



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Мы знаем, что $ab: 2^{19} \cdot 7^{10}$, $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$.

Перемножим эти три произведения и получим, что

$$a^2 b^2 c^2: 2^{(19+17+20)} \cdot 7^{(10+17+37)}$$
$$a^2 b^2 c^2: 2^{56} \cdot 7^{64}$$

т.к. слева мы имеем полный квадрат, то он ~~делится~~ в разложении на простые множители имеет степень в четной степени. 51 нечет, тогда степень должна быть как минимум в 52 степени. Но есть

$$a^2 b^2 c^2: 2^{52} \cdot 7^{64}$$
$$abc: 2^{26} \cdot 7^{32}$$

~~если abc делится~~

Из этого следует, т.к. ни a , ни b , ни c не нули, что

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

~~Для $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ есть пример, а значит минимальное значение достигается:~~

$$\begin{aligned} a &= 2^8 \\ b &= 2^6 \\ c &= 2^{12} \end{aligned}$$

Но известно, что в разложении ac цифра вносит в 37 степени, т.е. и в abc она будет как минимум в 37 ст.

Тогда $abc: 2^{26} \cdot 7^{37}$
т.е. $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, т.к. ни a , ни b , ни $c \neq 0$ и
есть пример:

$$\begin{aligned} a &= 2^8 \cdot 7^{20} \\ b &= 2^6 \cdot 7^{17} \\ c &= 2^{12} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

Ответ: $abc_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

П.к.и. $\frac{a}{b}$ несократима, то $\text{НОД}(a, b) = 1$

Предположим выразим:

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \quad \text{По-первому, числитель } \neq 0, \text{ т.к. } a, b > 0$$

По второму, если числитель $:m$, то и $(a+b)^2-8ab :m$

По т.к. $(a+b)^2 :m$, то $8ab :m$.

П: ~~Изначально 500~~ ~~НОД~~

$$m = 2^k \cdot n$$

$$8ab : 2^k \cdot n, \quad n \not\div 2$$

$$m : 2 > 3$$

Тогда как минимум $ab : 2$ и либо a , либо $b : 2$.

500 $a : 2$. По пог. $b : 2$ но тогда $a+b : 2$ (!?)

Тогда $2 \leq 3$

$$m : n : p$$

Тогда, т.к. $p \neq 2$, то либо a , либо $b : p$. 500 $a : p$. Но пог $b : p$ и $a+b : p$ (!?)

Значит m может быть либо 1, либо 2, либо 4, либо 8.

Для $m=8$ есть пример: $a=1, b=7$, то

$$\frac{1}{7} - \text{несократима} \quad \frac{1+7}{1-6 \cdot 7 + 49} = \frac{8}{8} - \text{сокращается как 8.}$$

Ответ: $m_{\text{наиб.}} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Обозначим $2x^2 - 5x + 3 = a$, $2x^2 + 2x + 1 = b$

Заметим, что $a - b = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x$

Тогда равенство можно переписать, как:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

Пусть $\sqrt{a} = c$, $\sqrt{b} = d$, то

$$c - d = c^2 - d^2$$

$$c - d = (c - d)(c + d)$$

$$(c - d)(c + d - 1) = 0$$

⊕ Если $c = d$, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ $\begin{cases} a = b \\ a > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a - b = 0 \\ a > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{8 - 70 + 3 \cdot 49}{49} > 0$$

Проверим значение $x = \frac{2}{7}$ $8 - 70 + 141 > 0$ - верно
подстановка:

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} + \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1} \stackrel{?}{=} 2 - \frac{7 \cdot 2}{7}$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} \stackrel{?}{=} \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1}$$

$$2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 \stackrel{?}{=} 2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1$$

$$2 = 7 \cdot \frac{2}{7} \text{ - верно, т.е. } x = \frac{2}{7} \text{ - корень}$$

⊖ Если $c \neq d$. Тогда можно c Если $c + d = 1$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

По у. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$, сложим:

$$2\sqrt{a} = a - b + 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возведем в квадрат:

$$\begin{cases} 4a = a^2 - 2ab + b^2 + 1 & (a-b+1)^2 \leftarrow a \text{ стороны } > 0 \text{ стороны} \\ a-b+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 = (2-7x+1)^2 \\ 2-7x+1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 = (3-7x)^2 \\ 7x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

Проверим оба корня:

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77 + 14\sqrt{61} \leq 123$$

$$14\sqrt{61} \leq 46$$

$$\sqrt{61} \leq \frac{46}{14}$$

$$14 \cdot \sqrt{49} = 14 \cdot 7$$

$$14 \cdot 7 = 98$$

$$98 > 46$$

$$\text{неверно, т.е. три } x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\text{выражение не имеет смысла}$$

$$\text{б.с. дать не может, т.к. } D < 0 \text{ и } k < 0.$$

$$\text{при старшем члене } > 0$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77 - 14\sqrt{61} \leq 123$$

$$-14\sqrt{61} \leq 46 - \text{верно}$$

$$x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

не подходит, при ~~негативных~~ ~~выражениях~~
т.к. все перемены для равносильности

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}, x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть мы выберем какую-то
точку A внутри $OPQR$
 (x_1, y_1)

Тогда $y_2 = 12 - 2x_1 + y_1$

То $y_2 = -2x_2 + 12 + 2x_1 + y_1$

Это уравнение прямой

Каждая целочисленная точка этой
прямой внутри параллелограмма

будет подходить.

