



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



✓ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

✓ 3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

✓ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

✓ 7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{51} \cdot 7^{64} \rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}}, \text{ но т.к. } \sqrt{2^{51}} \notin \mathbb{N} \Rightarrow abc \geq \sqrt{2^{52} \cdot 7^{64}} =$$
$$= 2^{26} \cdot 7^{32}$$

Заметим, что  $abc: ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{16} \cdot 7^{37}$

Заметим,  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$  будет min, т.к. степень 7

мы уже не увелишим. Допустим, что мы можем

увеличить степень 2, тогда

$$ac: 2^{20} \Rightarrow \text{если } a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}, \text{ а } c = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}, \text{ то } \alpha_1 + \beta_1 \geq 20$$

$$\text{Тогда если } b = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2}, \text{ то } \gamma_1 \leq 6 \Leftrightarrow \gamma_1 \leq 25 - \alpha_1 - \beta_1$$

$$\text{т.к. } bc: 2^{17} \Rightarrow \gamma_1 + \beta_1 \geq 17 \Rightarrow \beta_1 \geq 12 \Rightarrow \alpha_1 \leq 25 - \gamma_1 - \beta_1 = 8$$

$$\text{и } ab: 2^{14} \Rightarrow \gamma_1 + \alpha_1 \geq 14, \text{ а у нас } \gamma_1 + \alpha_1 \leq 8 + 25 - \alpha_1 - \beta_1 = 13 \dots$$

$$\text{Итого: } abc_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37} \quad \text{проверяется}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1$$

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2)_{\max} = ?$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab.$$

Заметим, что  $(a+b)^2 - 8ab : a+b$ , когда  $a=3$ , а  $b=5$  п.к.

$$\begin{cases} (a+b)^2 : a+b \\ 8ab : a+b = 8 \end{cases}$$

Значит,  $\text{НОД} (a+b; a^2 - 6ab + b^2)_{\max} = a+b$ , при  $a=3$ ,  $b=5$ .

$$\text{Значит } m_{\max} = a+b$$

Ответ:  $a+b$ .

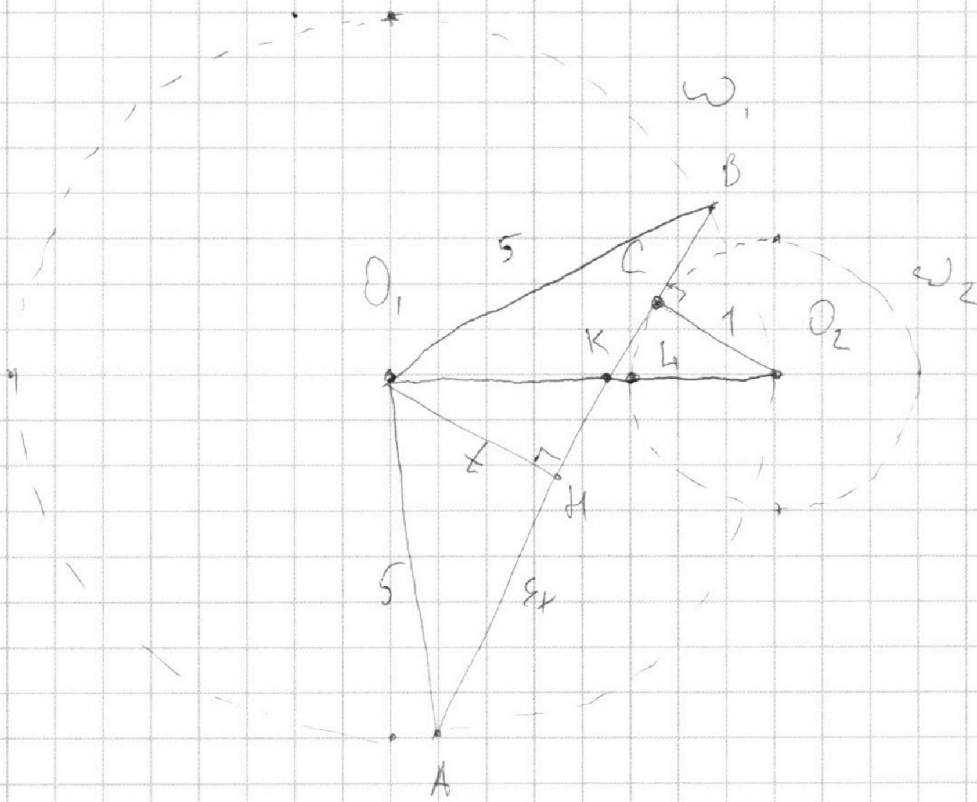
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть  $BC = x$ , тогда  $AC = 4x$

