МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 1

Мы знаем, что $ab \vdots 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$.

Перемножим эти три произведения и получим, что

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{(14+17+20)} \cdot 7^{(10+17+37)}$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{51} \cdot 7^{64}$

т.к. слева мы имеем полный квадрат, то он ~~делится~~ в разложении на простые множители имеет двойку в чётной степени. 51 нечёт., тогда двойка должна быть как минимум в 52 степени. То есть

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{52} \cdot 7^{64}$

$abc \vdots 2^{26} \cdot 7^{32}$, ~~если abc делится~~

Из этого следует, ~~т.к. ни a, ни b, ни c не нули, что~~

~~$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$~~

~~Для $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ есть пример, а значит минимальное значение достигается:~~

~~$a = 2^8$~~
~~$b = 2^6$~~
~~$c = 2^{12}$~~

Но известно, что в разложении ac семёрка входит в 37 степени, т.е. и в abc она будет как минимум в 37 ст.

Тогда $abc \vdots 2^{26} \cdot 7^{37}$

т.е. $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, т.к. ни a, ни b, ни $c \neq 0$ и есть пример:

$a = 2^8 \cdot 7^{20}$
$b = 2^6$
$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

Ответ: $abc_{\text{наим}} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Т.к. $\frac{a}{b}$ несократима, то НОД$(a,b)=1$

Преобразуем выражение:

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ Во-первых, числитель $\neq 0$, т.к. $a, b > 0$

Во вторых, если числитель $\vdots\, m$, то и $(a+b)^2-8ab \,\vdots\, m$

Но т.к. $(a+b)^2 \,\vdots\, m$, то $8ab \,\vdots\, m$.

~~П: Пусть БОО~~ ~~НОД(a,~~

$m = 2^\alpha \cdot n$

$8ab \,\vdots\, 2^\alpha \cdot n$, $n \not\vdots\, 2$

П: $\alpha > 3$

Тогда как минимум $ab \,\vdots\, 2$ и либо a, либо $b \,\vdots\, 2$.

БОО $a \,\vdots\, 2$. По усл. $b \not\vdots\, 2$ но тогда $a+b \not\vdots\, 2$ (!?)

~~П~~ Тогда $\alpha \leq 3$

П: $n \,\vdots\, p$

Тогда, т.к. $p \neq 2$, то либо a, либо $b \,\vdots\, p$. БОО $a \,\vdots\, p$. Но по у $b \not\vdots\, p$ и $a+b \not\vdots\, p$ (!?)

Значит m может быть либо 1, либо 2, либо 4, либо 8.

Для $m=8$ есть пример: $a=1$, $b=7$, то

$\frac{1}{7}$ - несократимая $\frac{1+7}{1-6\cdot 7+49} = \frac{8}{8}$ - сокращается на 8.

Ответ: $m_{наиб.} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

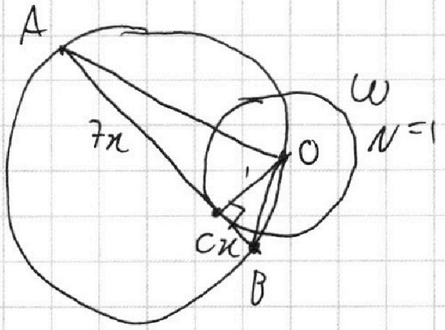
№3

Пусть центр $\omega = O$.

Т.к. AB — кас, то $OC \perp AB$.

в $\triangle OCB$, $\angle C = 90^\circ$ по т. Пифагора:

$OB^2 = x^2 + 1 \Rightarrow OB = \sqrt{x^2+1}$



в $\triangle OAB$ по т. синусов:

(*) $\dfrac{OB}{\sin\angle BAO} = 2R = 2\cdot 5 = 10$

в $\triangle OAC$, $\angle C = 90^\circ$:

$\sin\angle BAO = \dfrac{OC}{AO} = \dfrac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$

↑ по т. Пифагора

Тогда если подставить в (*) два найденных равенства:

$\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{1+49x^2} = 10$ Пусть $x^2 = a$, $a \geq 0$

$\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{49a+1} = 10$

$(a+1)(49a+1) = 100$

$49a^2 + 50a - 99 = 0$

$D = 50^2 + 49\cdot 99\cdot 4 = 2500 + 4851\cdot 4 = 2500 + 19404 = 21904 =$
$= 148^2$ иначе $a<0$ (?)

$a = \dfrac{-50 \oplus 148}{2\cdot 49} = \dfrac{148-50}{2\cdot 49} = \dfrac{98}{2\cdot 49} = 1$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

$AB = 8x = 8$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

Обозначим $2x^2-5x+3=a$, $2x^2+2x+1=b$

Заметим, что $a-b=2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=2-7x$

Тогда равенство можно переписать, как:

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b$

Пусть $\sqrt{a}=c$ $\sqrt{b}=d$, то

$c-d=c^2-d^2$

$c-d=(c-d)(c+d)$ $\quad (c-d)(c+d-1)=0$

I Если $c=d$, $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ $\begin{cases}a=b\\ a>0\end{cases}$ $\begin{cases}a-b=0\\ a>0\end{cases}$ $\begin{cases}2-7x=0\\ 2x^2-5x+3>0\end{cases}$

$\begin{cases}x=\frac{2}{7}\\ 2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3>0\end{cases}$ $\quad \frac{8-70+3\cdot 49}{49}>0$

$8-70+141>0$ — верно

Проверим значение $x=\frac{2}{7}$ подстановкой:

$\sqrt{2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3}-\sqrt{2\cdot\frac{4}{49}+2\cdot\frac{2}{7}+1}\overset{?}{=}2-\frac{7\cdot 2}{7}$

$\sqrt{2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3}\overset{?}{=}\sqrt{2\cdot\frac{4}{49}+2\cdot\frac{2}{7}+1}$

