



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

стр. 1 из 8

$$\begin{array}{l} ab : 2^{15} \\ bc : 2^{17} \\ ac : 2^{23} \end{array} \Bigg| \Rightarrow (abc)^2 : 2^{15+17+23} = 2^{55} \Rightarrow abc : 2^{28}$$

$$ac : 7^{39} \Rightarrow abc : ac : 7^{39}. \text{ Значит, } abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \leq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Докажем, что  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$  - возможно. Пример:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{16}; \quad b = 2^5; \quad c = 2^{13} \cdot 7^{23}. \quad \text{Тогда } ab = 2^{15} \cdot 7^{16}; \quad 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{23}; \quad 2^{17} \cdot 7^{18}; \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{39}; \quad 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

стр. 2 из 8

$$m - \text{наибольш.} \Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2)$$

Применим аналог алгоритма Евклида для многочленов:

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 7ab + b^2 & a+b \\ a^2 + ab & a-8b \\ \hline -8ab + b^2 & \\ -8ab - 8b^2 & \\ \hline 9b^2 & \end{array}$$

$$m = \text{НОД}(a+b; 9b^2)$$

$$\text{Предв } \frac{a}{b} \text{ несократима} \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b^2) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; 9b^2) = 9, \text{ т.е. } m = 9.$$

Максимальное  $m = 9$ . Пример:  $a = 2; b = 7$ .

$$\frac{2}{7} \text{ несократ.}; \quad \frac{2+7}{2^2 - 7 \cdot 2 \cdot 7 + 7^2} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5} - \text{сократимо на } 9$$

Ответ:  $m = 9$

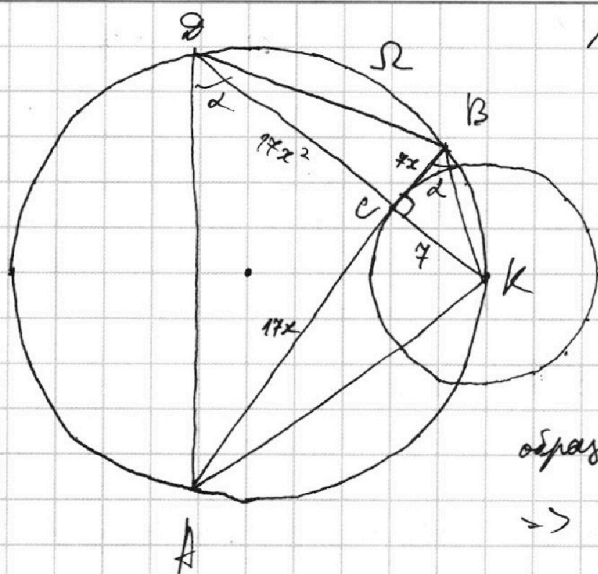
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3

стр. 3 из 8

Пусть  $k$ -углы  $\omega$

Пусть  $AC = 17x$ ;  $BC = 7x$ .

Пусть  $KC \cap \Omega = D$

$\triangle BCD \sim \triangle KCA$  как углов-ые,  
образованные пересечением хорд.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{KC}; \quad DC = \frac{17x \cdot 7x}{7} = 17x^2$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{7\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Пусть  $\angle CBK = \angle CDA = \alpha$

По т. Пифагора

$$AK = \sqrt{AC^2 + KC^2} = \sqrt{289x^2 + 49}$$

По т. син  $\triangle ADK$

$$\frac{AK}{\sin \alpha} = 2R, \text{ где } R - \text{ радиус опис. вып-ца.}$$

$$\sqrt{289x^2 + 49} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 26; \quad (289x^2 + 49)(x^2 + 1) = 676.$$

$$28x^4 + 77x^2 - 627 = 0.$$

$$x^2 = \frac{-77 \pm \sqrt{77^2 + 4 \cdot 28 \cdot 627}}{56} = \frac{\sqrt{11^2 + 16 \cdot 627} - 11}{8}$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0.$$

$$x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627}}{2 \cdot 289}$$

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627} - 338}{2 \cdot 289}}$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{\sqrt{338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627} - 338}{2 \cdot 289}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

стр. 4 из 8

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Сделаем замену:  $a = 3x^2 - 6x + 2$ ;  $b = 3x^2 + 3x + 1$ ;  $a, b \geq 0$   
 Тогда  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$ ;

$$\begin{aligned} (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) &= (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \\ (1 - 9x) &= (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \end{aligned}$$

I вариант:  $1 - 9x = 0$   
 $x = \frac{1}{9}$  - подходит,  
 $3x^2 - 6x + 2 > 0$ ;  $3x^2 + 3x + 1 > 0$ .

