МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Чистовик.

Вариант 9.

№1.

$ab \vdots 2^{14}7^{10}$

$bc \vdots 2^{17}7^{17}$

$ac \vdots 2^{20}7^{37}$

Т.к. $ac \vdots 2^{20}7^{37}$, то $abc \geq 2^{20}7^{37}$. Если $abc = 2^{20}7^{37}$, то $b=1$, тогда $a \geq 2^{14}7^{10}$; $c \geq 2^{17}7^{17}$, но тогда $abc \geq 2^{31}7^{27}$, значит $abc \neq 2^{20}7^{37}$, т.к. степень двойки меньше 31. ~~Т.к. $2^{20}7^{37}$ обладает самыми большими степенями в условии, то ac должно быть равно $2^{20}7^{37}$~~.

Предположим, что b не кратно 7, тогда $a \vdots 7^{10}$; $c \vdots 7^{17}$; $ac \vdots 7^{37}$. Такое может быть, поэтому минимальная возможная степень семёрки у числа abc равна 37, например: $a \vdots 7^{10}$; $c \vdots 7^{27}$. Предположим, что $b = 2^{x}$, тогда $a \vdots 2^{(14-x)}$; $c \vdots 2^{(17-x)}$, тогда $ac \vdots 2^{(31-2x)}$, тогда $abc \vdots 2^{(31-x)}$. Но если $x > 5$, то $31-2x < 20$, и тогда abc будет кратно $2^{(20+x)}$. Минимальная степень двойки при $x > 5$ достигается при $x=6$; $20+x=26$, а при $x \leq 5$ $(x>0)$, при $x=5$; $31-5=26$. Значит минимальное значение $abc \vdots 2^{26}7^{37}$

Ответ: $2^{26}7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Чистовик

№2.

$\frac{a}{b}$ – несократима.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

Пусть $a+b = mn$, тогда $\frac{(a+b)^2-8ab}{m} = mn^2 - \frac{8ab}{m}$. Значит $8ab$ должно нацело делиться на m. $m \leq 8ab$; $m \leq a+b$. Для любых натуральных чисел a и b справедливо неравенство: $a+b < 8ab$. ~~$8ab = 4(a+b)^2 - 4(a^2+b^2)$. Предположим, что $m = a+b$~~

тогда $8ab \vdots a+b$; $\frac{4(a+b)^2 - 4(a^2+b^2)}{a+b} = 4(a+b) - \frac{4(a^2+b^2)}{a+b} =$

$= 4(a+b) - \frac{4a^2}{a+b} - \frac{4b^2}{a+b} = 4(a+b) - \frac{1}{\frac{a+b}{4a^2}} - \frac{1}{\frac{a+b}{4b^2}} = 4(a+b) - \frac{1}{\frac{1}{4a}+\frac{b}{4a^2}}$

И a, и b не могут быть четными, т.к. тогда дробь $\frac{a}{b}$ можно сократить на 2. Если одно из чисел a и b чётное, а другое нечётное, то $a+b$ – неч., значит m не может быть чётным. Если числа a и b нечётные, то $a+b$ – чётн., и $a^2-6ab+b^2$ – чётн. Тогда наибольшее возможное чётное $m = 8$, т.к. $\frac{(a+b)^2-8ab}{m} = mn^2 - \frac{8ab}{m}$, а a и b – неч. числа.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

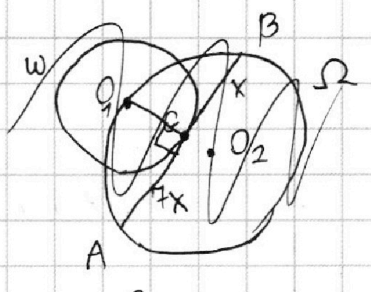
Чистовик

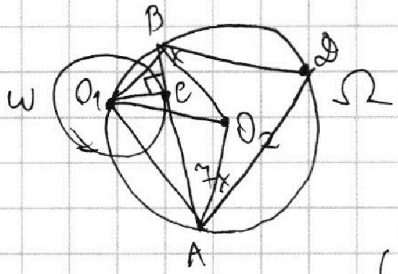
№3.

