



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $ab : 2^{15} \cdot 4^{11}$
 $bc : 2^{17} \cdot 4^{18}$
 $ac : 2^{23} \cdot 4^{39}$

$ab \cdot bc \cdot ac = (2^{15} \cdot 4^{11}) \cdot (2^{17} \cdot 4^{18}) \cdot (2^{23} \cdot 4^{39}) = K^a$

$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 4^{68} = K^a$

но тк $(abc)^2 \Rightarrow$ не может быть K^a бо это нечетное число в четной степени $\Rightarrow K$ тоже должно быть на 2 делится

abc

$ab \cdot ac \cdot bc = 2^{55} \cdot 4^{68}$

$(abc)^2 : 2^{55} \cdot 4^{68}$

но тк abc в левой части есть квадрат и он не может быть представлен в виде четного множителя в четной степени $\Rightarrow (abc)^2 : 2^{55}$

$abc : 2^{\frac{55}{2}} \cdot 4^{\frac{68}{2}}$

$abc : 2^{28} \cdot 4^{34}$

Искомое число $abc = 2^{28} \cdot 4^{34}$

Ответ: $2^{28} \cdot 4^{34}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$12 \quad \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Если $m > 1$ значит у $a+b$ и $(a+b)^2-9ab$ есть общий делитель (о.д.)

$a+b$ и $(a+b)^2$ имеют общий делитель $a+b$

$\Rightarrow (a+b)$ и $9ab$ имеют тоже общий делитель $a+b$ и ab не имеют общего делителя (н.д.)

$$a+b \in \mathbb{N} \text{ тогда } (a+b)k = ab \cdot t \quad k, t \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{b}k = t \Rightarrow t \notin \mathbb{N}$$

$\Rightarrow a+b \stackrel{1}{\neq} 9$ (н.д. наш, ну или наибольший общий делитель)
(потому что $m \geq 3, 4$ и 5 .)

Пример, пусть $a=4, b=5$:

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{4+5}{(4+5)^2-9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81-180} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

Отв.: 9

$a=9$

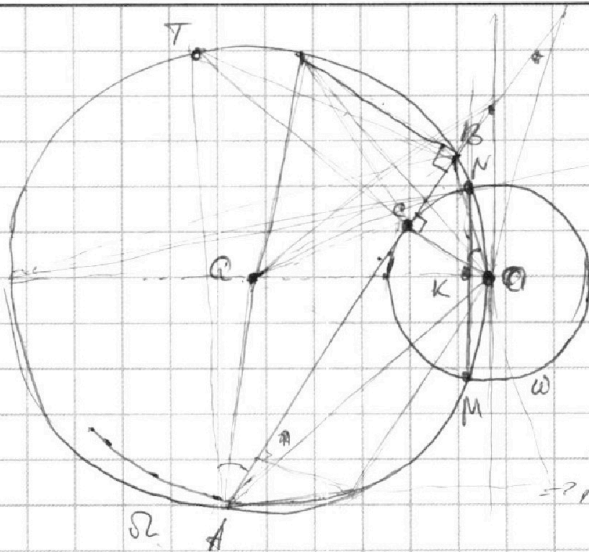
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Ω -ц. Ω' O -центр. ω

$OC \perp AD$ т.к. AD кас. к ω
 проведем OC до пересече-
 ния с Ω в $(1) T$
 $AC \cdot BC = OC \cdot CT$
 (т.к. ω - окружность хорды)
 равно