$2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3\overset{?}{=}2\cdot\frac{4}{49}+2\cdot\frac{2}{7}+1$

$2=7\cdot\frac{2}{7}$ — верно, т.е. $x=\frac{2}{7}$ — корень

II ~~Если $c\neq d$. Тогда можно с~~ Если $c+d=1$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

По у. $\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b$, сложим:

$2\sqrt{a}=a-b+1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Возведём в квадрат:

$$\begin{cases} 4a = \cancel{a^2-2ab+b^2+1} \quad (a-b+1)^2 \\ a-b+1 \geq 0 \end{cases}$$ т.к. a сразу >0 отсюда

$$\begin{cases} 8x^2-20x+12 = (2-7x+1)^2 \\ 2-7x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^2-20+12 = (3-7x)^2 \\ 7x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2-20+12 = 9-42x+49x^2 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} 41x^2-22x-3=0 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$D = 22^2+12\cdot 41 = 484+492 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2\cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right. \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

Проверим оба корня:

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77+14\sqrt{61} \leq 123$$

$$14\sqrt{61} \leq 46$$

$14\sqrt{61} \geq 14\cdot\sqrt{49} = 14\cdot 7 > 46$ неверно, т.е. при $x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ выражение не будет иметь смысла

$$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77-14\sqrt{61} \leq 123$$

$-14\sqrt{61} \leq 46$ – верно

$b<0$ быть не может, т.к. $D<0$ и коэф. при старшем члене >0

$x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ подходит, ~~при подстановке в корни~~ т.к. все переходы были равносильными

Ответ: $x = \frac{2}{7}$, $x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$

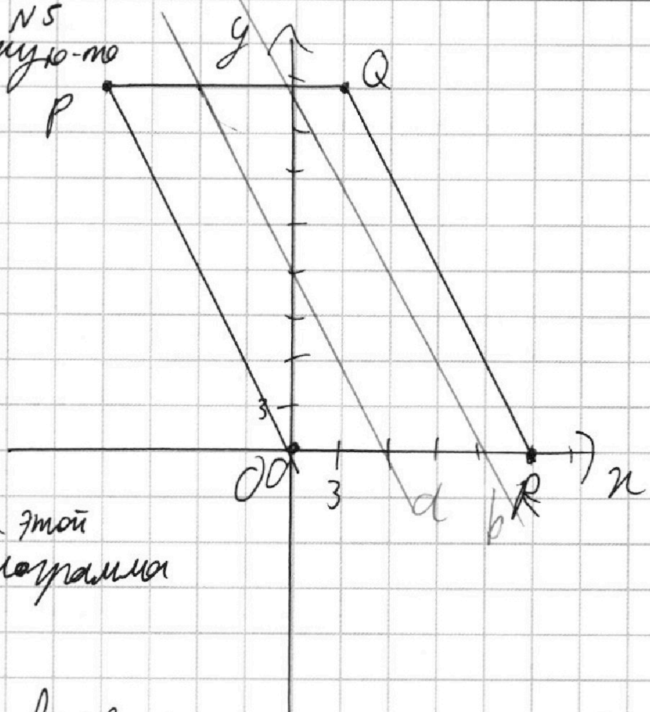
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N5



Пусть мы выбрали какую-то точку A внутри OPQR $(x_1;y_1)$

~~Тогда $y_2 = 12 - 2x_1 + y_1$~~

То $y_2 = -2x_2 + 12 + 2x_1 + y_1$

Это уравнение прямой

Любая целочисленная точка этой прямой внутри параллелограмма будет подходить.

-2 – наклон, эта прямая будет параллельна стороне OP паралл-мма.

$+12+2x_1+y_1$ – сдвиг.

Рассмотрим новую прямую α вида: $y = -2x + C$.

Узнаем, какими могут быть x_1 и y_1, чтобы точка B попала на эту пр.

Иксы при x равны, приравняем сдвиг:

$12+2x_1+y_1 = C$

$y_1 = C - 12 - 2x_1$ – ур.-ие прямой для точек A, при которых B попадёт на прямую α.

Она будет параллельна α.

Сдвиг: $C-12$, у α: C

C никогда не равно $C-12$, значит прямые всегда разные.

Тогда мы можем задать корды точек A и B параметрически:

$$\begin{cases} y_2 = -2x_2 + C \\ y_1 = -2x_1 + C - 12 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

При этом $c \in \mathbb{Z}$, чтобы все корни были целыми.

На каждой прямой всегда внутри параллелограмма будет располагаться ровно 13 целых точек, при каждом увеличении x на 1 y уменьшается на 2, тогда если начать с точки пересечения прямой и верхней стороны пар-мма, то можно сделать ровно 12 сдвигов вниз и получить ровно 13 различных точек

Для одного значения параметра c нам будет подходить $13 \cdot 13 = 169$ различных пар точек.

Найдём все допустимые значения c.

Нижняя прямая со сдвигом на $c-12$, верхняя — c.

Если $c-12<0$, то прямая не имеет общих точек с параллелограммом и одна точка из пары не может быть определена.

То $c-12 \geqslant 0$ $c \geqslant 12$.

Аналогично $c \leqslant 27$, иначе тоже не будет одной из точек.