-2 -наклон, эта прямая будет параллельна стороне OP
паралл-ма.

$+12 + 2x_1 + y_1$ - сдвиг.

Рассмотрим любую прямую a вида: $y = -2x + c$.

Узнаем, какими могут быть x , и y , тогда точка B
попадет на эту пр.

Корды при x равны, приравняем сдвиги:

$$12 + 2x_1 + y_1 = c$$

$y_1 = c - 12 - 2x_1$ - ур-ие прямой для точек A , при
которых B попадет на прямую a .

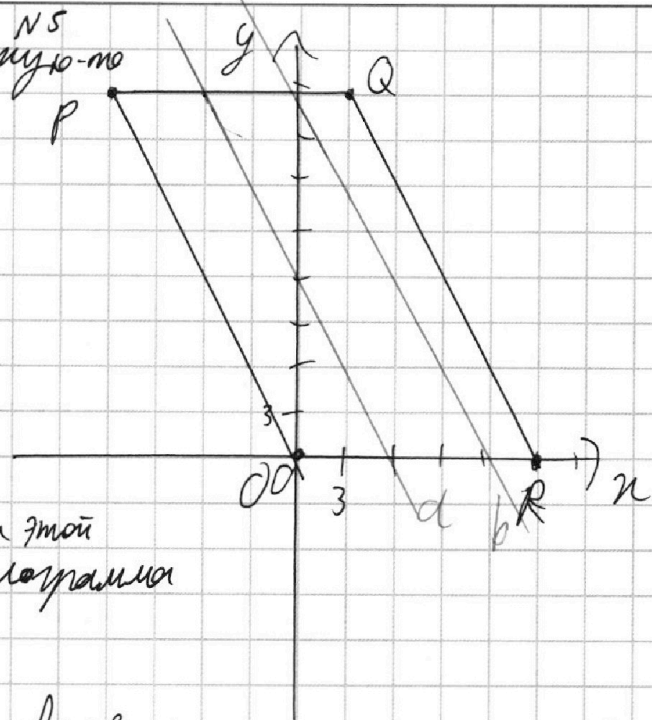
Она будет параллельна a .

Сдвиг: $c - 12$, у a : c

c никогда не равно $c - 12$, значит прямые всегда разные.

Когда мы можем задать корды точек A и B параллелизмами:

$$\begin{cases} y_2 = -2x_2 + c \\ y_1 = -2x_1 + c - 12 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поруа QR-кода недопустима!

При этом $c \in \mathbb{Z}$, тогда все координаты будут целыми.

На каждой прямой всегда внутри параллелограмма будет располагаться ровно 13 ^{целых} точек, при каждом увеличении x на 1 y уменьшается на 2 , тогда если начать с точки пересечения прямой и верхней стороны параллелограмма, то можно сделать ровно 12 шагов вниз и получить ровно 13 различных точек.

Для одного значения параметра с нам будет подходить $13 \cdot 13 = 169$ различных пар точек.

Найдём все возможные значения c .

Нижняя прямая со стороной $c-12$, верхняя — $c \in \mathbb{Z}$.

Если $c-12 < 0$, то прямая не имеет никаких точек параллелограмм и одна точка из пары не может быть определена.

Тогда $c-12 \geq 0$ $c \geq 12$.

Аналогично $c \leq 27$, иначе точек не будет одной из точек.

Тогда $c \in [12; 27]$ и принимает 16 целых значений.

Тогда вариантов $169 \cdot 16 = 2704$

Ответ: 2704

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

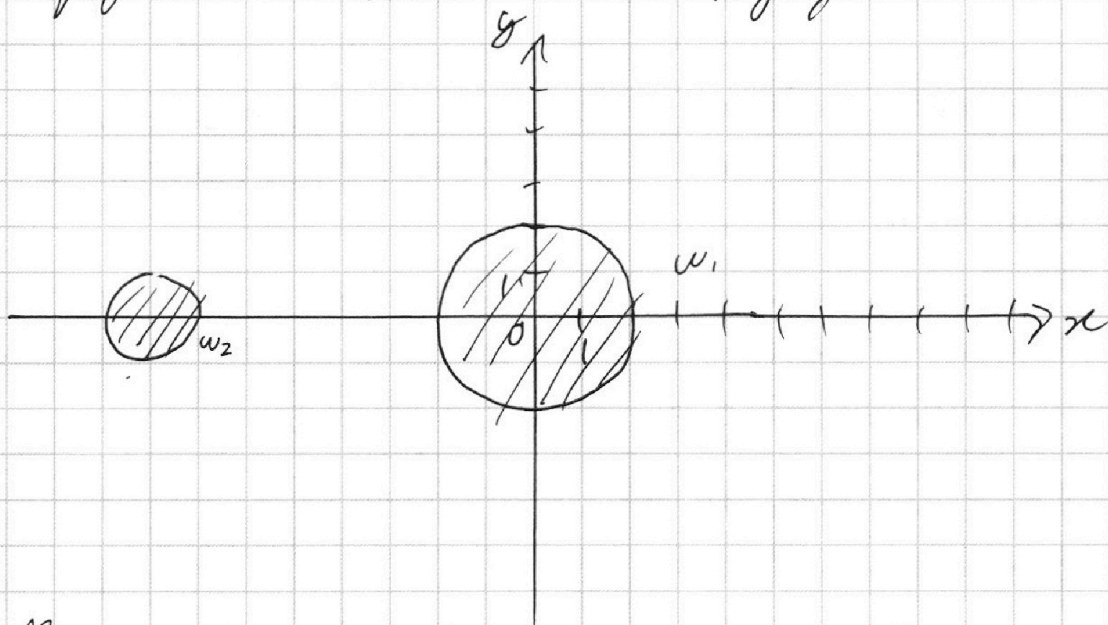
$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \\ ax - y + 10b = 0 \end{cases}$$