Пусть $AC = 12x$, $CB = 7x$
 $\rightarrow 12x \cdot 7x = 24x^2 = TC \cdot CO$

Пусть M и N - точки пересечения ω и Ω
 тогда $OO' \perp MN$ (ра. лин. центров)
 $OO' \cap MN = K$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N4 \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$1 - 18x + 81x^2 + 9x - 1 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x + 1 \quad (2)$$

$$(2) \quad 81x^2 - 9x + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(1 - 9x)(2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - x) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - 9x \\ 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = x \end{cases}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = x$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x^2 = 12x^2 + 12x + 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 11x^2 + 12x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$11x^2 + 12x + 4 = 0 \quad \Delta = 36 - 44 < 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 \geq (9x - 1)^2 \\ 9x - 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \\ 9x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$9x - 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \Delta = 9 - 12 < 0$$

$$9x - 1 < 0$$

$$81x^2 - 21x \leq 0$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{9} \\ x < \frac{7}{26} \end{cases}$$

$$x < \frac{7}{26}$$

$$x < \frac{7}{26}$$

$$\begin{cases} x(26x - 7) \leq 0 \\ x \geq \frac{1}{9} \\ x < \frac{7}{26} \end{cases}$$

$$x \geq \frac{1}{9}$$

$$x < \frac{7}{26}$$

$$x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{7}{26} \right]$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{7}{26} \right] \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\text{Отв: } \frac{1}{9}$$

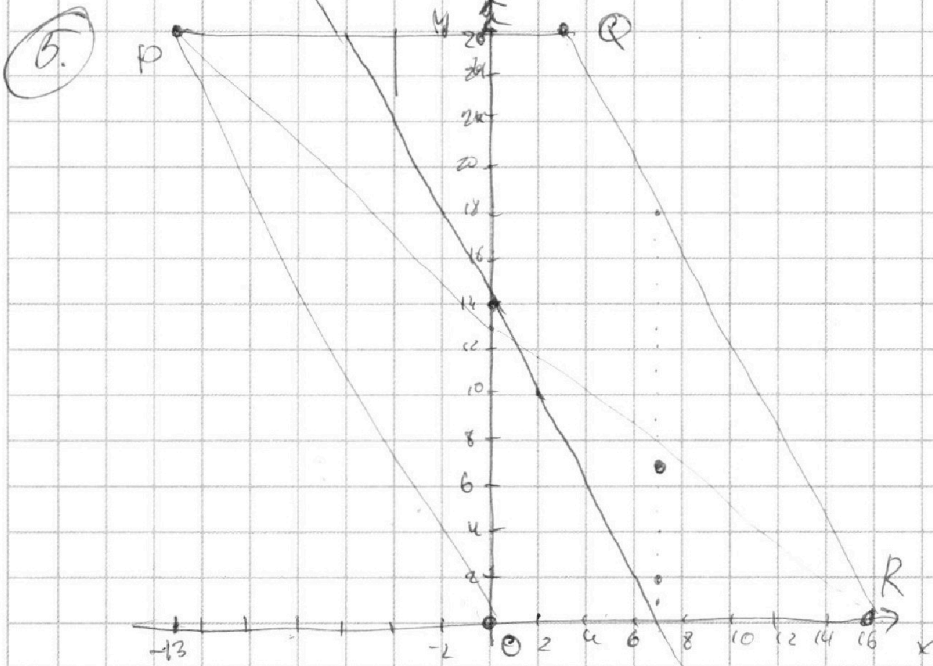
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_2 - y_1 = -2x_2 + x_1 + 14$$

$$y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1) + 14$$

$$\Delta y = -2\Delta x + 14$$

$$\Rightarrow y_2 - y_1 : 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

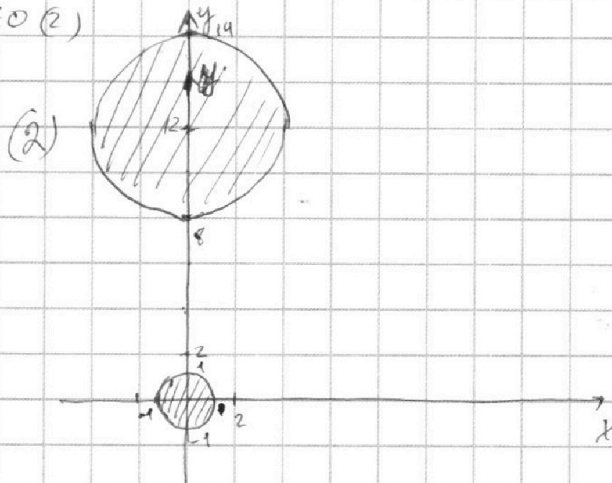
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В. $\begin{cases} ax + y + 8b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 & (2) \end{cases}$

