



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем t могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на t ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned}$$

Если разложим на ab, bc, ac , то так как $a \cdot b$ делится минимум на $2^{15} \cdot 7^{11}$, bc делится минимум на $2^{17} \cdot 7^{18}$, а ac делится минимум на $2^{23} \cdot 7^{39}$, то результатом будет делиться минимум на $2^{55} \cdot 7^{68}$

$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68} \Leftrightarrow (abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$ (a·b·c), но квадрат натурального числа всегда делится на квадрат каждого из множителей в каноническом разложении. \Rightarrow если $(abc)^2 : 2^{55}$, то $(abc)^2 : 2^{56}$

$(abc)^2 : 2^{56} \cdot 7^{68}$, а abc входит в квадрат, значит минимум делится на $2^{28} \cdot 7^{34}$, тогда $abc : 2^{28} \cdot 7^{34}$, это значение и есть минимальное кратное деление abc

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{34}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

распишем дробь

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$$

нашли НОД($9ab, a+b$)

1) $9ab = (a+b)m$

$$9ab = a+b$$

$$\text{тогда } a = \frac{b}{9b-1}$$

и $\frac{a}{b} : \frac{b}{9b-1} = \frac{9b-1}{b}$ - сократимая дробь

2) $9ab = k(a+b)$ тогда $a+b = 9ab$

$$b = \frac{a}{a-1} \text{ и } \frac{a}{b} \text{ - сократима}$$

или

$$a+b = \frac{9a}{8}$$

$$a = \frac{9}{8}b \text{ и } \frac{a}{b} \text{ - сократима}$$

$a+b = 9b$ аналогично.

3) $9abk = (a+b)$ тогда $a = \frac{b}{9bk-1}$ и $\frac{a}{b}$ сократима

4) ~~$9abk = m(a+b)$~~

ответ: $m=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (1 - 9x) \quad | \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \text{Oч3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 \leq (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad \left[-\frac{\sqrt{13}}{3}, +\frac{\sqrt{13}}{3}\right]$$
$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad (-\infty, +\infty)$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x)(1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2 > 0$$

$$f = 3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$\frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1 > 0$$

$$6x^2 - 3x + 2 = -2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$36x^4 - 18x^3 + 12x^2 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 12x^2 - 6x + 4 = 4(9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2)$$

$$36x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 12x + 4 = 36x^4 + 36x^3 + 12x - 36x^2 + 8$$

$$72x^3 - 69x^2 + 12x + 4 = 0$$

т.к. $72x^3 > 69x^2$, то у уравнения больше чем корней, то если оставшиеся корни не удовлетворяют оч3.

$$\text{Решение: } x = \frac{1}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

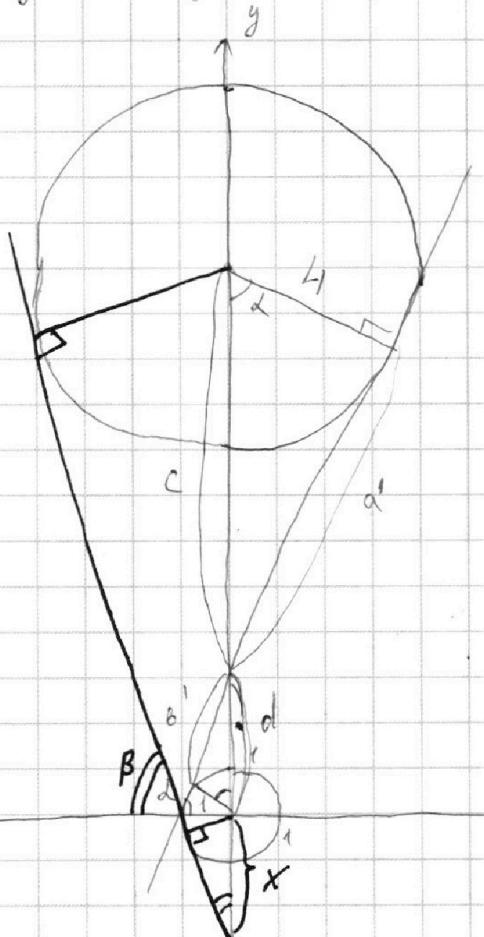


График вида двух уравнений -
внешность окружности в виде
границы. График вида уравнения
гиперболы. Нужно, чтобы эта гипербела
была общим касательной.