Тогда $c \in [12; 27]$ и принимает 16 целых значений

То вариантов $169 \cdot 16 = 2704$

Ответ: 2704

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

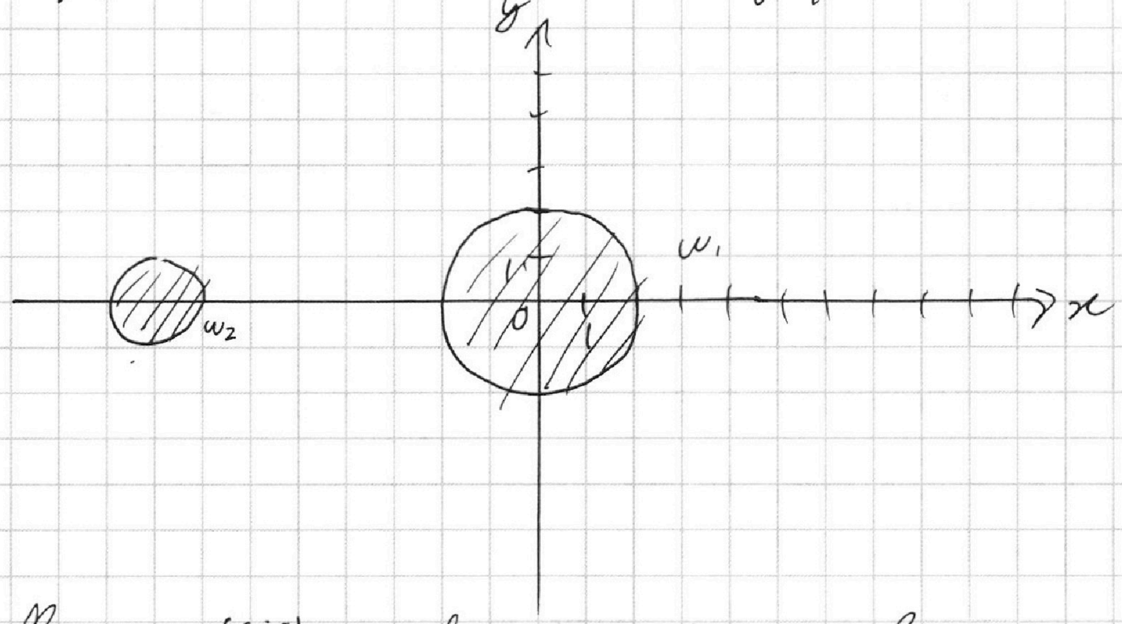
№6

$\begin{cases} ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \\ ax-y+10b=0 \end{cases}$ ← рассмотрим отдельно каждую скобку и определим сначала границы фигур, которые они отсекают

$(x+8)^2+y^2=1$ – уравнение окр-ти ω_1 с ц. $(-8;0)$ и рад. 1

$x^2+y^2=4$ – уравнение окр-ти ω_2 с ц. $(0;0)$ и рад. 2

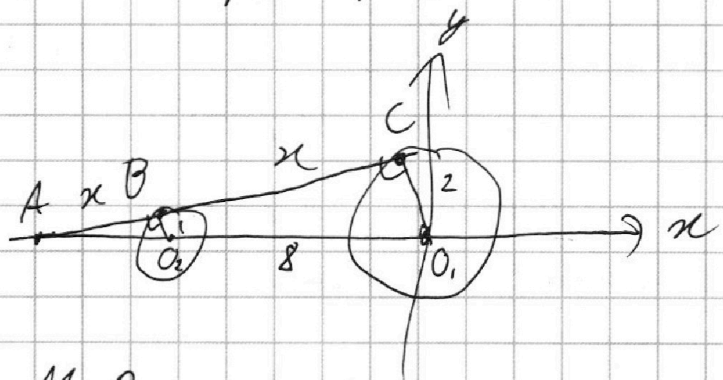
Начертим эти две окружности на коорд-ой плоск-ти и определим, какие области нам подходят:

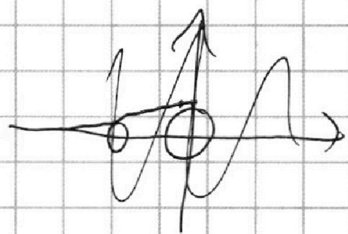


В точке $(0;0)$ произв-ие <0, значит в силу непрерывности границ фигур, знак будет чередоваться при каждом переходе через границу.

$y=ax+10b$ – ур-ие прямой. ~~Система~~ Если рассмотреть все положения прямой на этой плоскости, то очевидно, что если прямая пересекает любую окр-ть, то система будет иметь бесконечное кол-во решений. При касании мы получаем один валидный корень системы. Касаться каждую окр-ть прямая может единожды, значит для двух корней надо, чтобы

прямая была общей касательной двух окр-тей.
Таких возможных прямых 4 штуки
Сделаем набросок рисунка для внешней общей кас-ой





Необходимо найти значения a. в уравнении прямой $y = ax + b$ a это тангенс угла наклона прямой к O_x.

Обозначим некоторые точки пересечений на рисунке, пусть $AB = x$. Т.к. ω_2 можно перевести в ω_1 гомотетией с ц. A и $k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{1} = 2$, то $AC = 2x$ и $BC = x$ на этом рисунке

По построению $O_1O_2 = 8$

в $\triangle ABO_2$ по т. Пифагора $AO_2 = \sqrt{x^2+1}$

Из гомотетичности картинки получаем отношение:

$$\frac{AO_2}{BO_2} = \frac{AO_1}{CO_1} \qquad \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \frac{\sqrt{x^2+1}+8}{2} \qquad 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}+8$$

$\sqrt{x^2+1} = 8$ т.к. x это длина отрезка

$x^2+1 = 64 \qquad x^2 = 63 \qquad x = +3\sqrt{7}$

$$\operatorname{tg} \underset{\substack{\parallel \\ a}}{\angle BAO_2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

$a = \frac{\sqrt{7}}{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

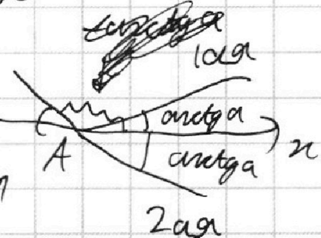
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	X	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Вторая внешняя общая кас-ая будет симметрична первой отн-о линии центров, т.е. Ox.