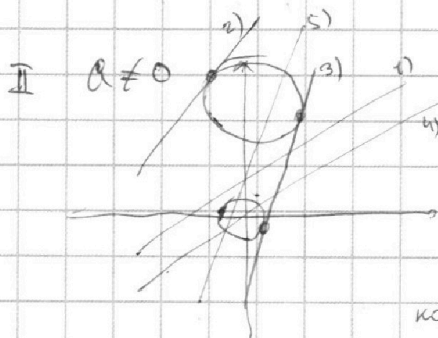
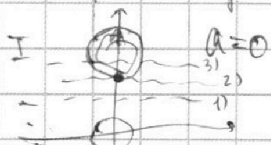


(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ (y - 12)^2 + x^2 \geq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$

(1) $ax + y - 8b = 0$

$y = -ax + 8b$ - прямая

Рассмотрим случаи:

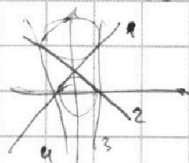


пример:
количество решений: 0 - ш)
возможна 1 - 2)
2 - 3)

возможна количество решений - пример
0 - 1)
1 - 2)
2 - 3)
2 - 4) или 5)

Подходит все прямые, которые являются касательными к 2-ой окр.

Таких прямых - 4 шт.



1 и 3 | симметричны
2 и 4 | отк. ОУ

Выразим y из $ax + y - 8b = 0$: $y = -ax + 8b$ и подст. в уравне окр.:

$\begin{cases} x^2 + (8b - ax)^2 = 1 \\ x^2 + (ax + 8b - 12)^2 = 16 \end{cases}$ каждое из уравнений описывает окружность, значит ровно 1 прямая (ка. точка касания), это значит, что $D = 0$

$\begin{cases} (a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0 \\ (a^2 + 1)x^2 + 2(8b - 12)x + (8b - 12)^2 - 16 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} D_{1,2} = 64a^2b^2 - (64b^2 - 1)(a^2 + 1) = 0 \\ D_{3,4} = (8b - 12)^2 - ((8b - 12)^2 - 16)(a^2 + 1) = 0 \end{cases}$

(продолжить дальше)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение № 6)

$$\begin{cases} 64a^2b^2 - (64b^2 - 1)(a^2 + 1) = 0 \\ a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (8b - 12)^2 - ((8b - 12)^2 - 16)(a^2 + 1) = 0 \\ a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a^2 - (8b - 12)^2 + 16 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 - (2b - 3)^2 + 4 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 - (2b - 3)^2 + 4 = 0 \\ 64b^2 - 1 - 4b^2 + 12b - 9 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ 10b^2 - 12b + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \\ a = \pm \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \\ a = \pm \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ответ: $a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; $-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

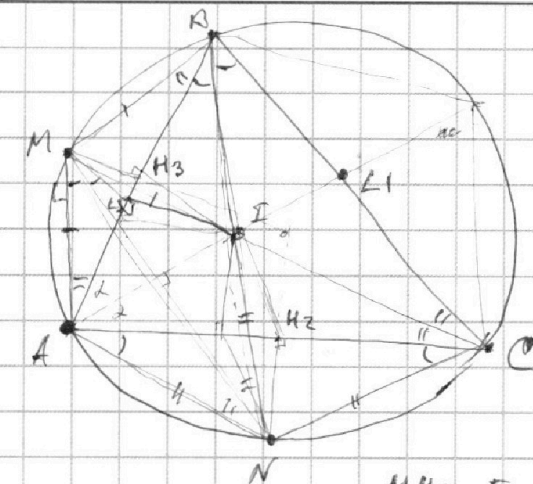
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AI - ?
↑
центр. Впис. окр.