$$1) \operatorname{tg} \alpha = (-a) = \frac{a'}{1} = \frac{b'}{1} \Leftrightarrow a = -b$$

и касательная подает $\alpha = 90^\circ$

$$\begin{cases} c + d = 12 \\ c = 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{12}{5} \\ c = \frac{48}{5} \end{cases}$$

$$d = \frac{12}{5} \quad (B) \text{ в уравнении гиперболы}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{1} = \frac{\sqrt{149}}{5}$$

$$\text{В силу симметрии рисунка}$$
$$\text{подходит } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{149}}{5}$$
$$a = \pm \frac{\sqrt{149}}{5}$$

2) из подобия Δ -ов, образованных внешней сектантом $K = \frac{1}{4}$
тогда $\frac{x}{x+12} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{12}{12} \cdot \frac{12}{5}, \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{149}} = \frac{5\sqrt{149}}{149}$

В силу симметрии рисунка в этом подобии тоже можем
быть с другими знаками.

$$\text{Одн: } a = \pm \frac{\sqrt{149}}{5}; \pm \frac{5\sqrt{149}}{149}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Черновик



4-1

$$3 \cdot (4 + 144 - 16) \leq 0$$

14 15

$$eyx = \frac{a}{1} = \frac{a}{4} \quad a = 96$$

$$\begin{aligned} 1+X &= x+y = 11 & 5x = 11 \\ \cancel{x} &= 11 & x = \frac{11}{5} \\ &= 11-x & y = 4x \end{aligned}$$

$$4x = x + 12$$

$x =$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{1} = \sqrt{\frac{144}{25} - 1} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{144}{25} = \frac{119}{25}$$

αx





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

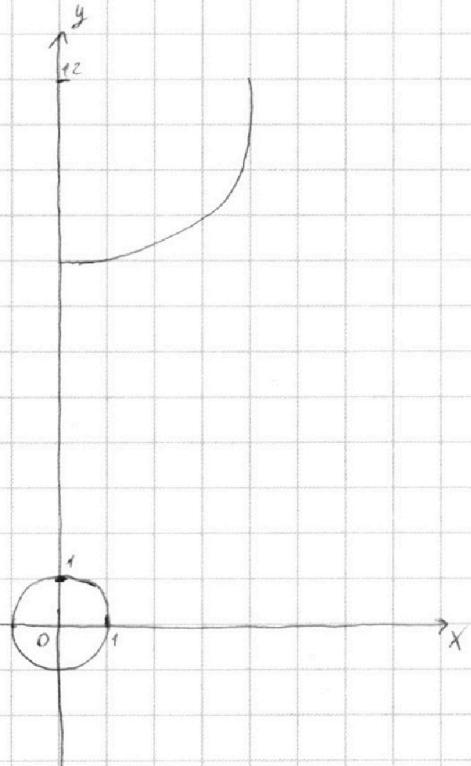
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha x + y - 88 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

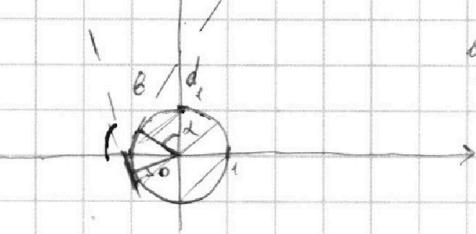
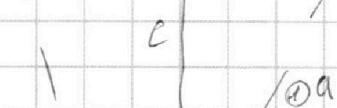
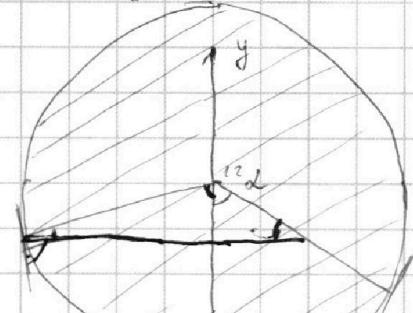


