 1 - 4a = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 = 4a \Rightarrow b+1 = 2\sqrt{a}$$

$$\text{Обратная замена: } 9x = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad || \times 2$$

$$81x^2 - 12x^2 + 24x - 8 = 0 \quad (2) \quad 69x^2 + 24x - 8 = 0$$

$$\Delta = 24^2 + 4 \cdot 8 \cdot 69 = 2784$$

$$x_{1,2} = \frac{-24 \pm 4\sqrt{174}}{138} \quad \text{Найдем обе корни}$$

использованием

не забудем, что корня могут делиться на b^2 , но

$$\text{возможен случай } b=0 \Rightarrow 1-9x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{9}$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ \frac{-24 \pm 4\sqrt{174}}{138}, \frac{1}{9} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \quad \text{л. с.} \quad 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

Теперь для исходного квадрата можем вычесть
сторону 23, а также длины координат от

$$x_2 - x_1 = 16; y_2 - y_1 = -18 \quad \text{т. о.} \quad x_2 - x_1 = -6; y_2 - y_1 = -26$$

Заменим единичные, большую часть для конца
номера k в начале снизу: $k = (16 - |x_2 - x_1| + 1) \cdot$
 $\cdot (26 - |y_2 - y_1| + 1)$. Тогда мы получим для конца

$$\begin{aligned} & \text{20 снизу получим сумму } S: S = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + \\ & + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 17 + 6 \cdot 19 + 7 \cdot 21 + 8 \cdot 23 + 9 \cdot 25 + 10 \cdot 27 + 11 \cdot 25 + \\ & + 12 \cdot 23 + 13 \cdot 21 + 14 \cdot 19 + 15 \cdot 17 + 16 \cdot 15 + 17 \cdot 13 + 16 \cdot 11 + \\ & + 15 \cdot 9 + 14 \cdot 7 + 13 \cdot 5 + 12 \cdot 3 + 11 \cdot 1 = 9(1+25+15) + \\ & + 11(1+2+16+25) + 13(3+5+21) + 15(4+16+17) + 17(5+13) + \\ & + 19(6+14) + 21 \cdot 7 + 23(8+12) + 27 \cdot 10 + 14 \cdot 7 + 12 \cdot 3 = 3471 \end{aligned}$$

Также не забудем помнить получившееся
выражение на y_2 , потому что данной передаче
нужны и две точки A , и две номера b ($b(x_i; y_i)$
 $A(x_2; y_2)$).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

$\frac{1}{5}$

$\frac{16}{89}$

$\frac{48}{136}$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & (1) \quad 3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 9x + 2 - 1 \\
 & \sqrt{a+b} + \sqrt{a+b} = -b \\
 & a - 2\sqrt{a^2+ab} + a+b = b^2 \\
 & b^2 - 2a - b = -2\sqrt{a^2+ab} \\
 & a - 2\sqrt{a^2+ab} + a+b = b^2 \\
 & b(b-1) = 4a(1-\sqrt{ab}) \\
 & b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 - 2b^3 + 4ab = 4a^2 + 4ab \\
 & b^4 - 2b^3 + b^2(1-4a) = 0 \quad || : b^2 \\
 & b^2 - 2b + 1 = 4a \quad \Leftrightarrow \quad (b-1)^2 = 4a \quad \Leftrightarrow \quad b-1 = 2\sqrt{a} \\
 & 3x - 2 = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \\
 & 81x^2 - 36x + 4 = 12x^2 - 24x + 8 \\
 & 69x^2 - 12x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 144 + 1104 = 1248 \\
 & P \xrightarrow{x_1 = \frac{12 - 4\sqrt{38}}{2 \cdot 138}} Q \xrightarrow{x_2 = \frac{12 + 4\sqrt{38}}{2 \cdot 138}} R \\
 & A(x_1, y_1) \\
 & B(x_2, y_2) \\
 & 4\sqrt{99} \approx 36 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
 & \cdot 39 \\
 & 4\sqrt{79} \\
 & 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \\
 & 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14 \\
 & 1) \quad x_2 - x_1 = 7 ; y_2 - y_1 = 4 \\
 & 2) \quad x_2 - x_1 = 6 ; y_2 - y_1 = 2 \\
 & 3) \quad x_2 - x_1 = 5 ; y_2 - y_1 = 4 \\
 & 4) \quad x_2 - x_1 = 4 ; y_2 - y_1 = 6 \\
 & 5) \quad x_2 - x_1 = 3 ; y_2 - y_1 = 8 \\
 & x_2 - x_1 = -6 ; y_2 - y_1 = -14 \\
 & x_2 - x_1 = 16 ; y_2 - y_1 = -18
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

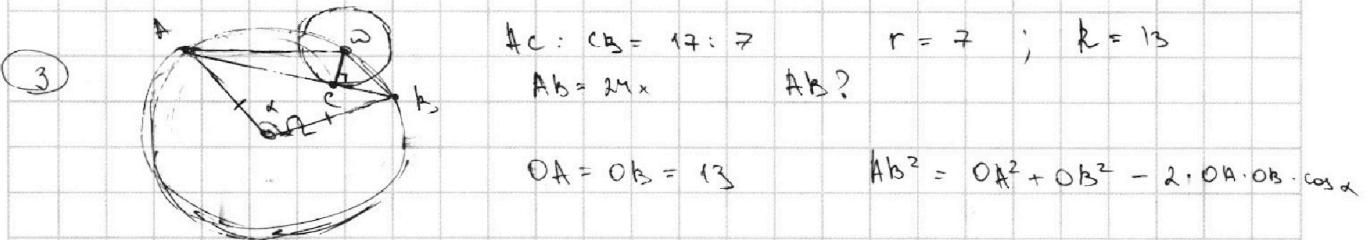
$$\textcircled{1} \ ab : 2^{15} \cdot 7^7 ; \ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} ; \ ac : 2^{13} \cdot 7^{35} \ \min(abc) ?$$