$\checkmark \checkmark \checkmark \Rightarrow AN = NC$
 тк. $AN = NC \Rightarrow BN$ - бис. $\angle ABC$
 ($AM = MB$) CM - бис. $\angle ACD$ (аналог.)
 $\Rightarrow BN \cap CM = I$

по тем же о треугольнике:
 $AN = CN = IN$
 $BM = AM = MI$

$MH_3 = S$, $NH_2 = 2S$ - меди бис. - р/б Δ -ов AMB и CNC
 (высоты AB и AC)

IL_2 - радиус впис. окр. к AC
 IL_3 - радиус впис. окр. к AB
 $IL_2 \parallel NH_2$, $IL_3 \parallel MH_3$

Пусть $\angle ABN = \angle ACN = \beta$
 $\angle MAN = \angle MCA = \delta \Rightarrow AC = 2R \sin \delta \cdot \sin \beta$
 $AB = 2R \sin \beta \cdot \sin \delta$

ALI - бис. $\Leftrightarrow \frac{IL_1}{IL_2} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \delta \cdot \sin \beta}{\sin \beta \cdot \sin \delta}$

$\frac{AI}{IL_1} = \frac{AB}{IL_2} = \frac{AC}{IL_1} = 2R \sin \beta \cdot \sin \delta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_0 \cdot 24x = (y+7x) \cdot \sqrt{(y+7x)^2 + 49}$$

$$a+b = mx$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = my$$

$$a+b = kx$$

$$m = \frac{a^2 - 7ab + b^2}{x} = \frac{a+b}{x}$$

$$\frac{x}{y} =$$

$$a+b = \frac{(a^2 - 7ab + b^2) \cdot m}{x}$$

$$x(a+b) =$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = 13 - 12 - 10 - 8$$

$$(a+b)^2 - 9ab$$

$$2x_1^2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 14$$

$$y_2 - y_1 = 14$$

$$y_2 - y_1 = -x_2 - x_1 + 7$$

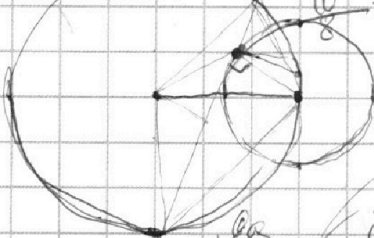
$$y - y_1 = -x - x_1$$

$$y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1) + 14$$

$$\Delta y = -2\Delta x + 14$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$$

$$\Delta y = -2\Delta x + 14$$



$$x_1 \cdot x_2 =$$

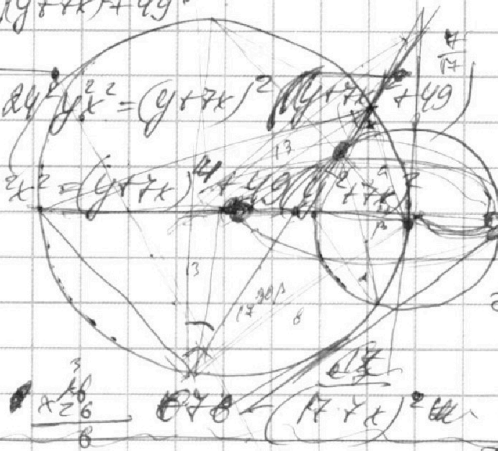
$$y_2 - y_1 = 14 - 2x_1 + 7$$

$$16 + 13 = 29$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$y = 2(2) + 14$$



$$13 + 13 - 7 - 8$$

$$(19 - a) \cdot (4 + a) = 17 \cdot 4 \cdot x^2$$

$$49 - 49x^2 = a^2$$

$$a = 7\sqrt{1-x^2}$$

$$a = 7\sqrt{1-x^2}$$

$$b^2 = 49 + 289x^2 - 2 \cdot 69 \cdot 7x = 49 + 289x^2 - 966x$$

$$49 + 289x^2$$

$$ax + y + 8b = 0$$

$$y = -ax + 8b$$

$$x^2 + (ax - 8b)^2 = 1$$

$$x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16$$

$$x^2(a^2 + 1) - 8abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) - 8abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$169 \cdot 2 - 2 \cos \alpha \cdot 169 = (24x)^2 = 49 + 289x^2 + 4944x^2$$