← рассмотрим отдельно
каждую скобку и определим
слегка границы фигур, которые
они ограничивают

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ - уравнение окружности ω_1 с ц. $(-8; 0)$ и радиус 1

$x^2 + y^2 = 4$ - уравнение окружности ω_2 с ц. $(0; 0)$ и радиус 2

Нарисуем эти две окружности на координатной плоскости
и определим, какие области нам подходят.



В точке $(0; 0)$ транс-ив < 0 , значит в силу непре-
рывности границы фигур, знак будет изменяться
при переходе через границу.

$y = ax + 10b$ - ур-ие прямой. ~~Важно~~ Если
рассмотреть все положения прямой на этой плоско-
сти, то очевидно, что если прямая пересекает одну
окр-ть, то система будет иметь бесконечно кол-во
решений. Это при каком-то положении одной из окружностей
и прямой. Поскольку каждая окружность и прямая
могут касаться, значит для двух окружностей

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

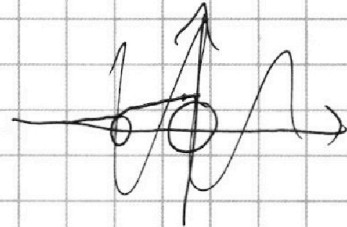
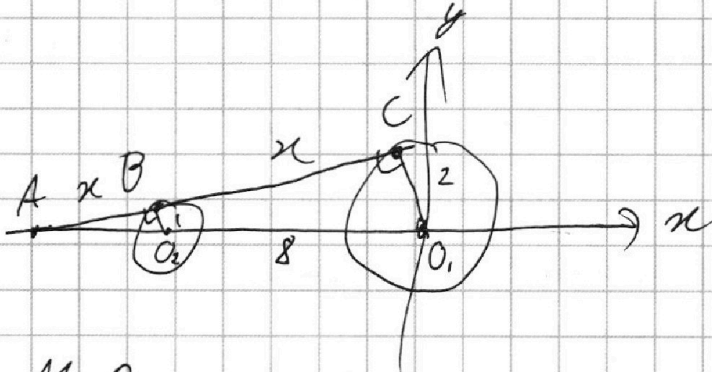


1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прямая для одной касательной дуги окружностей.
 Также возьмем прямую и иллуки
 Сделаем набросок рисунка для внешней одной касательной



Необходимо найти значение α . Введем прямую $y = \alpha x + b$ а это значение угла наклона прямой к Ox .

Обозначим некоторые точки пересечений на рисунке. Пусть $AB = x$. Т.к. ω_2 можно перевести в ω_1 , заметим с z . А и $k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{1} = 2$, то

$AC = 2x$ и $BC = x$ на этом рисунке

По построению $O_1O_2 = 8$

в $\triangle ABO_2$ по т. Пифагора $AO_2 = \sqrt{x^2 + 1}$

Из заметившими катетами получаем отношение:

$$\frac{AO_2}{BO_2} = \frac{AO_1}{CO_1} \quad \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \frac{\sqrt{x^2+1} + 8}{2} \quad \cdot 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1} + 8$$

$$\sqrt{x^2+1} = 8$$

$$x^2 + 1 = 64$$

$$x^2 = 63$$

$$x = \sqrt{63}$$

т.к. x это длина отрезка

$$\tan \angle BAO_2 = \frac{1}{x} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Вторая внешняя дуга кас-ся будет симметрична первой от O_1 или O_2 или O_3 , т.е. O_x .

Значит O_x будет дкас-ой дуги кас-ся

и $\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{21}$. В этом случае

удовлетворяет, если рассмотреть рисунок

Посмотрим теперь случай внутренней кас-ся

Рассуждения аналогичны первому случаю,
только кас-ся заметим $k = -2$.

