



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $ab : 2^{15} \cdot 4^{11}$   
 $bc : 2^{17} \cdot 4^{18}$   
 $ac : 2^{23} \cdot 4^{39}$

$ab \cdot bc \cdot ac = (2^{15} \cdot 4^{11}) \cdot (2^{17} \cdot 4^{18}) \cdot (2^{23} \cdot 4^{39}) = 2^a \cdot 4^b$

$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 4^{68} = 2^a \cdot 4^b$

но тк  $(abc)^2 \rightarrow$  не может быть ~~двумя~~ <sup>мощью</sup> бо это ~~некорректно~~ не в четной степени  $\Rightarrow$  к тому же ~~длина~~ <sup>на 2</sup> ~~длина~~ <sup>будет</sup>

$abc$

$ab \cdot ac \cdot bc = 2^{55} \cdot 4^{68}$

$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 4^{68}$

но тк ~~abc~~ в левой части есть квадрат и он не может быть представлен в виде ~~двух~~ <sup>трех</sup> ~~мощностей~~ <sup>мощности</sup> в четной степени  $\Rightarrow (abc)^2 = 2^{58}$

$abc = 2^{\frac{58}{2}} \cdot 4^{\frac{68}{2}}$

$abc = 2^{28} \cdot 4^{34}$

Искомое число  $abc = 2^{28} \cdot 4^{34}$

Ответ:  $2^{28} \cdot 4^{34}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$12 \quad \frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ba}$$

Если  $m > 1$  значит у  $a+b$  и  $(a+b)^2-9ab$  есть общий делитель (о.д.)

$a+b$  и  $(a+b)^2$  имеют общий делитель  $a+b$

$\Rightarrow (a+b)$  и  $9ab$  имеют тоже общий делитель  $a+b$  и  $ab$  не имеют общего делителя (н.д.)

$$a+b \in \mathbb{N} \text{ тогда } (a+b)k = ab \cdot t \quad k, t \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{b}k = t \Rightarrow t \notin \mathbb{N}$$

$\Rightarrow a+b \stackrel{1}{\neq} 9$  (н.д. наш, ну или наибольший общий делитель)  
(потому что  $m \geq 3, 4$  и  $5$ .)

Пример. Пусть  $a=4, b=5$ :

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{4+5}{(4+5)^2-9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81-180} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

Отв.: 9

$a=9$

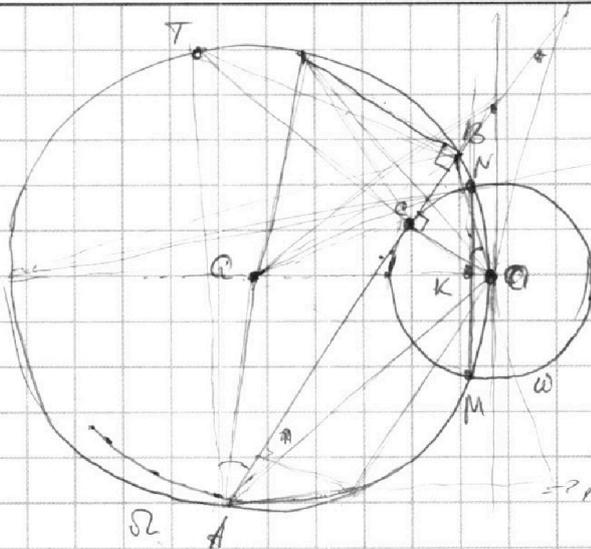
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Omega$ -ц.  $\Omega'$   $O$ -центр.  $\omega$

$OC \perp AD$  т.к.  $AD$  кас. к  $\omega$   
 проведем  $OC$  до пересече-  
 ния с  $\Omega$  в  $(1) T$   
 $AC \cdot BC = OC \cdot CT$   
 (т.к.  $\omega$  - окружность хорд)  
 равно

Пусть  $AC = 12x$ ,  $CB = 7x$   
 $\rightarrow 12x \cdot 7x = 20x \cdot CT = TC \cdot CO$

Пусть  $M$  и  $N$  - точки пересечения  $\omega$  и  $\Omega$   
 тогда  $OO' \perp MN$  (т.к. лин. центров)  
 $OO' \cap MN = K$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N4 \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$1 - 18x + 81x^2 + 9x - 1 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x + 1 \quad (2)$$

$$(2) \quad 81x^2 - 9x + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(1 - 9x)(2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - x) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - 9x \\ 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = x \end{cases}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = x$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x^2 = 12x^2 + 12x + 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 11x^2 + 12x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$11x^2 + 12x + 4 = 0 \quad \Delta = 36 - 44 < 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 \geq (9x - 1)^2 \\ 9x - 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \\ 9x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$9x - 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \Delta = 9 - 12 < 0$$

$$9x - 1 < 0$$

$$81x^2 - 21x \leq 0$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{9} \\ x < \frac{7}{26} \end{cases}$$

$$x < \frac{7}{26}$$

$$x < \frac{7}{26}$$

$$\begin{cases} x(26x - 7) \leq 0 \\ x \geq \frac{1}{9} \\ x < \frac{7}{26} \end{cases}$$

$$x \geq \frac{1}{9}$$

$$x < \frac{7}{26}$$

$$x \in \left[ \frac{1}{9}, \frac{7}{26} \right]$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[ \frac{1}{9}, \frac{7}{26} \right] \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\text{Отв: } \frac{1}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