$$a+b = 9 + \frac{9}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$a+b = \frac{9a}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$a+b = \frac{9a}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$2\alpha + 120 - \beta - 2\delta$$

$$2\alpha = 120 - 2\delta$$

$$\alpha = 60 - \delta$$

$$\alpha = 2\alpha + \beta$$

$$2\alpha + \beta + 2\delta + \beta = 180$$

$$\alpha + \beta + \delta = 90$$

$$2009$$

$$y = 2(2) + 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

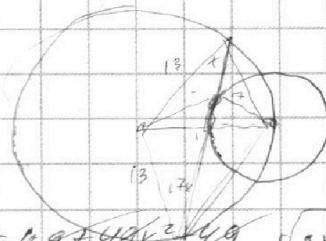
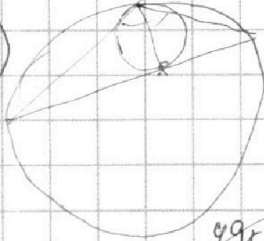
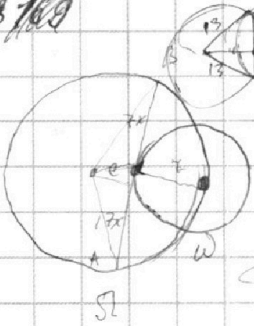
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



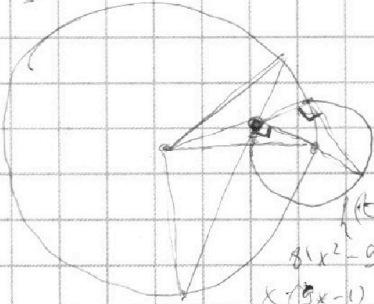
8/100



$$a = 49 + 49x^2$$

$$(4\sqrt{1+x^2} - 4)$$

$$49x^2 = 49 + 49x^2 - 49 \quad \sqrt{9x^2 + 3x + 1} \geq 9 - 1$$



$$x = \frac{1}{9} \quad \sqrt{1-x} = x$$

$$(1-9x)(2\sqrt{1-x}) = 0$$

$$81x^2 - 9x + 2(1-9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$x(9x-1) + 2(1-9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+1}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+1}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$\frac{a}{b}(a-4) + 1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ab: 2 5 11
bc: 2 7 13
ac: 2 23 49

a^2 b^2 c^2: 2 45 68
abc: 2 23 49

$$81x^2 - 18x + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$(1-9x) + 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$y = -ax + 2b$$

$$y - 41 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0$$

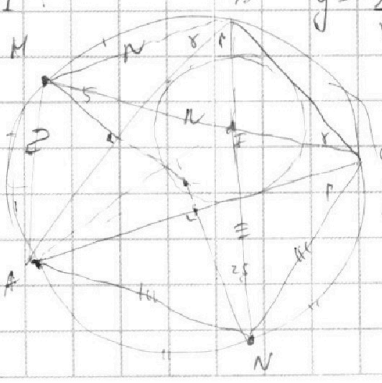
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+1}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{a+1}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+1}{\frac{a}{b} + 1}$$

a: 2
b: 2
c: 13

28
55
85
50+10



$$AI = bc - mn$$

$$576 + 41$$

$$64 \cdot 6 \cdot 25 - 4 \cdot 8 \cdot 25 \sqrt{1+86^2}$$

$$x^2 + 40x + 1$$

$$10^2 + 24^2 - 4 \cdot 8 \sqrt{1+86^2} + 1 - 86^2 = \frac{119}{25}$$