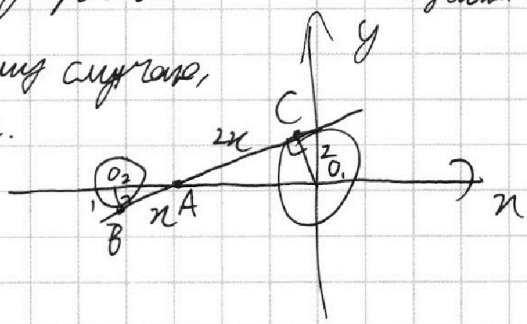
Значит Ox будет бис-ой двух кас-ых и ~~второго~~ тангенс второго угла будет $-a = -\frac{\sqrt{7}}{21}$. В этом несложно убедиться, если рассмотреть рисунок



(либо прямая 1ая поднималась с $x\nearrow$, а вторая опускалась с $x\nearrow$) (а то же знач. из симм-ии)

Теперь рассмотрим случай внутренней кас-ой

Рассуждения аналогичны первому случаю, только коэфф-нт гомотетии $k=-2$.



Учтём же $AO_2=\sqrt{x^2+1}$

$AB=x$ $AC=2x$

Из отношения $\frac{AO_2}{BO_2}=\frac{AO_1}{CO_1}$ получаем

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{1}=\frac{8-\sqrt{x^2+1}}{2}$$

$$3\sqrt{x^2+1}=8$$

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{8}{3}$$

$$x^2+1=\frac{64}{9}$$

$$x^2=\frac{55}{9}$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{55}}{3}=\frac{\sqrt{55}}{3}$$

То $\underbrace{tg\angle O_2AB}_{a}=\frac{1\cdot 3}{\sqrt{55}}=\frac{3\sqrt{55}}{55}$

аналогично первым рассуждениям $a=-\frac{3\sqrt{55}}{55}$ подходит.

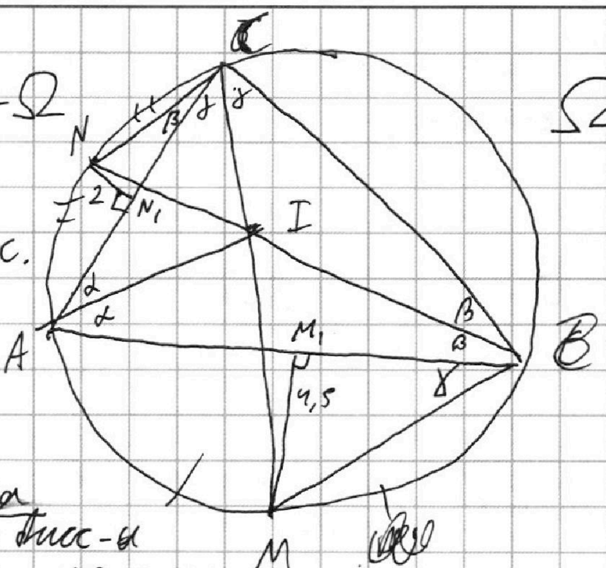
b найдётся, т.к. это просто сдвиг вверх вниз, он всегда $\exists$ единственный. Ответ: $a=\pm\frac{\sqrt{7}}{21}$, $a=\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



Пусть опис. окр-ть $\triangle ABC$ – Ω

I – инцентр, M_1 и N_1 –
– основания перп-ов на AB и AC.
соотв
$\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$, $\angle C=2\gamma$
AI, BI, CI – бисс-ы,
делят углы пополам.
~~CIM и BIN лежат на~~
тройки одних прямых, т.к. бисс-ы
пересекают опис. окр-ти треугольников
в серединах дуг.
$\angle NCA=\angle NBA=\beta$, как опир. на одну дугу Ω
аналогично $\angle ABM=\angle ACM=\gamma$.
Тогда в $\triangle N_1NC$, $\angle N_1=90^\circ$ $\sin\beta=\frac{2}{NC}$
в $\triangle M_1MB$, $\angle M_1=90^\circ$ $\sin\gamma=\frac{4{,}5}{MB}$ (*)

Заметим, что по лемме о трезубце $NA=NI=NC$,
т.е. $\triangle AIC$ вписан в окр-ть с ц. N.
Аналогично $AM=IM=BM$ и AIB вписан в окр-ть с ц. M.
Тогда в $\triangle ACI$ по т. синусов
$\frac{AI}{\sin\gamma}=2R_{опис}=2\cdot NC$
в $\triangle AMB$:
$\frac{AI}{\sin\beta}=2R_{опис}=2MB$ ⟹ Перемножим: $\frac{AI^2}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=4MB\cdot NC$
подставим равенства (*):

$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC}\cdot\frac{4{,}5}{MB}}=4MB\cdot NC$ $\quad\frac{AI^2\cdot MB\cdot NC}{9}=4\cdot MB\cdot NC$ $\quad AI^2=36$

$AI=\pm 6$ т.к. это длина отрезка. Ответ: $AI=6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$4(2x^2-5x+3)=9-42x+49x^2$