2)  $O_1H \perp AB \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AB = 8x \cdot \frac{1}{2} = 4x$

3) Пусть  $O_1H = t$ ;  $\triangle O_1HK \sim \triangle KCO_2 \Leftrightarrow$

a)  $\frac{O_1K}{KO_2} = \frac{t}{1} \Leftrightarrow O_1K = t \cdot O_2K$  и т.к.  $O_1K + O_2K = 5 \Rightarrow O_1K = \frac{5t}{1+t}$

b)  $\frac{CK}{KH} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow CK = \frac{KH}{t}$  и т.к.  $CK + KH = 8x - 4x - x = 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow CK = \frac{3x}{1+t}$

4)  $CK^2 + CO_2^2 = KO_2^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3x}{1+t}\right)^2 + \left(5 - \frac{5t}{1+t}\right)^2 = \left(5 - \frac{5t}{1+t}\right)^2 \quad *$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{(*)} \quad \text{(*)} \quad \frac{9x^2}{(1+t)^2} + 1 = \frac{25}{(1+t)^2} \quad | \cdot (1+t)^2$$

$$9x^2 + (1+t)^2 - 25 = 0 \quad \left( t = \sqrt{25 - 9x^2} \text{ из } \Delta AOB \text{ т.к. } AH \perp OB \right)$$

$$9x^2 + 1 + 25 - 16x^2 + 2\sqrt{25 - 16x^2} - 25 = 0$$

$$7x^2 - 1 = 2\sqrt{25 - 16x^2}$$

$$49x^4 - 14x^2 + 1 = 100 - 64x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$(x^2 - 1)(49x^2 + 99) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = \frac{39}{49} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 1 - \text{подходит} \\ x = -1 - \text{не подходит} \end{array}$$

$$AB = 8x = 8$$

$$\text{Ответ: } 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{(2x^2 + 2x + 1) + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 = a \\ 2 - 7x = b \end{cases}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \Leftrightarrow \sqrt{a+b} = b + \sqrt{a}$$

$$a+b = b^2 + 2b\sqrt{a} + a$$

$$b^2 + b(2\sqrt{a} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \\ b=1-2\sqrt{a} \quad (1) \end{cases}$$

$$\text{DAB: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$(1) \quad 2 - 7x = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow 7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{22}{41} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{22 - \sqrt{976}}{82} - \text{не подходит, } x < 0 \\ x_2 = \frac{22 + \sqrt{976}}{82} - \text{подходит } x > 0 \end{cases}$$

$u < 1$

Проверка:

$$1) \quad x = \frac{2}{7} : \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \text{т.к. } 2 - 7x = 0 \text{ при } x = \frac{2}{7}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$7x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{верно.}$$

$$2) \quad x = 0 - \text{не подходит } \sqrt{3} - \sqrt{1} = 2 - \text{не верно}$$

$$3) \quad x = \frac{22}{41} : \sqrt{\frac{2 \cdot 22^2 - 5 \cdot 22 \cdot 41 + 3 \cdot 41^2}{41^2}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 22 \cdot 41 + 41^2}{41^2}} = 2 - \frac{7 \cdot 22}{41}$$

$$\sqrt{2 \cdot 22^2 - 5 \cdot 22 \cdot 41 + 3 \cdot 41^2} - \sqrt{2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 22 \cdot 41 + 41^2} = 41 \cdot 2 - 7 \cdot 22$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 4~~

Answer:  $x_1 = \frac{2}{7}$ ;  $x_2 = \frac{224\sqrt{976}}{82}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