В этом же $AO_2 = \sqrt{x^2 + 1}$

$$AB = x \quad AC = 2x$$

Из отношения $\frac{AO_2}{BO_2} = \frac{AO_1}{CO_1}$ найдем

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{1} = \frac{8 - \sqrt{x^2 + 1}}{2}$$

$$3\sqrt{x^2 + 1} = 8$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{8}{3}$$

$$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$$

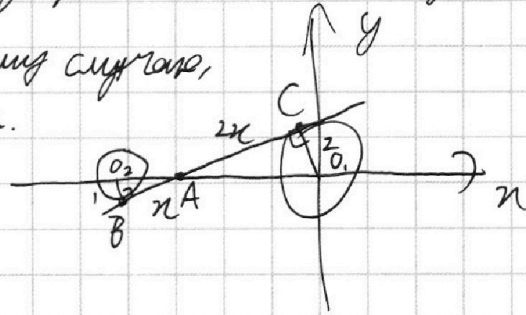
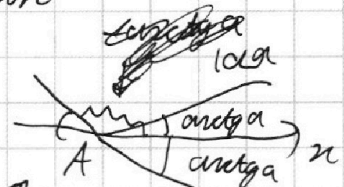
$$x^2 = \frac{55}{9}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{55}}{3} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\text{Тогда } \angle O_2 AB = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

аналогично первому рассуждению $\alpha = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$ подходит.

В итоге $\alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{21}$, $\alpha = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7

Пусть окр. окружность $\Delta ABC - \Omega$

I - incentр, M, N -
основания перпендикуляров на AB и AC .

состав

$\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$
 AI, BI, CI - биссектрисы,
делят углы пополам.

$CI \perp M$ и $BI \perp N$ являются на
сторонах AC и AB прямыми, т.к. биссектрисы
пересекаются в центре окружности

и являются дуг.

$\angle NCA = \angle NBA = \beta$, как опр. по одной дуге Ω
аналогично $\angle ABM = \angle ACM = \gamma$.

Тогда в $\Delta N, NC, \angle N = 90^\circ \sin \beta = \frac{2}{NC}$

в $\Delta M, MB, \angle M = 90^\circ \sin \gamma = \frac{4,5}{MB}$ *

Заметим, что по лемме о трезубце $NA = NI = NC$,
т.е. ΔAIC вписан в окружность с ц. N .

Аналогично $AM = IM = BM$ и ΔAIB вписан в окружность с ц. M .

Тогда в ΔAIC по т. синусов

$$\frac{AI}{\sin \gamma} = 2R_{\text{окр}} = 2 \cdot NC$$

в ΔAMB :

$$\frac{AI}{\sin \beta} = 2R_{\text{окр}} = 2 \cdot MB$$

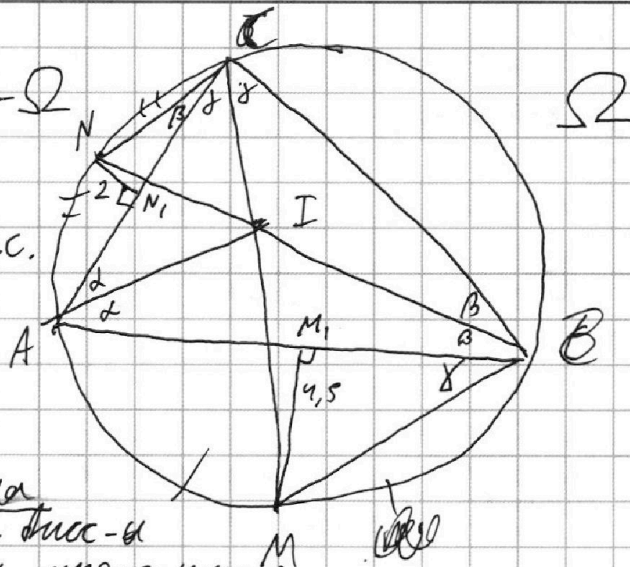
Перемножим: $\frac{AI^2}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = 4 \cdot MB \cdot NC$

подставим равенства (*):

$$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC} \cdot \frac{4,5}{MB}} = 4 \cdot MB \cdot NC$$

$$\frac{AI^2 \cdot MB \cdot NC}{9} = 4 \cdot MB \cdot NC \quad AI^2 = 36$$

$AI = \oplus 6$ т.к. это длина отрезка Ответ: $AI = 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4(2x^2 - 5x + 3) = 9 - 42x + 49x^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