$8x^2-20x+12=9-42x+49x^2$

$41x^2-22x-3=0$

$D=484+492=976$

$22\cdot22=44+44\cdot10=484$

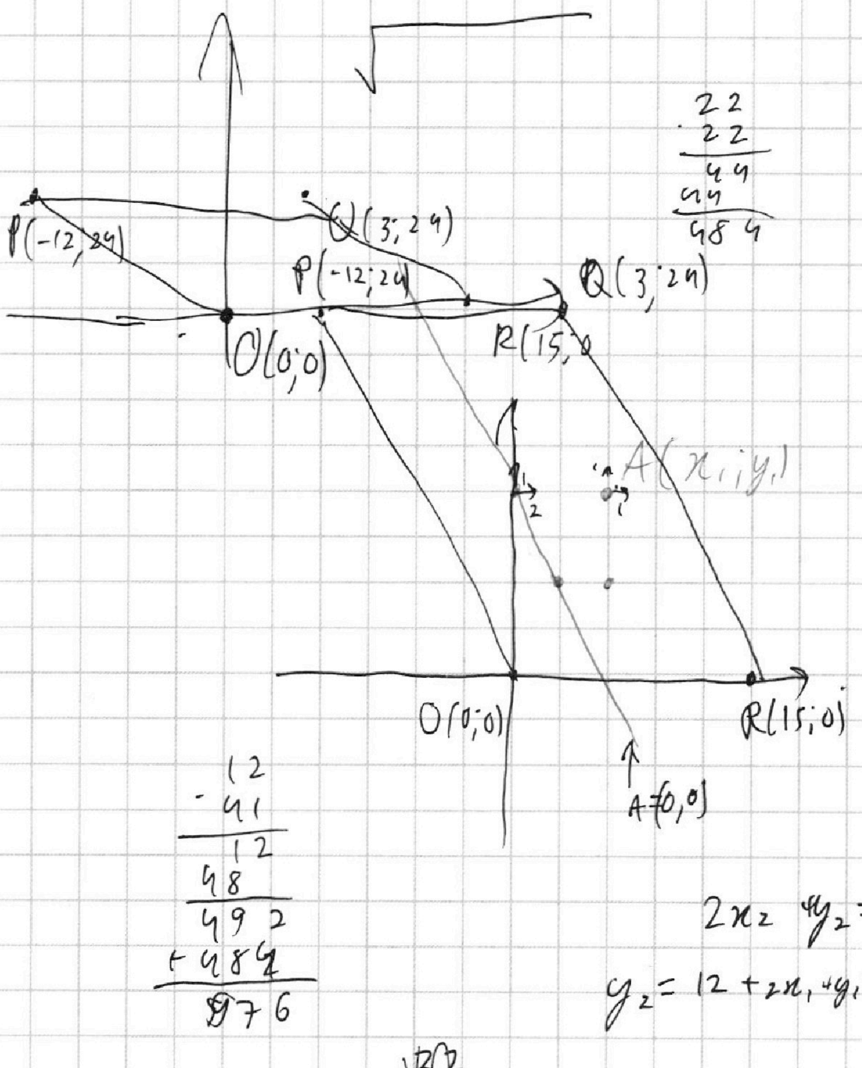
$123-77=46$

$41\cdot12=82+41\cdot10=492$

$492+484=976$

976 | 2
488 | 2
244 | 2
122 | 2
61 |

$(4\cdot7$



$y_2-y_1=12-2x_2+2x_1$

$14-7$

$y=12-2x$

$12\cdot41=12+48\cdot10=492$

$492+484=976$

976 | 4
244 | 4
61 |

$32-32$

$2\cdot$ —

$2x_2+y_2=12+2x_1+y_1$

$B(x_2;y_2)$

$y_2=12+2x_1+y_1-2x_2$

$x_2-x_1=x$

$y_2-y_1=y$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}$

$2x+y=12$

$2x+y-12=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

a b $a-b$

$(2x-1)(x-2)=$
$=2x^2-4x-x+2=$
$=2x^2-5x+2$

$\sqrt{(2x-1)(x-2)}$

$\sqrt{(x-1)(2x-3)}-\sqrt{\ }$

$D=25-8\cdot3=1$

$x=\frac{5\pm1}{4}$ $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1{,}5\end{array}\right.$

c d $\begin{cases}a\geq0\\b\geq0\end{cases}$

$\sqrt{2x^2}$ $\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b$

$\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

$2(x-1)(x-1{,}5)$

$(x-1)(2x-3)$

$(2x^2-5x+3)-(2x^2+2x+1)=$
$=2-7x$

$\cancel{2x^2-5x+3=4-28x+49x^2}$

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2-5x+7x+1}=2-7x$

$2x^2-5x+1=a$

$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\leq\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

$\cancel{\sqrt{a+2}-\sqrt{a+7x}=2-7x}$

$2x^2-5x+3-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}+2x^2+2x+1=4-28x+49x^2$

$c,d\geq0$

$-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=$

$2\sqrt{2x^2-5x+3}=3-7x$

$c-d=c^2-d^2$

$c-d=(c-d)(c+d)$

$\cancel{a-2\sqrt{ab}+b=a^2-2ab+b^2}$

I $c=d$

$\sqrt{a}=\sqrt{b}$

$a=b$

$a\geq0$

$b\geq0$

$2x^2-5x+3=2x^2+2x+1$

$2=7x$

$\boxed{x=\frac{2}{7}}$

II $c\neq d$

$1=c+d$

$1=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$1-2\sqrt{a}+a=b$

$\cancel{1=a+2\sqrt{ab}+b}$

$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

$1-2\sqrt{2x^2-5x+3}+2x^2-5x+3=2x^2+2x+1$

$f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a}{b}$ $(a,b)=1$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{a+b}{(a-b)^2-4ab}$$

$a+b \vdots m$

$a^2-6ab+b^2 \vdots m$

$(a+b)^2-8ab \vdots m$

$a+b \vdots m$

$8ab \vdots m$

$m \le 8$

если есть p : $m \vdots p$ $\left[\begin{array}{l} a \vdots p \\ b \vdots p \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $a+b \not\vdots p$ $\left[\begin{array}{l} b \not\vdots p \\ a \not\vdots p \end{array}\right.$