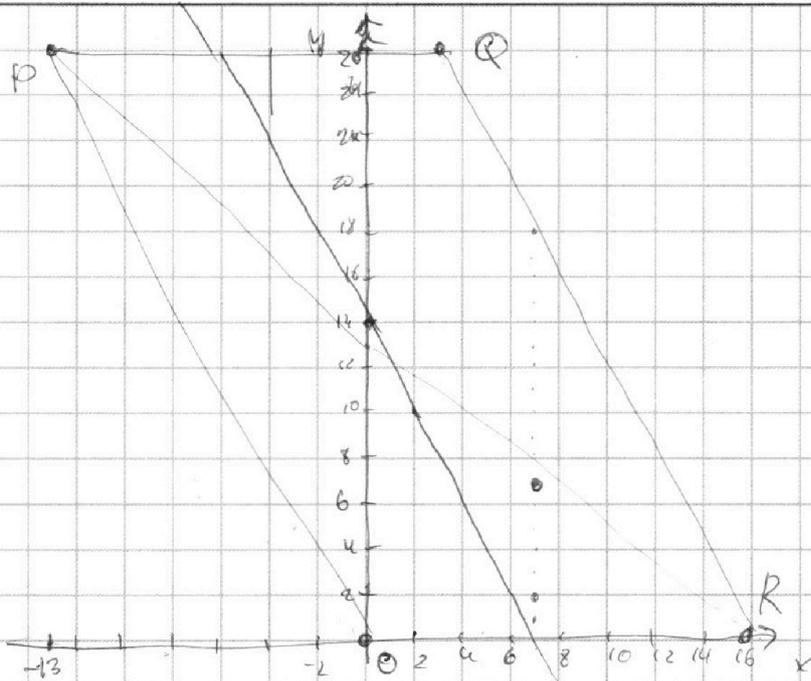
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6.



$$y_2 - y_1 = -2x_2 + x_1 + 14$$

$$y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1) + 14$$

$$\Delta y = -2\Delta x + 14$$

$$\Rightarrow y_2 - y_1 : 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

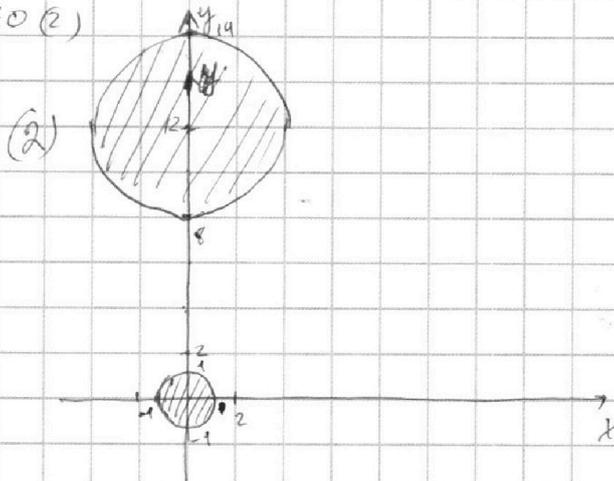
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В.  $\begin{cases} ax + y + 8b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 & (2) \end{cases}$

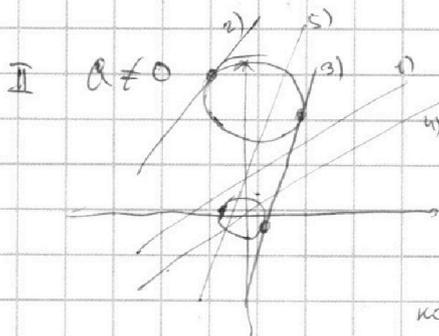
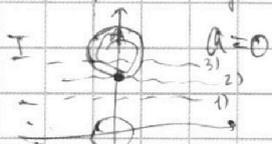


(2)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ (y - 12)^2 + x^2 \geq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$

(1)  $ax + y - 8b = 0$

$y = -ax + 8b$  - прямая

Рассмотрим случаи:

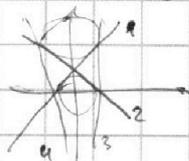


пример:  
количество решений: 0 - шк)  
возможна 1 - 2)  
2 - 3)

возможна  
количество решений:  
пример  
0 - 1)  
1 - 2)  
2 - 3)  
2 - 4) или 5)

Подходит все прямые, которые являются касательными к 2-ым окр.

Таких прямых - 4 шт.



1 и 3 | симметричны  
2 и 4 | отн. ОУ

Выразим  $y$  из  $ax + y - 8b = 0$ :  $y = -ax + 8b$  и подст. в уравне окр.:

$\begin{cases} x^2 + (8b - ax)^2 = 1 \\ x^2 + (ax + 8b - 12)^2 = 16 \end{cases}$  каждое из уравнений описывает окружность, значит ровно 1 прямая (ка. точка касания), это значит, что  $D = 0$

$\begin{cases} (a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0 \\ (a^2 + 1)x^2 + 2(8b - 12)x + (8b - 12)^2 - 16 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} D_{1,2} = 64a^2b^2 - (64b^2 - 1)(a^2 + 1) = 0 \\ D_{3,4} = (8b - 12)^2 - ((8b - 12)^2 - 16)(a^2 + 1) = 0 \end{cases}$

(продолжить дальше)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение № 6)

$$\begin{cases} 64a^2b^2 - (64b^2 - 1)(a^2 + 1) = 0 \\ a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (8b - 12)^2 - ((8b - 12)^2 - 16)(a^2 + 1) = 0 \\ a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a^2 - (8b - 12)^2 + 16 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 - (2b - 3)^2 + 4 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 - (2b - 3)^2 + 4 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ 10b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ 10b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ 10b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \\ a = \pm \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \\ a = \pm \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ответ:  $a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ;  $-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$