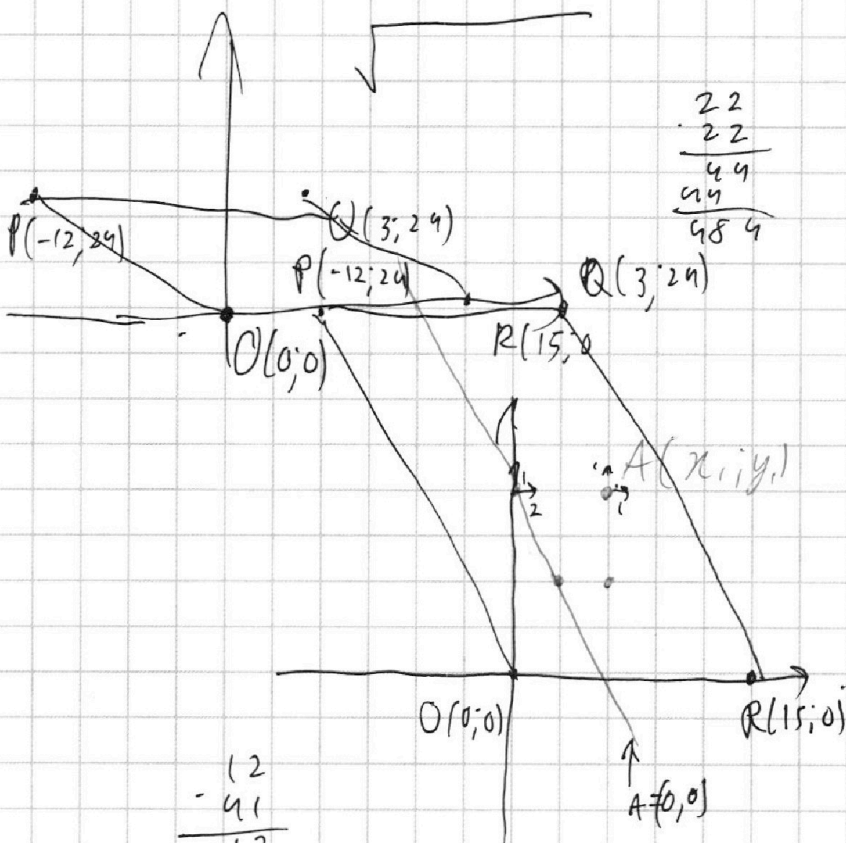
$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 484 + 492 = 976$$

$$\begin{array}{r} 123 \\ - 77 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ - 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 884 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ - 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 992 \\ + 489 \\ \hline 976 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ - 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 884 \end{array}$$

(4.7)

$$y_2 - y_1 = 12 - 2x_2 + 2x_1$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ - 7 \\ \hline \end{array}$$

$$y = 12 - 2x$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 41 \\ \hline 12 \\ 48 \\ \hline 492 \\ + 484 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \quad B(x_2, y_2)$$

$$y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 - 2x_2 \quad \begin{array}{l} x_2 - x_1 = x \\ y_2 - y_1 = y \end{array}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \quad \begin{array}{l} 2x + y = 12 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \\ 976 \\ \hline 244 \\ 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ - 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

2. —

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

a b $a - b$

$$\begin{aligned} (2x-1)(x-2) &= \\ &= 2x^2 - 4x - x + 2 = \\ &= 2x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{(2x-1)(x-2)}$$

$$\begin{aligned} D &= 25 - 8 \cdot 3 = 1 \\ x &= \frac{5 \pm 1}{4} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 1,5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \quad \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$2(x-1)(x-1,5)$$

$$(x-1)(2x-3)$$

$$\sqrt{2x^2}$$

$$\begin{aligned} (2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) &= \\ &= 2 - 7x \end{aligned}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7x + 1} = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x = a$$

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

$$\sqrt{a+2} - \sqrt{a+7x} = 2-7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$c, d \geq 0$$

$$\begin{aligned} -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} &= \\ 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} &= 3 - 7x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c - d &= c^2 - d^2 \\ c - d &= (c - d)(c + d) \end{aligned}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} \text{I) } c &= d \\ \sqrt{a} &= \sqrt{b} \\ a &= b \\ a &\geq 0 \\ b &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{II) } c \neq d$$

$$\begin{aligned} 1 &= c + d \\ 1 &= \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{aligned} \quad 1 - 2\sqrt{a} + a = b$$

$$1 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &= 2x^2 + 2x + 1 \\ 2 &= 7x \\ x &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(-2\sqrt{2x^2 - 5x + 3})' + 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 4ab} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{a-b}{b} - 4} \quad (a, b) = 1$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ a^2 - 6ab + b^2 &: m \\ (a+b)^2 - 8ab &: m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ 8ab &: m \\ m &\leq 8 \end{aligned}$$

$$m=8$$

если есть $p \mid m$ \Rightarrow $\begin{cases} a \mid p \\ b \mid p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid p \\ b \mid p \end{cases}$

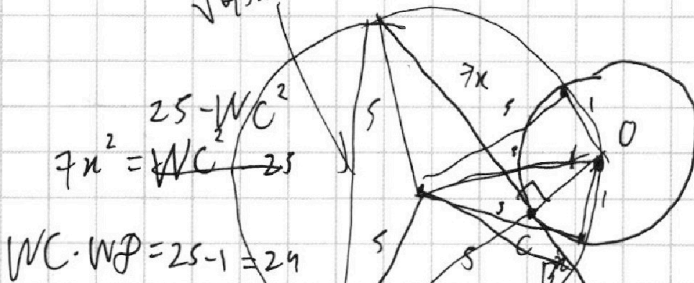
$$\frac{1+7}{1-6 \cdot 7+49} = \frac{8}{50-42} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\begin{aligned} MC^2 &= NO^2 - 1 \\ NC^2 + 1 &= NO^2 \end{aligned}$$