II вариант:  $1 - 9x \neq 0$ , сокращаем на него.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} &= 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 3x^2 - 6x + 2 &= 3x^2 + 3x + 2 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 9x &= 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (*) \\ 81x^2 &= 12x^2 + 12x + 4 \end{aligned}$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 6^2 + 4 \cdot 69 = 312 \quad ; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69}$$

Из (\*)  $\Rightarrow 9x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{6 - \sqrt{312}}{69}$  не подходит.

При  $x = \frac{6 + \sqrt{312}}{69} (> 0)$   $3x^2 + 3x + 1 > 0$ ,  $3x^2 - 6x + 2 = 3 \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{312}}{69}\right)^2 -$

$$\begin{aligned} - 6 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 2 &= 3 \cdot \frac{348 + 12\sqrt{312}}{69^2} - 6 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 2 = \\ &= \frac{1044 + 36\sqrt{312} - 36 \cdot 69 - 6 \cdot 69\sqrt{312} + 2 \cdot 69^2}{69^2} = \frac{1044 + 102 \cdot 69 - 6 \cdot 75 \cdot \sqrt{312}}{69^2} < 0 \end{aligned}$$

$$1044 + 102 \cdot 69 = 1044 + 7038 = 8082 < 450^2;$$

$$\begin{array}{r} 8082 \\ \times 8082 \\ \hline 16164 \\ + 64656 \\ + 64656 \\ \hline 65318724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 202500 \\ \times 312 \\ \hline 4050 \\ + 2025 \\ \hline 6075 \\ + 631800 \\ \hline 631800 \end{array}$$

$$450 < \sqrt{312}$$

$$8082^2 < 312 \cdot 450^2$$

Значит,  $x = \frac{6 + \sqrt{312}}{69}$  не подх.

Ответ:  $\frac{1}{9}$ .

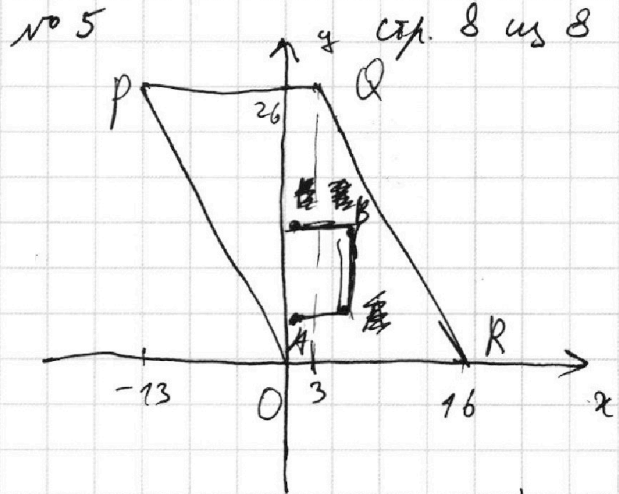
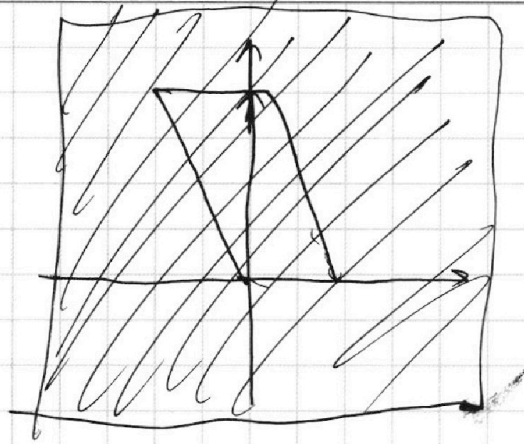
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$  - длина лачаной (ш.р.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

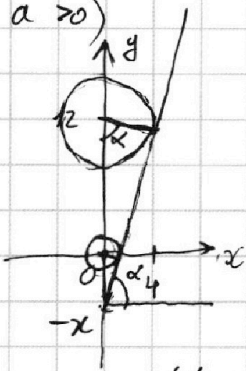
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (предметные)

стр. 6 из 8

Изобразим касательную к окружности общей кас. (касаясь окружности)



Пусть прямая пересекает ось  $y$  в  $(0; -x)$

Тогда, т.к. углы-ки, образованные касательными  
и радиусами в т. кас., подобны, то

$$\frac{x}{x+r} = \frac{1}{4}; \quad x=4.$$

Значит,  $\alpha = \text{tg } \alpha =$

$$= \frac{\sqrt{16^2 - 4^2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} =$$

$$= \sqrt{15}.$$

Выбор значения  $\alpha$  по условию  $-\sqrt{15}$ .