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{1} = \frac{\sqrt{119}}{5}, \quad \frac{12}{5} = a$$

ЧЕРНОВИК

График второго уравнения - вложенныеся окружности, вписаная окружность. График первого уравнения - прямая. Касание касания эта прямая была общей касательной двух окружностей.

$$1) \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{4} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow a = 4b$$

4 - Квадратичным найдем треугольник

$$\begin{cases} c + d = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{12}{5} \\ c = \frac{48}{5} \end{cases} \end{cases}$$

~~$d = \frac{12}{5}$ - это эффективное значение в уравнении~~

$$y = 8b - ax$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{(12)^2 - 1}}{1} =$$

поставим + исключим точку

коэффициент (-a) в уравнении $y = -ax + 8b$

тогда нет прямой, симметричной данной, есть симметрия по биссектрисе между линиями из уравнений. $a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$

$$\frac{3 - 54}{51} = -\frac{51}{51} + 2$$

$$\frac{3}{51} + \frac{3}{9} + 1 = \frac{30}{51} + 1 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a+b : 2^{15} 2^{11}$ $b+c : 2^{17} 7^{18}$ $a+c : 2^{23} 7^{33}$	$a^2 b^2 c^2 : 2^{53} 7^{56}$ $a+b+c = 2^{24} 7^{24} 2^{24} 7^{24} = 2^{72} 7^{24}$ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-2} = 15$	$0^2 b^2 c^2 : 2^{56} 7^{56}$ $a^2 b^2 c^2 : 8^2$ $a^2 b^2 c^2 : 7^2$	$a+b+c = 2^{56} 7^{56}$ $a+b+c = 2^{21} 7^{21}$ $a+b+c = 2^{21} 7^{21}$
$5^3 \cdot 3^3 : 5^2 \cdot 3^2$ $5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 : 5^2 \cdot 3^2$ $5^7 \cdot 3^2$	$2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$	$2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$ $2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$ $2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$	$a+b+c = 2^{21} 7^{21}$ $9ab = (a+b)(a+b) + 7ab$ $9ab = 2^{21} 7^{21}$
$2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$	$2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$ $2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$ $2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$	$c^2 : 2 \cdot 7^{46}$ $a^2 : 2 \cdot 7^{32}$ $c^2 : 2 \cdot 7^{46}$
$2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 : 2 \cdot 3$	$2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$ $2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$ $2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$ $2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$ $2 \cdot 2 : 2 \cdot 2$
$a : a$ $a : a$ $a : a$	$a : a$ $a : a$ $a : a$	$(abc)^2 : 2^{55} 7^{56}$ $(abc)^2 : 2^{56} 7^{56}$ $abc : 2^{28} 7^{29}$	$a+b+c = 2^{55} 7^{56}$ $a+b+c = 2^{28} 7^{29}$ $a+b+c = 2^{28} 7^{29}$
$\frac{a}{b}$ $a^2 - 7ab + b^2 =$ $a^2 - 7ab + b^2 - 5ab$	$\frac{a+b}{b}$ $a+b = 0$ $a+b = 0$	$9ab, a+b$ $a+b = 0$ $a+b = 0$	$a+b+c = 2^{55} 7^{56}$ $a+b+c = 2^{28} 7^{29}$ $a+b+c = 2^{28} 7^{29}$
$\frac{a+b}{b}$ $a^2 + 7ab + b^2 =$ $a^2 + 7ab + b^2 - 9ab$	$\frac{a+b}{b}$ $a+b = 0$ $a+b = 0$	$(a+b)^2 - 9ab$ $a+b = 0$ $a+b = 0$	$a+b+c = 2^{55} 7^{56}$ $a+b+c = 2^{28} 7^{29}$ $a+b+c = 2^{28} 7^{29}$
$\frac{7}{49}$ $\frac{7}{7} = \frac{7+2}{7^2} =$ $= \frac{7+2}{7^2} = \frac{7^2}{7^2} = 1$	$\frac{7}{7} = \frac{7+2}{7^2} =$ $= \frac{7+2}{7^2} = \frac{7^2}{7^2} = 1$	$\lambda = 5x$	$\lambda = 5x$ $\lambda = 5x$ $\lambda = 5x$
$Q = g_1^{x_1} g_2^{x_2} \dots g_n^{x_n}$ $B = p_1^{y_1} \dots p_m^{y_m}$	$(g_1^{x_1} \dots g_n^{x_n} + p_1 \dots p_m) K = g_1^{x_1} \dots g_n^{x_n} p_1 \dots p_m$ $K = \frac{9ab}{a+b}$	$\frac{g_1 \dots g_n}{p_1 \dots p_m} \dots \frac{p_1}{p_m}$	$\frac{g_1 \dots g_n}{p_1 \dots p_m} \dots \frac{p_1}{p_m}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sqrt{49x^2 + 99}^2 + \sqrt{17x^2 + 99}^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