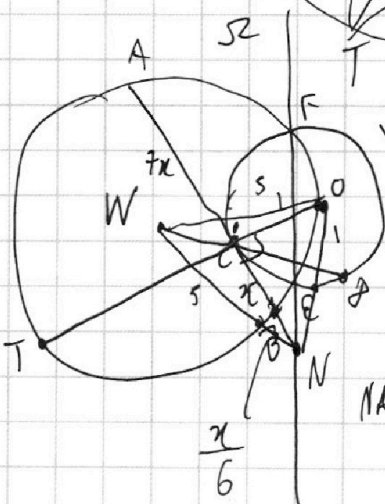
$$a+b \neq \sqrt{49x^2 + 49x^2}$$

$$\begin{aligned} AC \cdot CB &= CO \cdot CT \\ 7x^2 &= CT \end{aligned}$$

$$CT \cdot (CT+2)$$



$$\begin{aligned} \frac{7x}{4x^2} &= \frac{1}{4x} \\ NB &= \frac{x}{6} \\ 6x \cdot NB &= x^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} NA \cdot NB &= NE \cdot NF = MC^2 \\ NA \cdot NB &= NC^2 \end{aligned}$$

$$NB \cdot (NB + 8x) = (NB + x)^2$$

$$\sqrt{1 + 49x^2}$$

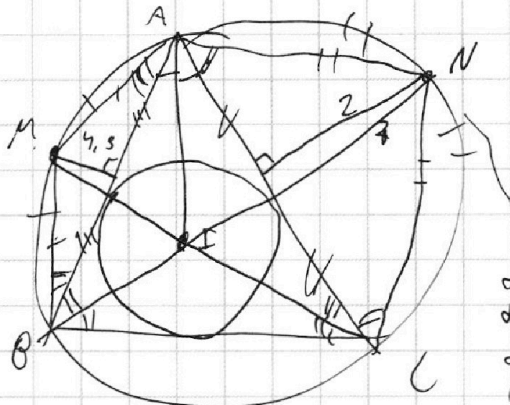
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решено.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 26 \\ \alpha + \beta = 14 \\ \alpha + \gamma = 20 \\ \beta + \gamma = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = 6 \\ \gamma = 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= 64 \\ &= 20 + 44 \\ &= 27 + 37 \\ &\text{И } 10 + 17 + 37 = \\ &19 + 17 + 20 = \\ &= 34 + 17 = 41 + 10 = \\ &= 51 \end{aligned}$$

$$\frac{AI}{\sin \angle TCA} = 2R = \frac{4,5}{\sin \angle MBA}$$

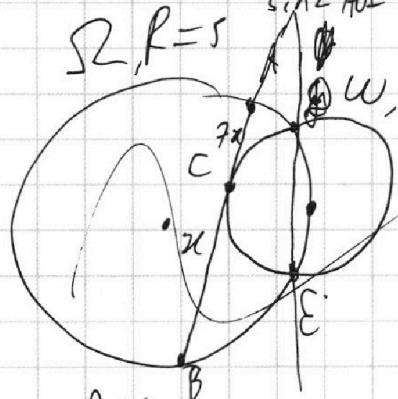
$$AI^2 = 4,5 \cdot 2$$

$$\frac{AI}{\sin \angle AOB} = 2R = \frac{2}{\sin \angle ACN}$$

$$AI^2 = 9$$

$$AI = 3$$

$\Omega, R=5$



$\Omega, R=5$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 32 \\ \alpha + \beta = 14 \\ \gamma = 18 \\ \alpha = 19 \\ \alpha + \beta = 10 \\ \beta + \gamma = 17 \\ \alpha + \gamma = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 14 \\ \alpha + \gamma = 17 \\ \beta + \gamma = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 8 \\ \gamma = 12 \end{cases}$$

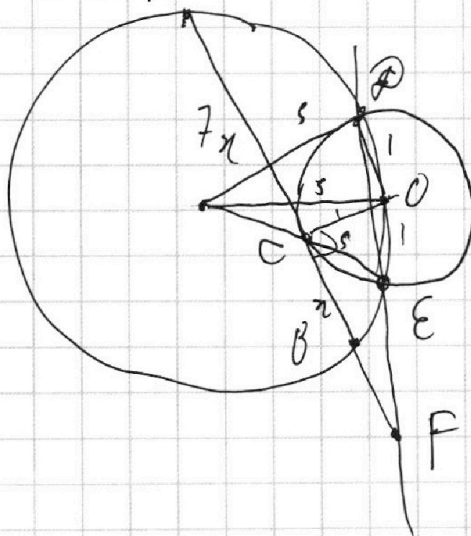
$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &: 2^{51} \cdot 7^{64} \\ a^2 b^2 c^2 &: 2^{52} \cdot 7^{64} \end{aligned}$$

$$abc : 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$(abc)^2 : 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$\Omega, R=5$