Ответ:  $\alpha = \pm \sqrt{15}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5.

стр. 5 из 8

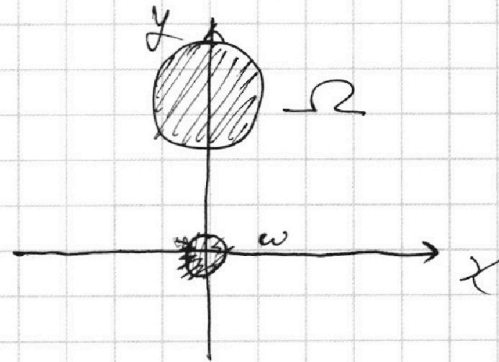
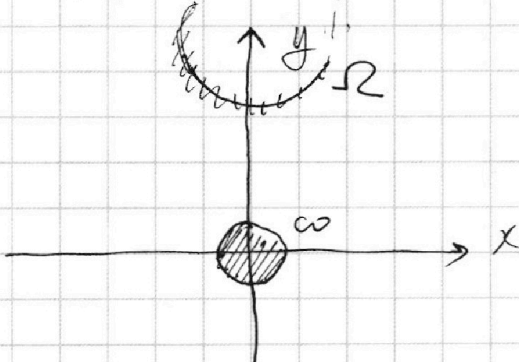
$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0.$$

1 вариант: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

2 вариант: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16. \end{cases}$$

$(x; y)$  лежит внутри окр-ти  $\omega$   
с центром  $(0; 0)$  и рад. 1.  
 $(x; y)$  лежит вне окр-ти  $\Omega$   
с центром  $(0; 12)$  и рад. 4.

$(x; y)$  лежит вне окр-ти  $\omega$   
с ц.  $(0; 0)$  и рад. 1.  
 $(x; y)$  лежит внутри окр-ти  $\Omega$   
с ц.  $(0; 12)$  и рад. 4.



$ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = 8b - ax$  — прямая. Чтобы

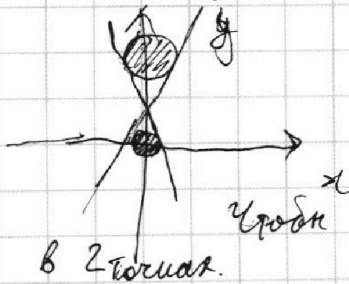
решений было  $\neq \infty$ , прямая должна касаться

окружностей.

Но тогда, при заданных  $a, b$

каждый вариант будет по 2 точки касания, т.е.

всего 4. Значит



прямая должна касаться хотя бы одной

из окр-тей. Но так как эти окр-ти

не имеют общих точек, то всегда будет при

заданном  $a$  (коэф-те наклона прямой)

чтобы при одном  $b$  2 вар-та, прямая кас. окр-тей

в 2 точки.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



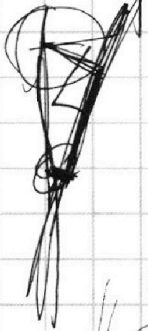
$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14.$$

ЧЕРНОВИК



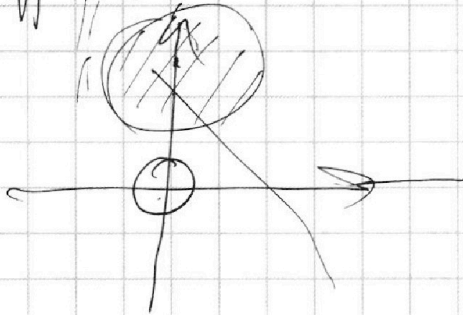
$$y_2 + 2x_2$$

$$y_2 - 2x_2 = 14 + y_1 - 2x_1$$

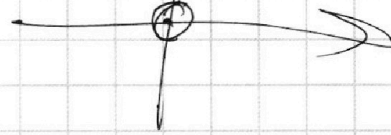
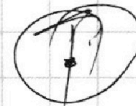


$$ax + y - 8b = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (x^2 + (y-12)^2 = 16)$$