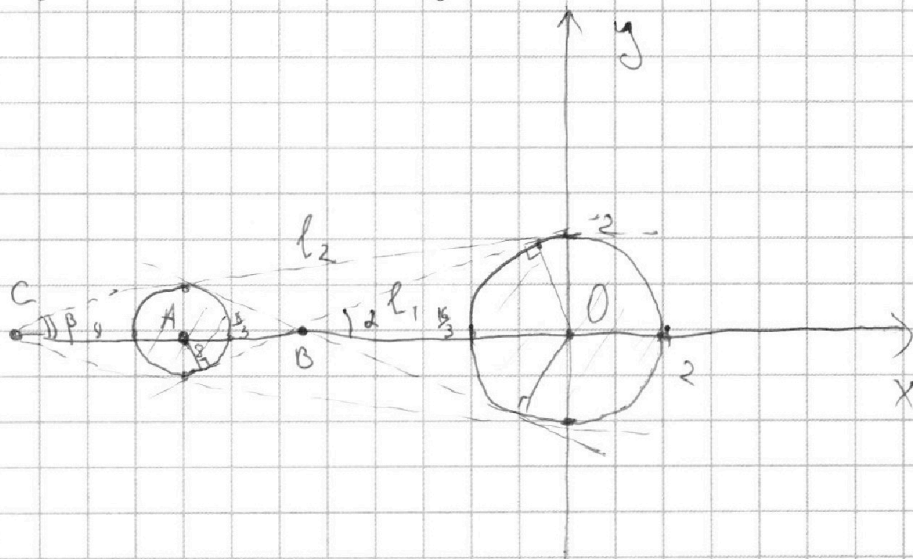
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = ?$ :  $\exists b$ : было решено 2 решения.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$



Чтобы были решения, необходимо, чтобы точки находились внутри окружностей или на границе, чтобы выполнялось 2 неравенство. Первое равенство задает прямую с коэф. наклона  $a$ , которую мы поднимаем или опускаем на  $10b$ . Знаем, чтобы система имела ровно 2 решения, необходимо найти все возможные прямые, которые будут касаться обеих окружностей, если какая-то прямая будет пересекать хоть 1 оф., то будет бескон. много решений. Такие касат. 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По условию, если необходимо найти угол наклона  
прямых  $\Leftrightarrow$  угол между прямой и осью  $Ox$ , т.к.  
то мы всегда сможем подобрать, т.к.  $b \in \mathbb{R}$ . Прямые  
у нас параллельны и они симметричны относительно  $Ox$   $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  достаточно найти коэф. наклона одной из  
прямых и вынести касательных. Заметим, т.к.  
радиусы окр. равны 2 и 1, то в силу подобия треугол,  
которые прямая  $l_1$  и радиусы окр. образуют в  
 $Ox$ , отрезок  $OA$  делится  $l_1$  в отношении  $2:1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{AB}{BO} = \frac{1}{2} \Rightarrow$  т.к.  $OA = 8$ , то  $BO = \frac{16}{3} \Rightarrow$  угол наклона

$$l_1 \Rightarrow \alpha = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{3}{8}, \text{ Знаем } \alpha_{1,2} \Rightarrow \frac{3}{8} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2:1}{\sqrt{1-(2:\frac{16}{3})^2}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Прямая  $l_2$  и радиусы также образуют подобие треугол.

$$\frac{AC}{AC+8} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 8 \Rightarrow l_2 \text{ отрезок имеет коэф.}$$

$$\text{наклона } \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} \Rightarrow \tan \beta = \frac{1:8}{\sqrt{1-(1:8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

~~Ответ:  $a_{1,2} = \pm \frac{3}{8}$ ,  $a_{3,4} = \pm \frac{1}{8}$ .~~

Знаем в силу симметрии  $a_{1,2} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$ ,  $a_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$

Ответ:  $a_{1,2} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$ ,  $a_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 6,5