$\Omega, R=5$

$$FE \cdot FP = FB \cdot FA = FC^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ax - y + 10b = 0$ — прямая
 $y = ax + 10b$ — ~~всегда~~ решение
 $x^2 + y^2 = r^2$

$$a = \pm \arctg\left(\frac{3}{2\sqrt{14}}\right)$$

$$x = \frac{2\sqrt{14}}{3}$$

$$x^2 = \frac{56}{9}$$

$$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{8}{3}$$

$$8 - \sqrt{x^2 + 1} = 2\sqrt{x^2 + 1} - \frac{16}{9}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{54}{9} = \frac{144}{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2}{8 - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\begin{array}{r} 2709 \mid 16 \\ 16 \\ \hline 110 \\ -96 \\ \hline 149 \end{array}$$

$$x^2 = \sqrt{x^2 + 1} = 1$$

$$a = \arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$$

$$a = \arctg\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ 16 \\ \hline 54 \\ 36 \\ 6 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{x^2 + 1} \cdot 169 \\ 169 \\ \hline 16 \\ 160 \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + 5}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} \neq 5 = 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$5 = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$25 = x^2 + 1$$

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ -16 \\ \hline 54 \\ 36 \\ 6 \\ \hline 169 \end{array}$$

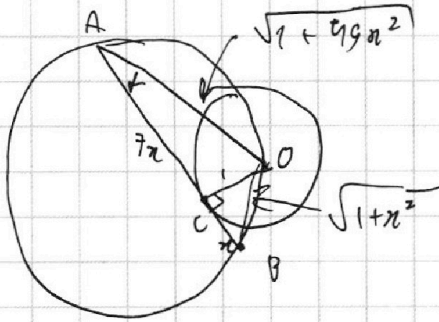
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 19404 \\ + 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = 10$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2} = 10$$

$$(1+x^2) \cdot (1+49x^2) = 100$$

$$(1+a) \cdot (1+49a) = 100$$

$$49a^2 + 50a - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 9904 = 21904$$

$$a = \frac{-50 \pm \sqrt{21904}}{98} = \frac{74 - 50}{98} =$$

$$= \frac{24}{98} = \frac{12}{49}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$AB = \frac{16\sqrt{3}}{7}$$

$$\frac{74}{79}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 81 \\ 36 \\ \hline 4851 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19404 \\ 4851 \\ \hline 539 \\ 77 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1184 \\ 10 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21904 \\ 5476 \\ \hline 1369 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ 79 \\ \hline 16 \\ 28 \\ 28 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 148 \\ 8 \\ \hline 64 \\ 32 \\ 8 \\ \hline 1184 \\ 552 \\ \hline 148 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ + 99 \\ \hline 81 \\ 81 \\ 36 \\ \hline 4851 \end{array}$$

$$1369$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ - 27 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ - 37 \\ \hline 99 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 21 \\ 9 \\ \hline 1369 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4851 \\ 9 \\ \hline 204 \\ 32 \\ \hline 16 \\ \hline 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ - 37 \\ \hline 28 \\ 128 \\ \hline 148 \\ 148 \\ \hline 64 \\ 32 \\ 8 \\ \hline 32 \\ 16 \\ 4 \\ \hline 148 \\ 804 \end{array}$$

$$21904 | 4$$

$$\begin{array}{r} 148 \\ 8 \\ \hline 64 \\ 32 \\ 8 \\ \hline 1184 \\ 552 \\ \hline 148 \\ \hline 21904 \end{array}$$

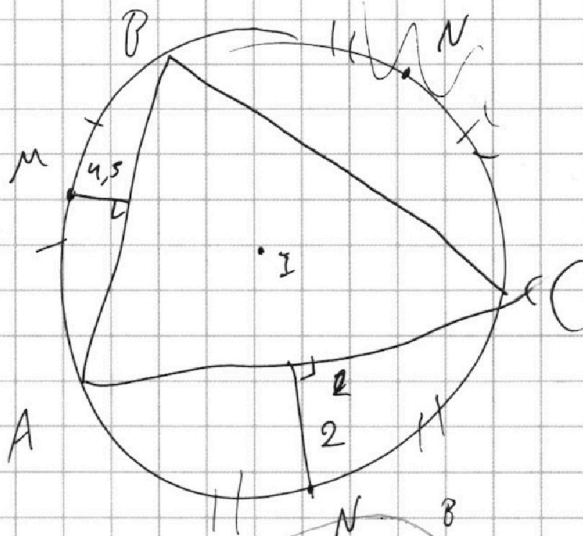
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