$56 \cdot 56 = 336 + 280\cdot 10 = 3136$

$49 \cdot 49 = 441 + 196\cdot 10 = 2401$

$54 \cdot 54 = 216 + 270 \cdot 10 = 2916$





Решение.

1) $O_1C \perp AB$ как радиус к касательной.

2) Пусть $BC = x$, тогда $AC = 7x$;

Доп. постр.: $D \in \Omega$; BD; AD

3) O_1ADB – впис. в Ω, значит

$\angle BO_1A + \angle BDA = 180^\circ$ по св-ву впис. четырёхуг.

4) $\triangle O_1CB$: $\angle C = 90^\circ$; $\angle BO_1C = \arccos \frac{O_1C}{O_1B} =$

$= \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\triangle O_1CA$: $\angle C = 90^\circ$; $\angle AO_1C = \arccos \frac{O_1C}{O_1A} =$

$= \arccos \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$

Тогда $\angle BDA = 180^\circ - \arccos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$

5) $\angle BO_2A = 2\angle BDA = 360^\circ - 2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}\right)$

$\cos\angle BO_2A = \cos\left(2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}\right)\right) =$

$= 2\cos^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}\right) - 1 =$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{49x^2+1}} - \frac{7x^2}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{49x^2+1}}\right)^2 - 1 =$

$= 2\left(\frac{1-14x^2+49x^4}{(x^2+1)(49x^2+1)}\right) - 1 =$

$= 2\left(\frac{49x^4-14x^2+1}{49x^4+50x^2+1}\right) - 1 =$

$= 2\left(1 - \frac{64x^2}{(49x^2+1)(x^2+1)}\right) - 1 =$

$= 1 - \frac{64x^2}{(49x^2+1)(x^2+1)}$

6) по т. косинусов для $\triangle AO_2B$:

$64x^2 = 50 - 50\left(1 - \frac{64x^2}{(49x^2+1)(x^2+1)}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (49x^2+1)(x^2+1) = 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49x^4 + 50x^2 - 49 = 0$

$x^2 = t$; $49t^2 + 50t - 49 = 0$

$D_1 = k^2 - ac = 625 + 2401 =$
$= 3026$

$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-25 \pm \sqrt{3026}}{49}$

$8x = \frac{-200 + 8\sqrt{3026}}{49}$

Ответ: $\frac{8\sqrt{3026} - 200}{49}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Чистовик

№4.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180\ \ \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot \sqrt{2x^2+2x+1}=4-28x+49x^2 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 45x^2-25x=-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2025x^4-2250x^3+625x^2=4(4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3) \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2009x^4-2226x^3+633x^2-4x-12=0 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases};$$

$2x^2-5x+3\geq 0$

$D=b^2-4ac=25-24=1$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5\pm 1}{4}$; $x=\{1;1{,}5\}$; $x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty)$.

$2x^2+2x+1\geq 0$

$D_1=k^2-ac=1-2=-1$; $x\in\varnothing$; $x\in R$

~~Значит ни при каком значении x выражение $2x^2+2x+1$ не будет больше~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

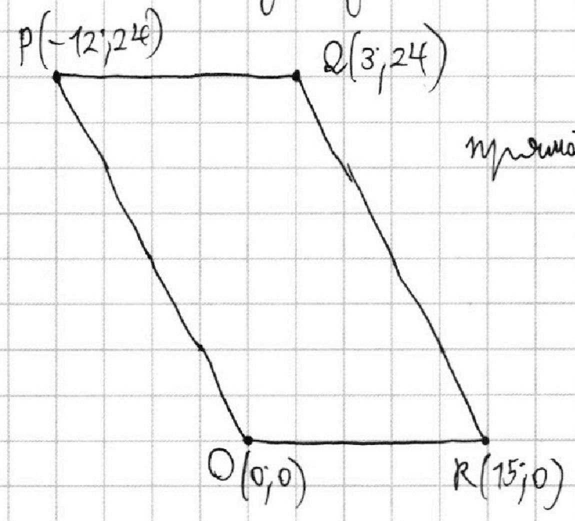
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Чистовик

№5.

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$



Для всех точек, находящихся на ~~прямых, параллельных стороны~~ прямой OP ~~и RQ~~ будет верно: $2x+y=0$.