$$(abc)^2 ;$$

$$2^{55} \cdot 7^{68} = (abc)^2 \Rightarrow abc = \underline{\underline{2^{28} \cdot 7^{34}}} - \min$$

$$\textcircled{2} \ \frac{a}{b} - \text{некоа}(\text{рамки}) \max(m) ?$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$



$$\textcircled{5} \ (260 + 9 + 82 + 39 + 60 + 88 + 114)$$

$$2(16 - (x_2 - x_1) + 1)(26 - (y_2 - y_1)) = 14 \quad (16 - (x_2 - x_1) + 1)(26 - (y_2 - y_1) + 1)$$

$$32 - 2x_2 + 2x_1 + 2 + 26 - y_2 + y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$6058 + 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14 \Rightarrow 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = -46$$

$$\begin{aligned} & 1.9 \ 16 \checkmark \\ & 2.11 \ 15 \checkmark \\ & 3.15 \ 14 \checkmark \\ & 4.15 \ 15 \checkmark \\ & 5.18 \ 12 \checkmark \quad \sum = 9(1+25+15) + 11(2+25+1) + 13(3+21+5) + 15 \\ & 6.18 \ 11 \checkmark \\ & 7.21 \ 10 \checkmark \quad + 15(4+17+16) + 17(5+13) + 13(6+14) + 21(7) + 12 \\ & 8.23 \ 9 \checkmark \\ & 9.25 \ 8 \checkmark \quad + 23(8+12) + 27 \cdot 10 + 14 \cdot 7 + 12 \cdot 3 = \end{aligned}$$

17
18
-16
-16
-14
-12
-10
-8
-6
-4
136
17
308

$$= \underline{363} + \underline{473} + \underline{377} + \underline{555} + \underline{306} + \underline{380} + \underline{147} + \underline{460} + \underline{470} +$$

$$+ \underline{98} + \underline{36} = \underline{850} + \underline{730} + \underline{440} + \underline{380} + \underline{1071} = 3471$$

$$\Sigma - 2 = 3471 - 2 = 3469$$

16.5-1 ✓
17.13.0 ✓
18.11.-1 ✓
19.9-2 ✓
20.5-4 ✓
21.6-5 ✓
22.3-6 ✓

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a - 2\sqrt{a^2 - ab} + a - b = b^2$$

$$b^2 - 2a + b = \cancel{2\sqrt{a^2 - ab}}$$

$$b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 + b^3 - 4ab = \cancel{b^2} - 4ab$$

$$b^4 + b^3 + b^2(1 - 4a) = 0$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} = 0$$

$$\frac{3}{81} - \frac{2}{3} + 2 ?$$

$$\frac{3}{81} + \frac{1}{3} + 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$\frac{a}{b}$ - неокраинное число

$a \text{ и } b$ - нбоисое

$$(a; b) = 1$$

$$4 + 5 : 9$$

$$4 \cdot 5 \cdot 9 : 8$$

$$g \cdot a \cdot b = \frac{a \cdot b \cdot 3^2}{m} \quad 274 : 8$$

$$\Rightarrow m = 3^2$$

$m = b^2$ Не можем боять, и.к. $a+b < b^2$

$m = 3b/gb$ и.к., $a < b$

и.к. $m = g$

$$\frac{\frac{a}{b} \cdot b^2 \cdot 3^2}{m} (\Rightarrow \frac{b^2 \cdot 3^2}{m})$$

$a+b : m$

$$\frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{a}{b} \cdot b + b : m$$

$$b \left(1 + \frac{a}{b}\right) : m$$

$$\text{Пример } \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

$$3x^2 - 6x + 2$$

$$3 \cdot \frac{1}{64} - 6 \cdot \frac{1}{8} + 2 \geq 0$$

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \frac{1}{2} \geq 2 \geq 0$$

$$\sqrt{174} \approx 13$$

$$x_1 \approx \frac{-24+42}{138} \approx \frac{3}{23}$$

$$x_2 \approx \frac{-24-42}{138} \approx -\frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 32 \\ \hline 36 \\ 138 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 207 \\ \times 1208 \\ \hline 1784 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 69 \\ \hline 3 \\ 23 \end{array}$$

$$1784 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 87$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 77$$

$$7784 = (2^3 \cdot 3)^2 = 2^6 \cdot 3^2$$

$$2784$$

$$1392$$

$$696$$

$$348$$

$$174$$

$$\frac{60}{138} = \frac{34}{69} = \frac{174}{87}$$

$$4 \sqrt{174}$$

$a+b : m$

$(a+b)^2 - 9ab : m$

$a+b : m \rightarrow \max(m)$

$$3 \pm 4 \sqrt{27}$$

$$g \cdot a \cdot b = \frac{a \cdot b \cdot 3^2}{m} \quad 274 : 8$$

$$4 \cdot 5 \cdot 9 : 8$$

$a+b : m$

$$\frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{a}{b} \cdot b + b : m$$

$$b \left(1 + \frac{a}{b}\right) : m$$

$$\Rightarrow m = 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