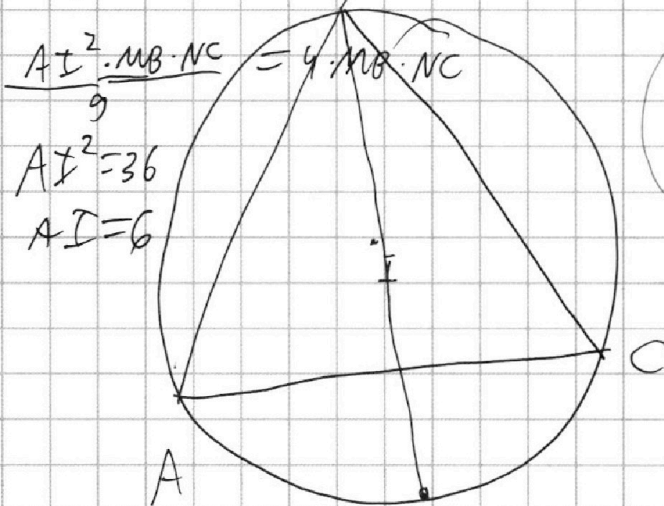
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \beta = \frac{2}{NC}$$

$$\sin \gamma = \frac{4,5}{MB}$$

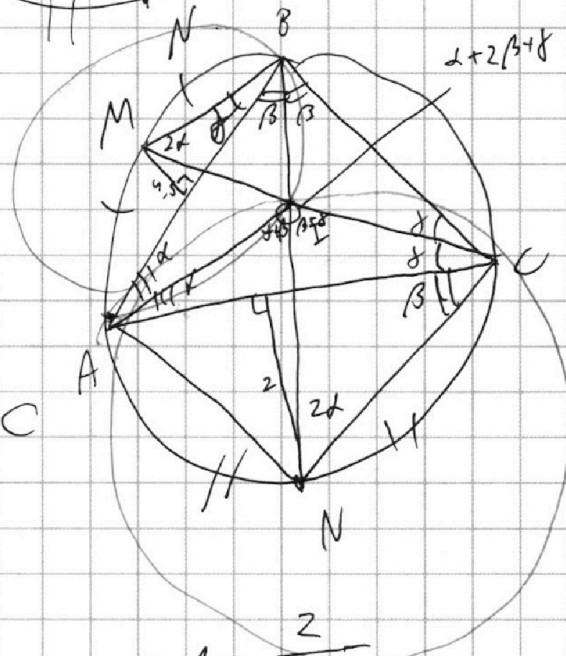
$$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC} \cdot \frac{4,5}{MB}} = 4 \cdot MB \cdot NC$$



$$\frac{AI^2 \cdot MB \cdot NC}{9} = 4 \cdot MB \cdot NC$$

$$AI^2 = 36$$

$$AI = 6$$



$$\frac{AI^2}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = 4 \cdot MB \cdot NC$$

$$\frac{AI}{\sin \beta} = 2 \cdot NC$$

$$\sin \beta = \frac{2}{NC}$$

$$\frac{AI}{\sin \beta} = 2 \cdot MB$$

$$\frac{NC^2}{2} = \frac{MB^2}{4,5}$$

$$\frac{NC}{\sin \beta} = 2R$$

$$\frac{MB}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{MB}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{NC}{\sin \beta} = 2R$$

$$4,5 \cdot NC^2 = 2 \cdot MB^2$$

$$\sin \gamma = \frac{4,5}{MB}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2 \cdot \frac{121 - 44\sqrt{61} + 4 \cdot 61}{41 \cdot 41} - 5 \cdot \frac{1}{41 \cdot 41}}$$

$$\sqrt{3518 + 322\sqrt{61}} = 5 + 14\sqrt{61} + \sqrt{3313 - 252\sqrt{61}}$$

$$\sqrt{3518 + 322\sqrt{61}} - \sqrt{3313 - 252\sqrt{61}} = 41 \frac{5 + 14\sqrt{61}}{1681}$$

$$x^2 = \frac{121 - 44\sqrt{61} + 244}{1681}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \cdot 41 \\ \hline 41 \\ 164 \\ \hline 1681 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{242 - 88\sqrt{61} + 488 - 55 \cdot 41 + 10 \cdot 41\sqrt{61} + 3 \cdot 1681}{1681}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3518 + 322\sqrt{61}}{1681}}$$

$$\begin{array}{r} 410 \\ - 88 \\ \hline 322 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{242 - 88\sqrt{61} + 488 + 22 \cdot 41 - 4 \cdot 41\sqrt{61} + 1681}{1681}}$$

$$\begin{array}{r} 55 \\ 41 \\ \hline 91 \\ 220 \\ \hline 2255 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1181^3 \\ 243 \\ 18 \\ \hline 3 \\ 5043 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ - 77 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$5 + 14\sqrt{61}$$

$$\sqrt{\frac{3313 - 252\sqrt{61}}{1681}}$$

$$\begin{array}{r} 2583 \\ + 242 \\ \hline 2825 \\ + 488 \\ \hline 3313 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 41 \\ \hline 164 \\ + 88 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5043 \\ - 2255 \\ \hline 2788 \\ + 242 \\ \hline 3030 \\ + 488 \\ \hline 3518 \end{array}$$

$$2 \cdot \frac{77 - 14\sqrt{61}}{41 + 1681}$$

$$\frac{3362 - 77 + 14\sqrt{61}}{1681}$$

$$\begin{array}{r} 1681 \\ + 902 \\ \hline 2583 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \cdot 41 \\ \hline 22 \\ + 88 \\ \hline 902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1651 \\ \cdot 2 \\ \hline 3362 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3362 \\ - 77 \\ \hline 3285 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