$$- 2\sqrt{17x^2 + 99} \sqrt{49x^2 + 99} \cos \alpha =$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17x^2 + 99} \sqrt{49x^2 + 99}}$$

$$= 2\sqrt{17x^2 + 99} \sqrt{49x^2 + 99} \cos \alpha =$$

$$49x^2 + 99 + 17x^2 + 99 - 2\sqrt{17x^2 + 99} \cdot 2g \cos \alpha = 2 \cdot 13 - 2 \cdot 13 \cos \alpha$$

$$(9x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$$

$$9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2$$

$$9x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 2$$

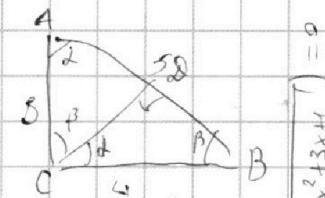
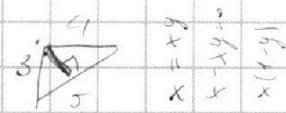
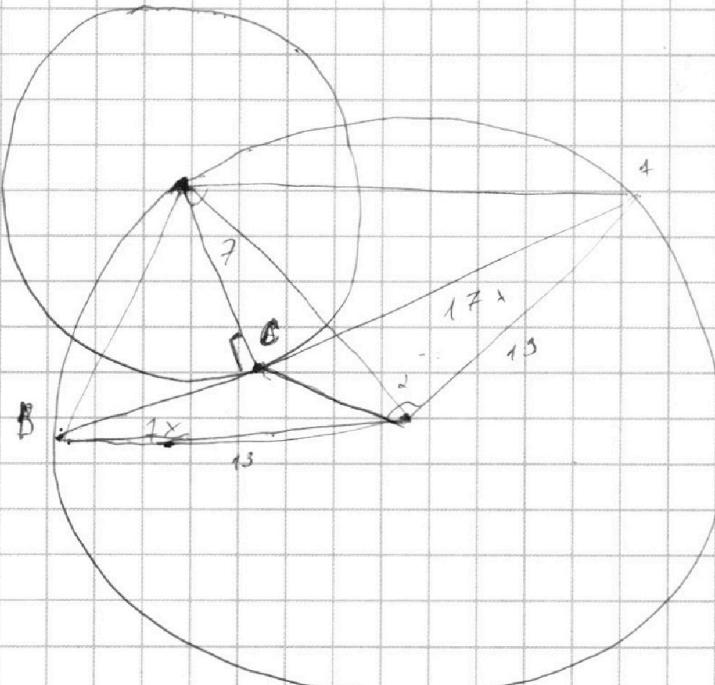
$$9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2 =$$

$$9(x^4 - x^3 - x^2) + 2$$

$$9x^2(x^2 - x - 1) + 2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 +$$



$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$$

$$CD^2 = AD \cdot BD$$

$$2 + 2B = 36$$

$$(1-9x)\sqrt{1+3x^2+3x+1} = 4\sqrt{3x^2+6x+2}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$x^2 - 2x + 1 + 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1-9x)$$