$m=8$

$\boxed{\frac{1}{7}}$

$$\frac{1+7}{1-6\cdot 7+49}=\frac{8}{50-42}=\frac{8}{8}=\boxed{1}$$

$NC^2=NO^2-1$

$NC^2+1=NO^2$

$a+b \ne 8$ $\sqrt{49x^2+CT^2}$

$AC\cdot CB=CO\cdot CT$

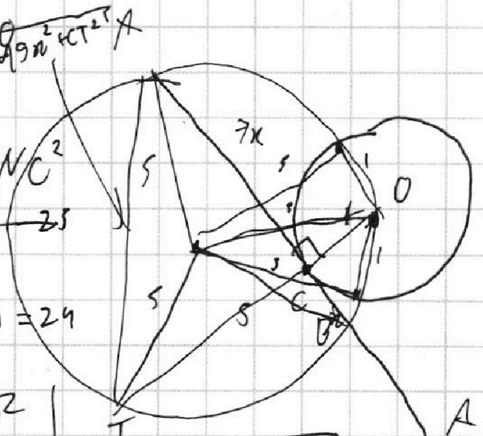
$7x^2=CT$

$CT\cdot(CT+2)$

$25-WC^2$

$7x^2=WC^2-25$

$WC\cdot WB=25-1=24$



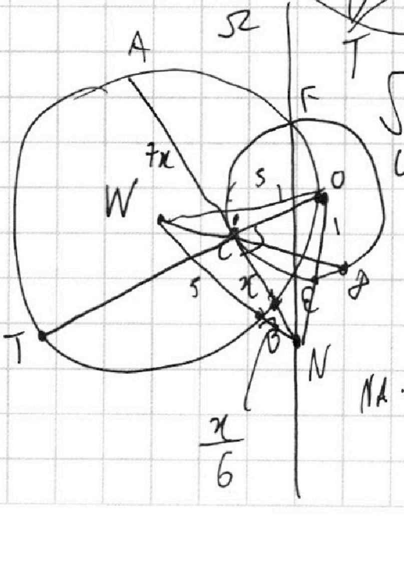
$\cancel{\operatorname{tg}\alpha=\frac{7x}{7x^2}}$

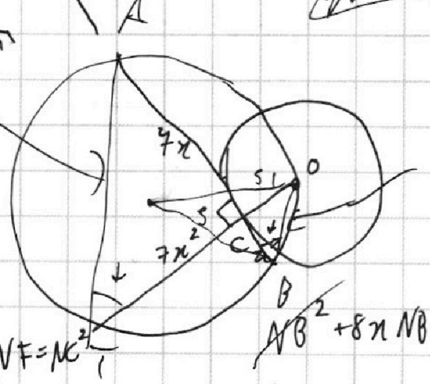
$NB=\frac{x}{6}$

$6x\,NB=x^2$

$\sqrt{1+49x^2}$

$\sqrt{49x^2+49x^4}$





$NA\cdot NB=NE\cdot NF=NC^2$

$\frac{x}{6}$

$NA\cdot NB=NC^2$

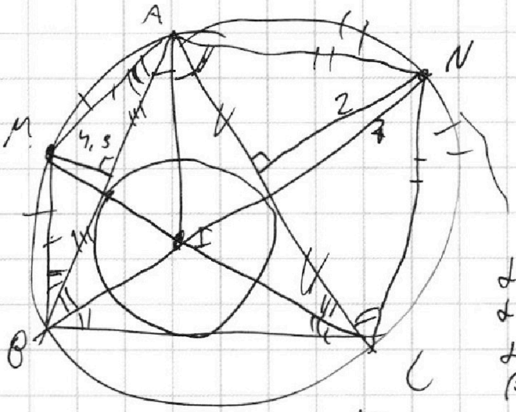
$\cancel{NB^2}+8x\,NB=\cancel{NB^2}+2x\,NB+x^2$

$NB\cdot(NB+8x)=(NB+x)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$= 64$
$= 20+44$
$= 27+37$
$10+17+37=$

черновик

$\alpha+\beta+\gamma=26$
$\alpha+\beta \geq 14$
$\alpha+\gamma \geq 20$
$\beta+\gamma \geq 17$

$\begin{cases} \alpha=8 \\ \gamma=12 \\ \beta=6 \end{cases}$

$14+17+20=$
$=34+17=41+10=$
$=51$

$\frac{AI}{\sin\angle ICA} = 2R = \frac{4,5}{\sin\angle MBA}$

$AI^2 = 4,5\cdot 2$

$\frac{AI}{\sin\angle ABI} = 2R = \frac{2}{\sin\angle ACN}$

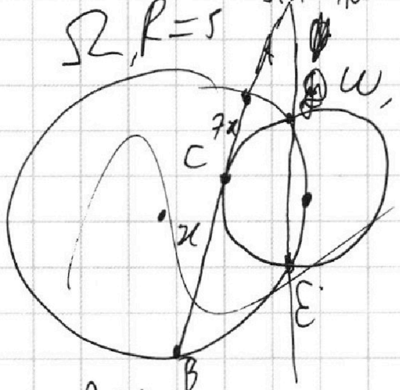
$AI^2 = 9$

$AI = 3$

~~γ β один~~
~~β γ один~~

$\Omega, R=5$

$\omega, r=1$



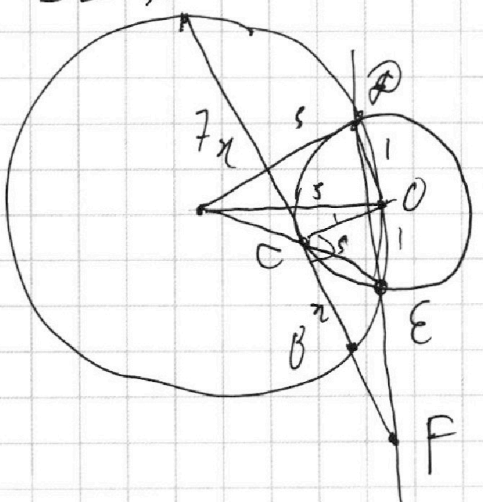
$\begin{cases} \alpha+\beta=14 \\ \alpha+\gamma=17 \\ \beta+\gamma=20 \end{cases}$

~~$\gamma=\alpha=6$~~

$\alpha+\beta+\gamma=32$
$\alpha+\beta=14$
$\gamma=18$ abc
$\alpha=19$
$\alpha+\beta=10$
$\beta+\gamma=17$
$\alpha+\gamma=37$

$ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{10}$
$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17}$
$ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37}$
$a^2b^2c^2 \vdots 2^{51}\cdot 7^{64}$
$a^2b^2c^2 \vdots 2^{52}\cdot 7^{64}$
$abc \vdots 2^{26}\cdot 7^{32}$
$abc \geq 2^{26}\cdot 7^{32}$

$\Omega, R=5$



$\omega, r=1$

$FE\cdot FD = FB\cdot FA = FC^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ax - y + 10b = 0$ прямая

$y = ax + 10b$ ~~всегда 1 решение~~

$\operatorname{tg}\alpha$

$x^2 + y^2 \quad 4$

$a = \pm \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2\sqrt{14}}\right)$

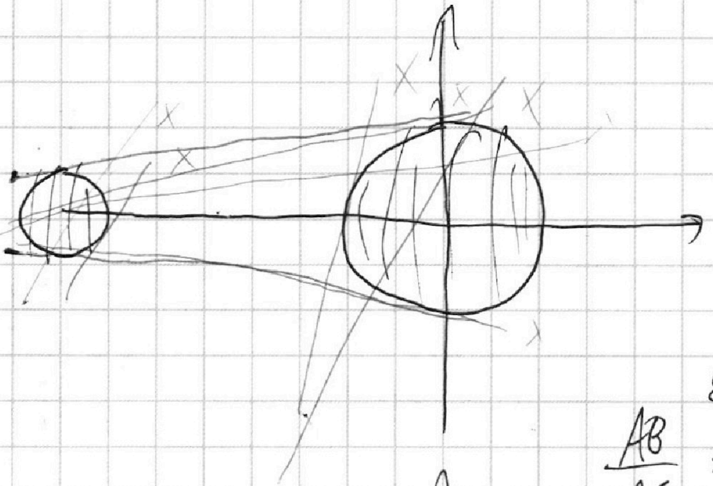
$x = \frac{2\sqrt{14}}{3}$

$x^2 = \frac{56}{9}$

$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$

$\sqrt{x^2+1} = \frac{8}{3}$

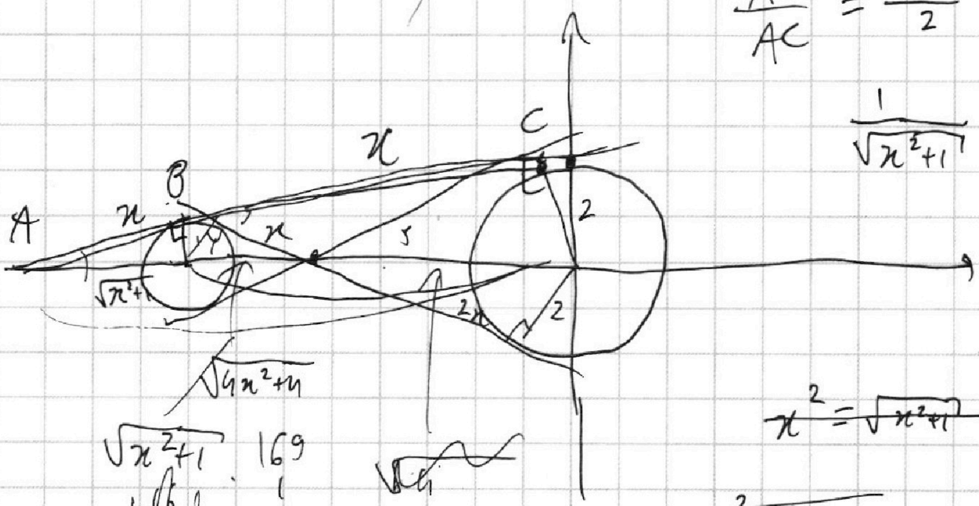
$8 - \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x^2+1}$



$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$16 \cdot 9 = 144$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{8 - \sqrt{x^2+1}}$



$2704 : 16 = 169$

~~$x^2 = \sqrt{x^2+1} - 1$~~

$\sqrt{x^2+1} \quad 169$

$169 \cdot 16$

~~$\sqrt{4}$~~

~~$4x^2 + 4 =$~~

$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + 5}$

$\sqrt{x^2+1} + 5 = 2\sqrt{x^2+1}$

$5 = \sqrt{x^2+1}$

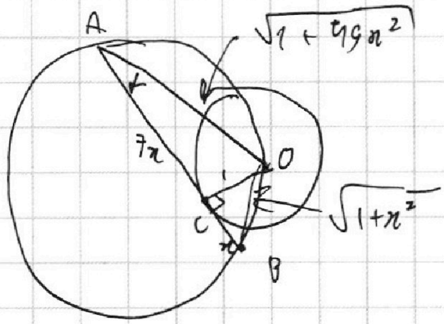
$25 = x^2 + 1 \quad x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$a = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$

$a = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$

$169 \cdot 16 = 2704$

МФТИ



$19404 + 2500 = 21904$

$$\frac{OB}{\sin\alpha} = 10$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+49x^2} = 10$$

$$(1+x^2)\cdot(1+49x^2) = 100$$

$$(1+a)\cdot(1+49a) = 100$$

$$49a^2 + 50a - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 19404 = 21904$$

$$a = \frac{-50 \pm 2\cdot 37}{49\cdot 2} = \frac{74-50}{49\cdot 2} = \frac{24}{49\cdot 2} = \frac{12}{49}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$AB = \frac{16\sqrt{3}}{7}$$