Для всех точек, находящихся на прямой RQ будет верно: $2x+y=30$.

Если провести прямые, параллельные сторонам OP и RQ, через параллелограмм с шагом 1, то на каждой из этих прямых для любой точки будет верно $2x+y=const$; на каждой следующей прямой $2x+y$ будет на 2 больше чем на предыдущей слева. Всего через параллелограмм проходит 16 таких прямых.

Для первых 6 из них (считая слева) можно выбрать на них любую точку A и для неё найдётся $(24-0)+1=25$ точек B, так, что условие будет выполняться. С 7 по 10 прямую, на них можно выбрать и точку A, и точку B, и для них найдётся 25 соответствующих точек.

С 11 по 16 прямую, на них можно выбрать только т. B.

Значит всего пар:

$6\cdot25\cdot25+4\cdot25\cdot25\cdot2+6\cdot25\cdot25=$
$=625\cdot16=10000$

$$\begin{array}{r} \times\ 625 \\ 16 \\ \hline +\ 3750 \\ 625 \\ \hline 10000 \end{array}$$

Ответ: 10000.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чистовик

№6.

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=ax+10b \\ (x^2+16x+63+y^2)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=ax+10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+16x+63+(ax+10b)^2\ge 0 \\ x^2+(ax+10b)^2-4\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+16x+63+(ax+10b)^2\le 0 \\ x^2+(ax+10b)^2-4\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=ax+10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2(a^2+1)+x(16+20ab)+(63+100b^2)\ge 0 \\ x^2(a^2+1)+x\cdot 20ab+(100b^2-4)\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2(a^2+1)+x(16+20ab)+(63+100b^2)\le 0 \\ x^2(a^2+1)+x\cdot 20ab+(100b^2-4)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$D_1=k^2-ac=(8+10ab)^2-(a^2+1)(63+100b^2)=64+100a^2b^2+160ab-63a^2-$$
$$-100a^2b^2-63-100b^2=1+160ab-63a^2-100b^2$$

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-8-10ab\pm\sqrt{1+160ab-63a^2-100b^2}}{a^2+1}$$

$$D_1=k^2-ac=100a^2b^2-(a^2+1)(100b^2-4)=100a^2b^2-100a^2b^2+4a^2-100b^2+4=$$
$$=4a^2-100b^2+4$$

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-10ab\pm\sqrt{4a^2-100b^2+4}}{a^2+1}$$

$$y=ax+10b$$
$$\left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{-8-10ab-\sqrt{1+160ab-63a^2-100b^2}}{a^2+1} \\ x\ge \dfrac{-8-10ab+\sqrt{1+160ab-63a^2-100b^2}}{a^2+1} \end{array}\right.$$

Чтобы было ровно 2 решения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -8-10ab+\sqrt{1+160ab-63a^2-100b^2}=-10ab+\sqrt{4a^2-100b^2+4} \\ -8-10ab-\sqrt{1+160ab-63a^2-100b^2}=-10ab-\sqrt{4a^2-100b^2+4} \end{cases} \\ \begin{cases} -8-10ab+\sqrt{1+160ab-63a^2-100b^2}=-10ab-\sqrt{4a^2-100b^2+4} \\ -8-10ab-\sqrt{1+160ab-63a^2-100b^2}=-10ab+\sqrt{4a^2-100b^2+4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чистовик

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a, b \in \varnothing \\ a, b \in \varnothing \end{array}\right.$

Ответ: таких a нет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

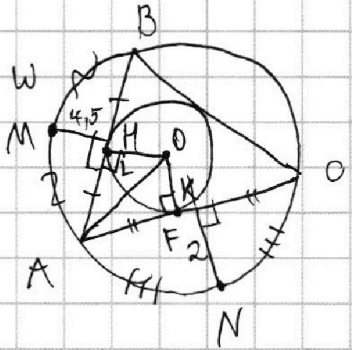
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

№7.



Решение.

1) Пусть $MH \perp AB$, $NK \perp AC$, тогда $AH = HB$; $AK = KC$, т.к. M и N – середины соответствующих дуг.

2) $F \in AC$; $OF \perp AC$; $L \in AB$; $OL \perp AB$

3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