$$(1-9x) = (1-9x)\sqrt{1+3x^2+3x+1}$$

$$(1-9x)\sqrt{1+3x^2+3x+1} = 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 + 2x^2 + x = (x+1)^2 + x(2x+1)$$

$$3x^2$$

$$4x^2 + 2x + 1 - x^2 + x = (2x+1)^2 + x(2x+1)$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\frac{2}{1} = g - 6 = 3$$

$$-3x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

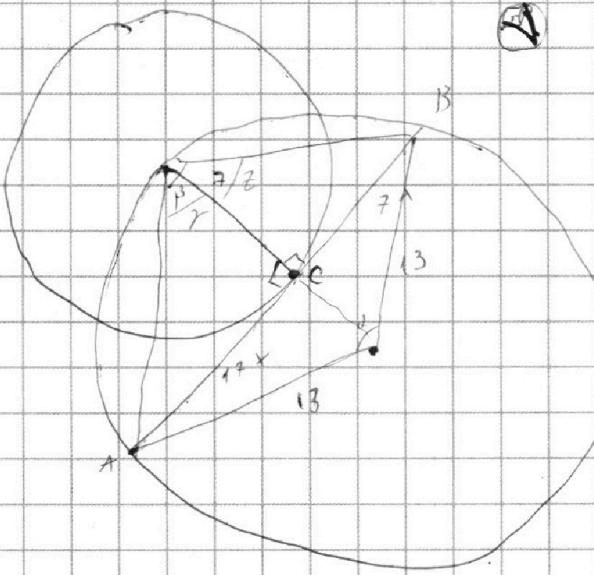
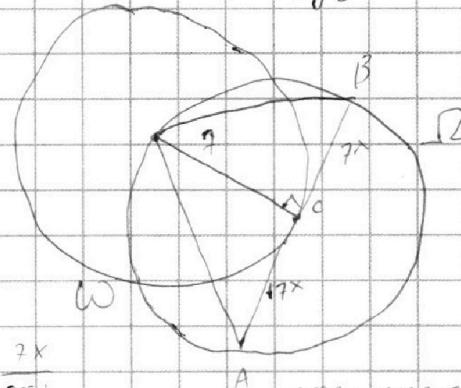
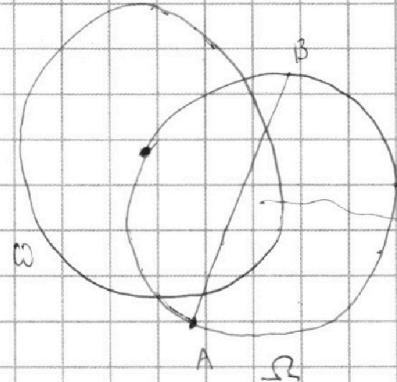
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2}\beta = \cos(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma) = -\cos(\frac{1}{2}\alpha)\cos(\frac{1}{2}\gamma) - \sin(\frac{1}{2}\alpha)\sin(\frac{1}{2}\gamma) = -2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$\cos\alpha \sin\beta \cos(\frac{1}{2}\gamma)$

$$\cos(\alpha) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$2\cos^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = 1 + \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{1 - \frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos(\beta) = \cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma = \cos\alpha \cos\gamma - \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{t^2 + 7x^2}} = \sqrt{1 - \frac{49}{t^2 + 14x^2}} \sqrt{1 - \frac{49}{t^2 + 7x^2}}$$

$$\lg z = \frac{7}{x}$$

$$\frac{7}{\sin\gamma} = \frac{7x}{\cos\alpha}$$

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - \frac{1}{2}\beta = 2\pi - \frac{1}{2}\beta$$

$$2 \cdot 13 - 2 \cdot 13 \cdot \cos\alpha = 576x^2$$

$$\frac{2 \cdot 13^2 - 576x^2}{2 \cdot 13^2} = \cos\alpha$$

$$\cos(2\pi - \beta) = \cos\pi \cos\beta + \sin\pi \sin\beta$$

$$2 \cdot 13 - 2 \cdot 13 \cdot \cos(\frac{1}{2}\beta) = 576x^2$$

$$\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\beta \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