$99\cdot 99 = 9801$

$4851\cdot 4 = 19404$

$19404 = 4\cdot 9\cdot 7\cdot 7\cdot 11$

$37\cdot 37 = 1369$

$21904 : 4 = 5476$, $5476 : 4 = 1369$

$148\cdot 148 = 21904$

$74\cdot 74 = 5476$

$37\cdot 2 = 74$

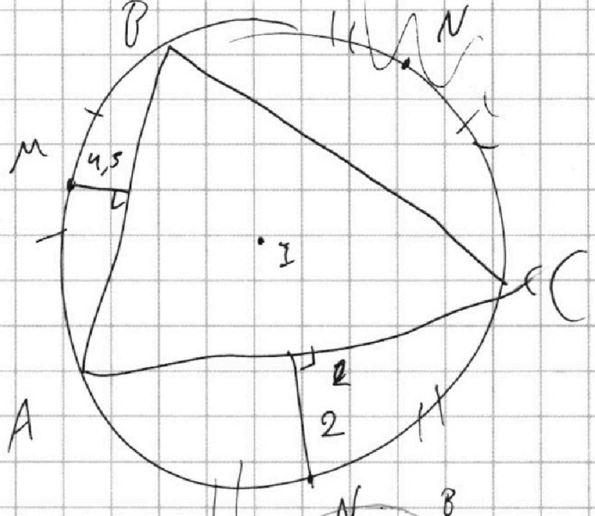
$1184 : 2 = 592$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\sin\beta = \frac{2}{NC}$

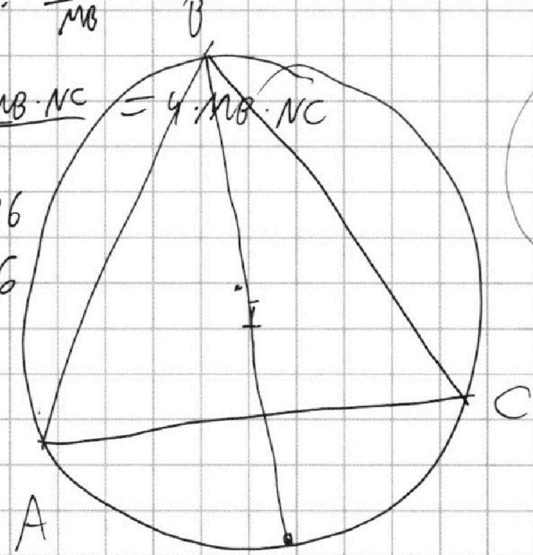
$\sin\gamma = \frac{4{,}5}{MB}$

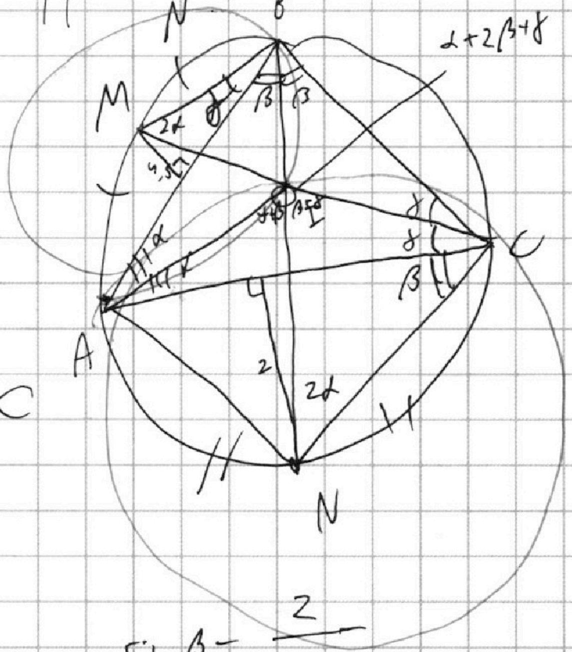
$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC}\cdot\frac{4{,}5}{MB}} = 4MB\cdot NC$

$\frac{AI^2\cdot MB\cdot NC}{9} = 4\cdot MB\cdot NC$

$AI^2 = 36$

$AI = 6$





$\frac{AI^2}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = 4MB\cdot NC$

$\frac{AI}{\sin\gamma} = 2NC$

$\frac{AI}{\sin\beta} = 2MB$

$\frac{NC^2}{2} = \frac{MB^2}{4{,}5} = \frac{MB}{\sin\gamma}$

$4{,}5\,NC^2 = 2MB^2$

$\frac{MB}{\sin\gamma} = 2R \quad \frac{NC}{\sin\beta} = 2R$

$\sin\beta = \frac{2}{NC}$

$\frac{NC}{\sin\beta} = 2R =$

$\sin\gamma = \frac{4{,}5}{MB}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2\cdot\frac{121-44\sqrt{61}+4\cdot 61}{41\cdot 41}-5\cdot\frac{}{41\cdot 41}}$$

$$=$$

$$\sqrt{3518+322\sqrt{61}}=5+14\sqrt{61}+\sqrt{3313-252\sqrt{61}}$$

$$x^2$$

$$x=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}+14\sqrt{61}$$

$$\sqrt{3518+322\sqrt{61}}-\sqrt{3313-252\sqrt{61}}=\frac{41\cdot 5}{\cancel{3285}}$$

$$x^2=\frac{121-44\sqrt{61}+244}{1681}$$

$$\sqrt{\frac{242-88\sqrt{61}+488-55\cdot 41+10\cdot 41\sqrt{61}+3\cdot 1681}{1681}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3518+322\sqrt{61}}{1681}}-$$

$$\sqrt{\frac{242-88\sqrt{61}+488+22\cdot 41-4\cdot 41\sqrt{61}+1681}{1681}}$$

$$\sqrt{\frac{3313-252\sqrt{61}}{1681}}$$

$5+14\sqrt{61}$

$$2-\frac{77-14\sqrt{61}}{41\cdot\cancel{1681}}$$

$$\frac{3362-77+14\sqrt{61}}{1681}$$

$41\cdot 41$: 41, 164, 1681

$410-88=322$

$55\cdot 41$: 55, 220, 2255

$1681\cdot 3=5043$

$82-77=5$

$5043-2255=2788$, $2788+242=3030$, $3030+488=3518$

$4\cdot 41=164$, $164+88=252$

$2583+242=2825$, $2825+488=3313$

$1681+902=2583$

$22\cdot 41$: 22, 88, 902

$1681\cdot 2=3362$

$3362-77=3285$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!