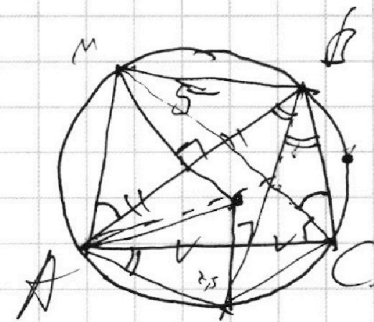
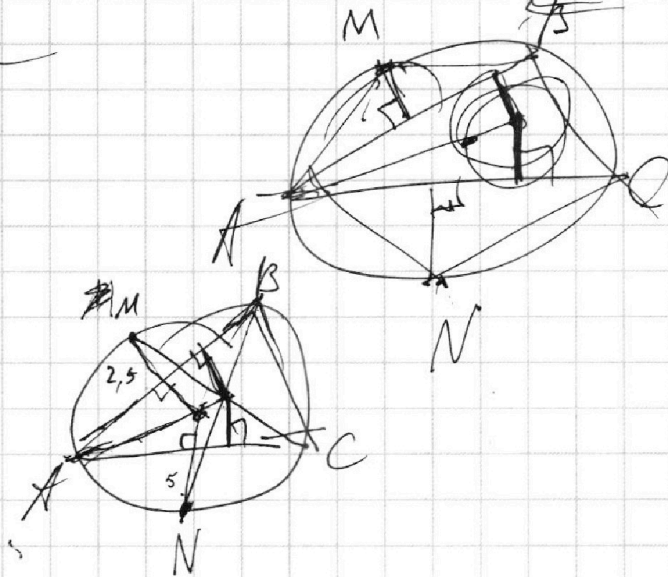


$$y = 8b - ax$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$





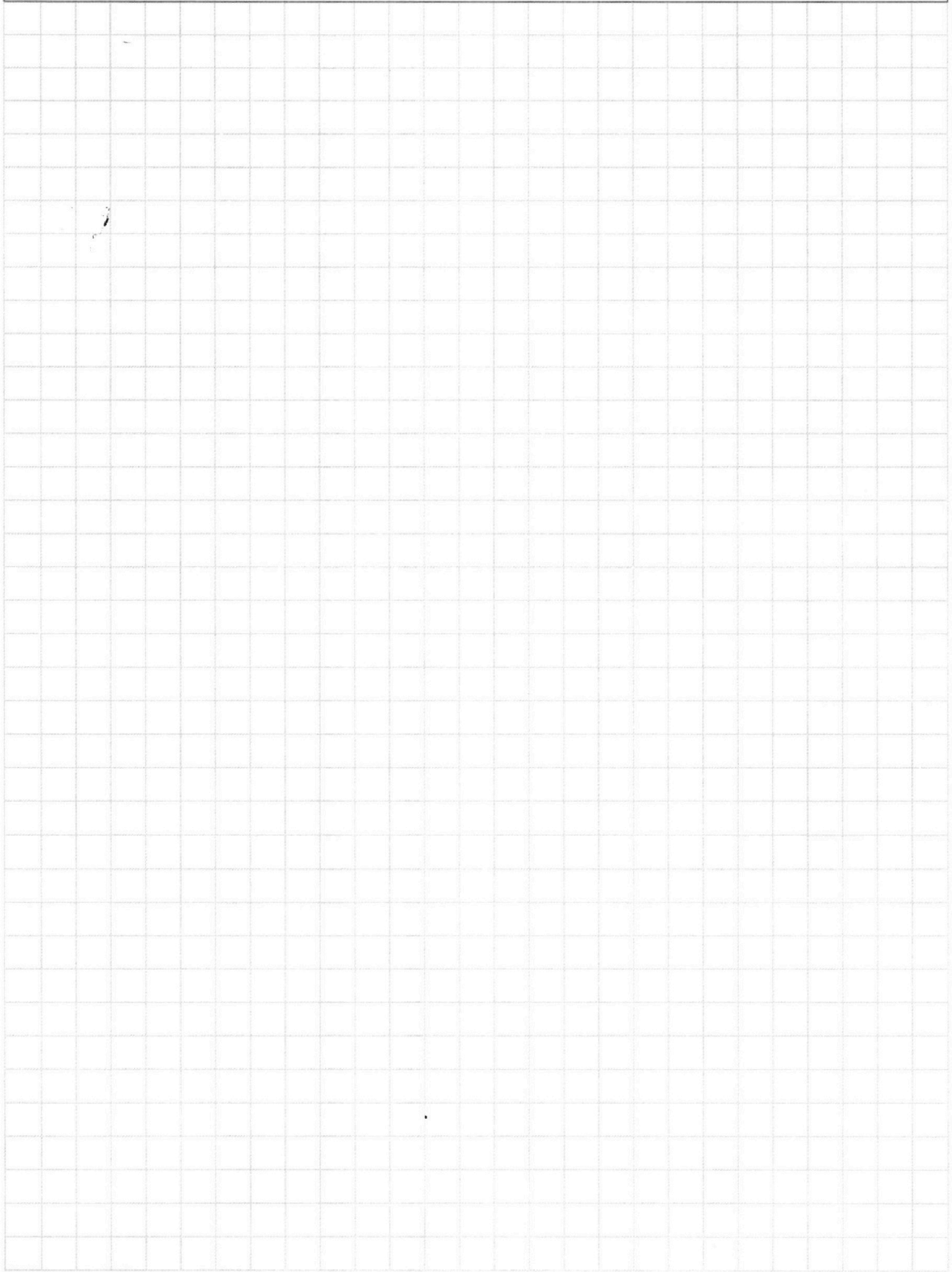
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ ;  $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$ ;  $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$      $a = 2^{10} \cdot 7^{16}$ ;  $b = 2^5 \cdot 7^{17}$ ;  $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$