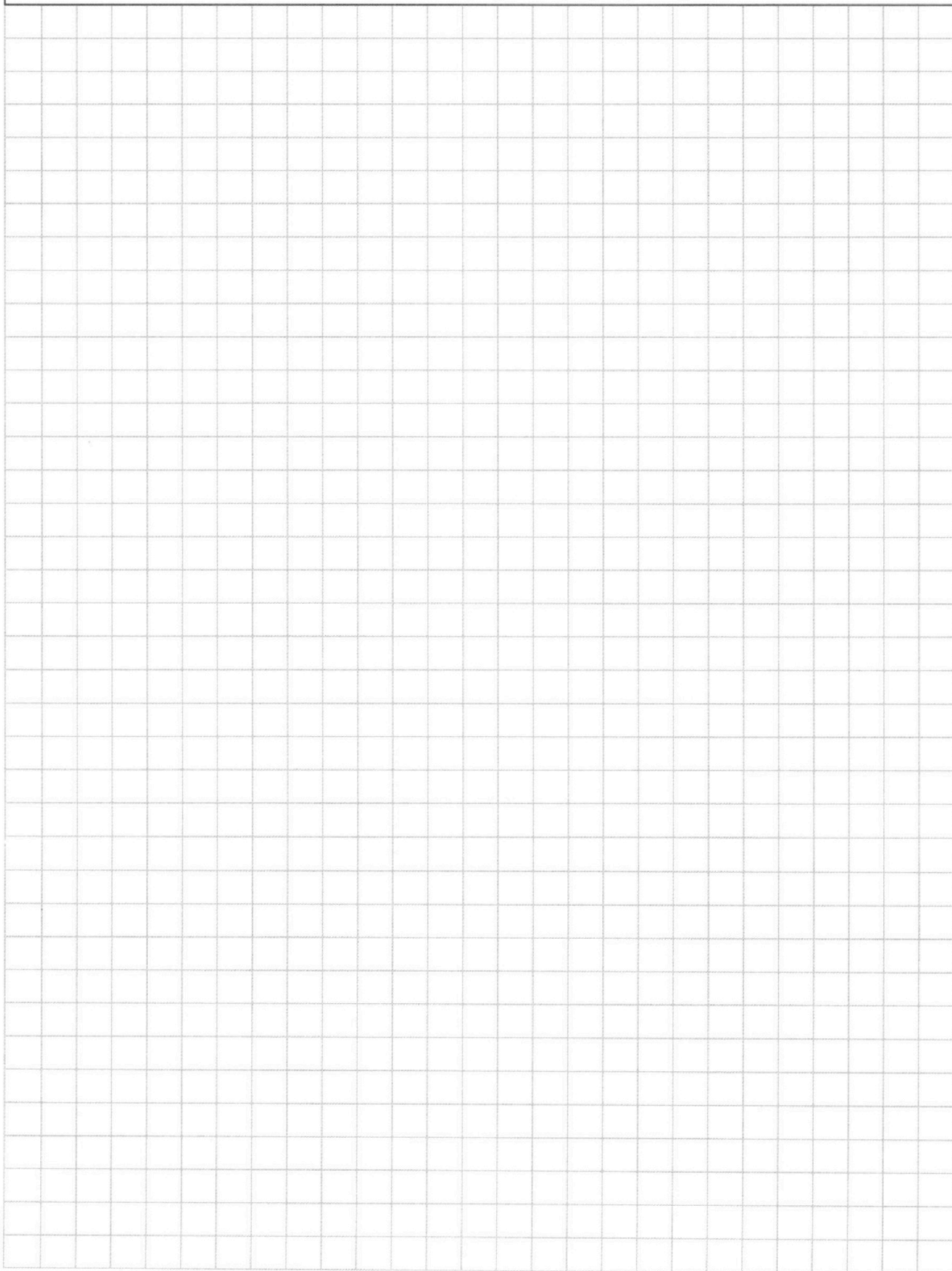
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