$$\cos(\frac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{2}}$$

$$\sin(\frac{1}{2}\beta) = \sqrt{1 - \frac{1 + \cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

$$\cos(\gamma) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos\alpha \cos\beta - \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{t^2 + 7x^2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t = \sqrt{3x^2 + 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = t - 3x$$

$$t = 3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{\sim}$$

$$t = 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\sim}$$

$$3x - 6x^2 - 2 = 2\sqrt{\sim}$$

$$3x(6x^2 - 3x + 2)^2 = 2(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) - 2(9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^5 - 18x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 6x + 2)$$
$$= 2(9x^4 + 9x^3 - 9x^3 - 9x^2 + 2)$$

$$(6x^2 - 3x + 2)(6x^2 - 3x + 2) = 36x^4 - 18x^3 + 12x^2 - 18x^2 + 9x^2 - 6x^2 + 6x^2 - 6x + 4 =$$
$$= 36x^4 - 18x^3 + 9x^2 - 12x + 4$$

$$18x^4 - 18x^3 - 18x^2 + 8 = 36x^4 - 18x^3 + 9x^2 - 12x + 4$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\frac{d}{dx} = 9 - 6 - 3$$

$$18x^3 - 18x^2 - 18x = 36x^3 - 18x^2 + 9x - 12$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{37}}{3}$$

$$18x^3 + 27x - 12 = 0$$

$$9x^3 + 9x - 9 = 0 \quad 9 \cdot 8 + 9 \cdot 2 - 9$$

$$9x(x^2 + 1) - 9 = 0$$

$$9x^3 + 9x - 9 = 0$$

$$9x(x^2 + 1) - 9 = 0$$

$$\frac{6}{8} + \frac{9}{8} = \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = \frac{3+18}{4} = \frac{21}{4}$$

$$2 = 1 + 1$$

$$2 \cdot 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x = 2^2$$

$$9x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{27}{2}$$

$$d = -9 - 12$$

$$y = -ax + b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2\beta = 2\cos^2(\gamma + \beta) - 1$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma \rightarrow$$

$$\cos(\gamma + \beta) = \frac{\cos(\gamma) \cos(\beta)}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}} - \sin \gamma \sin \beta$$

$$\sin^2 \alpha =$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \gamma + 1}}$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \gamma + 1}}$$

$$2 \cdot \sqrt{\frac{1}{(\tan^2 \gamma + 1)(\tan^2 \beta + 1)}} - \sqrt{\frac{1}{(\tan^2 \gamma + 1)(\tan^2 \beta + 1)}}$$

$$2 \cdot \frac{1}{(\tan^2 \gamma + 1)(\tan^2 \beta + 1)} + \frac{2}{(\tan^2 \gamma + 1)(\tan^2 \beta + 1)} - \frac{4}{(\tan^2 \gamma + 1)(\tan^2 \beta + 1)} - 1$$

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} \quad \frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2 - 9ab} =$$

$$a+b - \frac{9ab}{a+b}$$

$$a^2 - ab + b^2 \quad | \quad a+b$$

$$a^2 - ab : m$$

$$a : m \quad b = m$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b)^2} \quad | \quad a+b$$

$$a+b \quad | \quad 9ab$$

$$\frac{1}{9a} + \frac{1}{9b}$$

$$9 - 7 \cdot 2 \cdot 3 + 4$$

$$9 \cdot 13 - 92$$

$$\frac{pq}{p+q}$$

$$a(9b-1) = b$$

$$\frac{pq}{p+q} = K$$

$$9pq = K(p+q)$$

$$(p+q) = Kpq$$

$$a = \frac{b}{9b-1}$$

$$9ab = m(a+b)$$

$$a = b(a-1)$$

$$a(1-b) = b$$

$$b = \frac{a}{a-1}$$

$$a(9b-1) = b$$

$$a =$$

$$a =$$