$(abc)^2: 2^{55} \cdot 7^{68}$      $abc: 2^{27} \cdot 7^{34}$      $ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc: 7^{39}$

$a = 2^{10} \cdot 7^{16}$ ;  $b = 2^5 \cdot 7^{17}$ ;  $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$

УЗРКОВИК

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$m = \text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2) = \text{НОД}(a+b; -9ab)$$

$$a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab$$

$$\text{НОД}(a+b; 9b^2)$$

$$\begin{array}{r} a^2-7ab+b^2 \mid a+b \\ a^2+ab \quad \mid a-8b \\ \hline -8ab+b^2 \\ -8ab-8b^2 \\ \hline 9b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9b^2 \mid a+b \\ -8ab-9b \\ \hline a-9b \end{array}$$

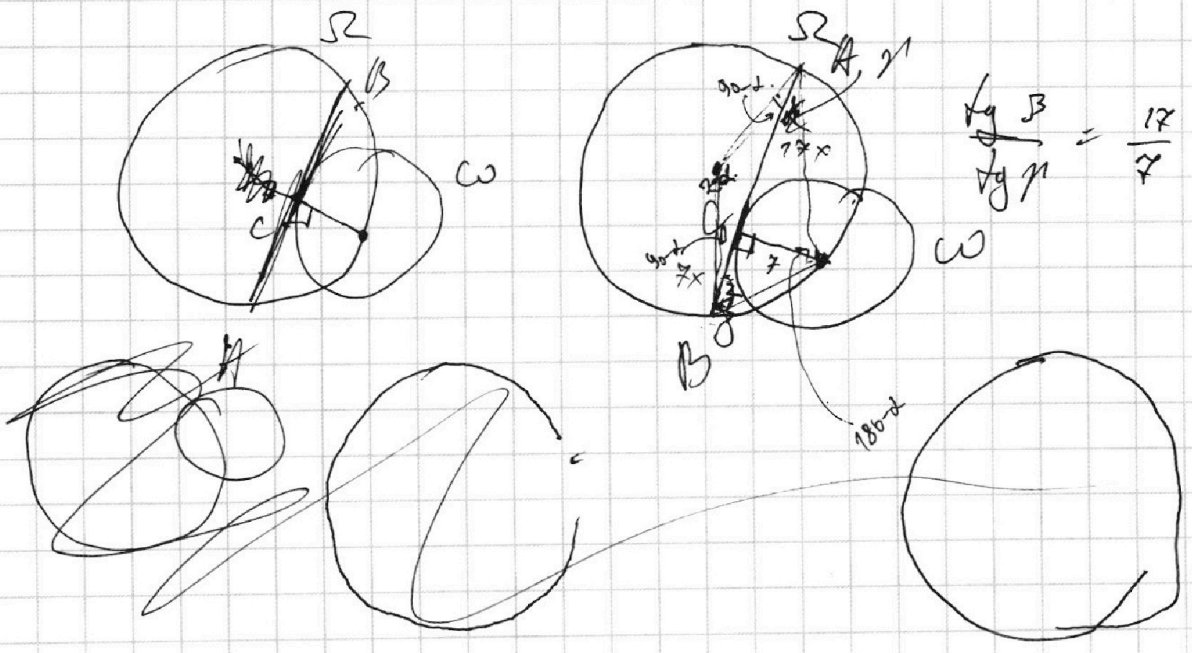
$$\begin{array}{r} -9ab \mid a+b \\ -9ab-9b^2 \\ \hline 9b^2 \end{array}$$

$$b^2 \cdot 9 = 3 \cdot 20$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b, b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b, b^2) = 1$$

Значит  $\text{НОД}(a+b, 9b^2) = 9$

$m = 9$      $a = 7$ ;  $b = 2$      $\frac{9}{49-98+9} = \frac{9}{-45}$



$$\frac{\lg 3}{\lg 7} = \frac{17}{7}$$

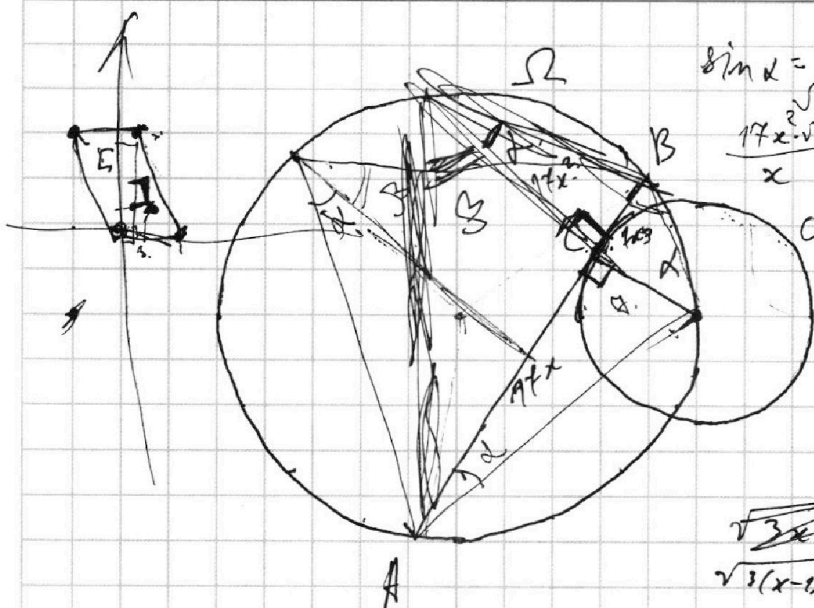
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЧЕРНИКОВИК

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \approx 17,5 \quad z = 289 + 17 + 2,25 = 306,25$$

$$\frac{17x \cdot \sqrt{x^2+1}}{x} = 20 \quad (50-5)^2 = 306,25$$

$$2500 + 25 = 5000 = 20 \cdot 25$$

$$17x \cdot \sqrt{x^2+1} = 20 \cdot 17,5$$

$$\frac{45}{x} = 87,5$$

$$400$$

$$78x \cdot 5$$

$$\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3(x+1)^2-3x^2} = 1-9x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 > 0 \\ 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 > 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} - a = \sqrt{b} - b$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a - b$$

$$b = \sqrt{ab}$$

$$\begin{cases} b > 0 \\ b^2 = ab \end{cases} \quad \begin{cases} a = b \\ a > 0 \end{cases}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 + \sqrt{ab} + b^2 - \sqrt{ab} = 2ab + a + ab + b$$

$$\frac{45}{x} = 87,5$$

$$\frac{400}{x} = 78$$

$$\frac{78}{x} = 324$$

$$49b = 6x^2 - 3x + 3$$

$$(1-9x) = (1-9x) (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline + 179 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline + 179 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$312 = 4 \cdot 78 \quad 4 \cdot 9x = 2 \cdot 2\sqrt{3x^2+3x+1} \quad \frac{312}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 312$$

$$102 \cdot 69 = 7038 \quad 40 - 102 \cdot 31x^2 = 12x^2 - 72x + 4$$

$$-7038 \quad 69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$8082 \quad 6 \cdot 45 = 450$$