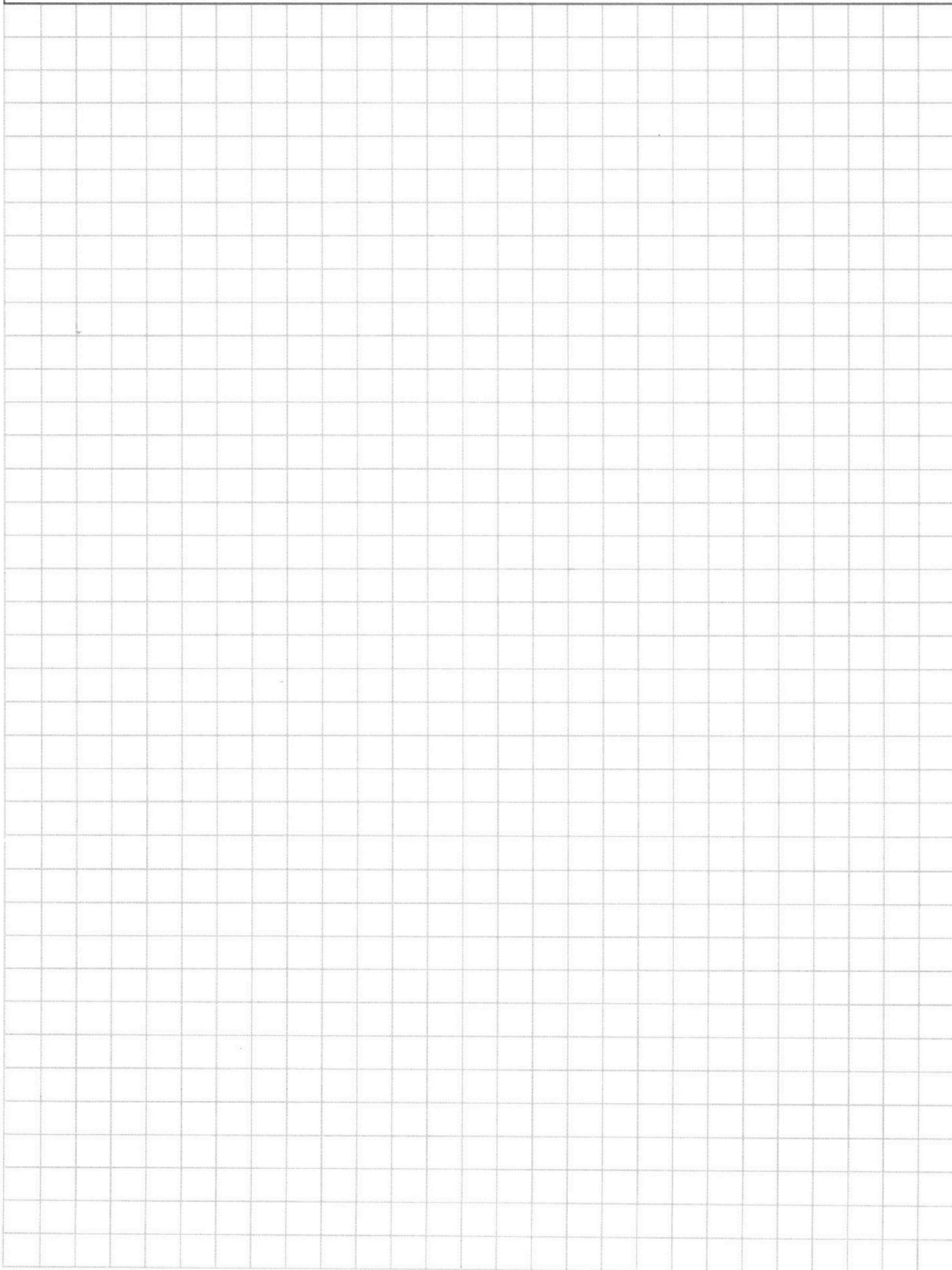
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$2 \cdot \frac{7-22}{41} = \frac{184}{41}$$

$$\frac{22 \cdot 7 - 41}{41} = 2 \cdot \frac{143}{41}$$

$$143 = 2 \cdot 71$$

$$\sqrt{2 \cdot 22 \cdot 41 - 22 \cdot 41 + 41^2}$$

$$483$$

$$22 - \sqrt{976}$$

$$x_1 = \frac{22 - \sqrt{976}}{82}$$

$$x_2 = \frac{22 + \sqrt{976}}{82}$$

$$49x^2 - 14x + 1 \geq 8x^2 + 8x + 8$$

$$41x^2 - 22x - 7 \geq 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 7$$

$$D = 484 + 1148 = 1632$$

$$= 976$$

$$x \geq \frac{1}{4}$$

$$2\sqrt{a} = 1 + b$$

$$4a = 1 + 2b + b^2$$

$$8x^2 + 48x + 4 = 1 - 4 + 14x + 4 - 14x + 49x^2$$

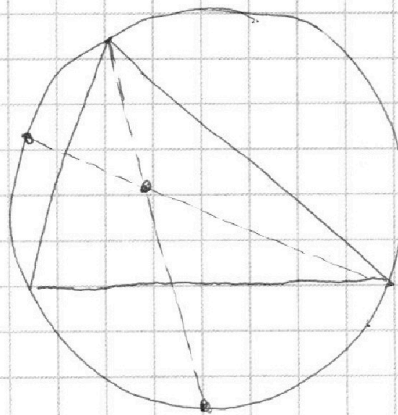
$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$D = 25 -$$

$$x = 1$$

$$x = \frac{3}{2}$$



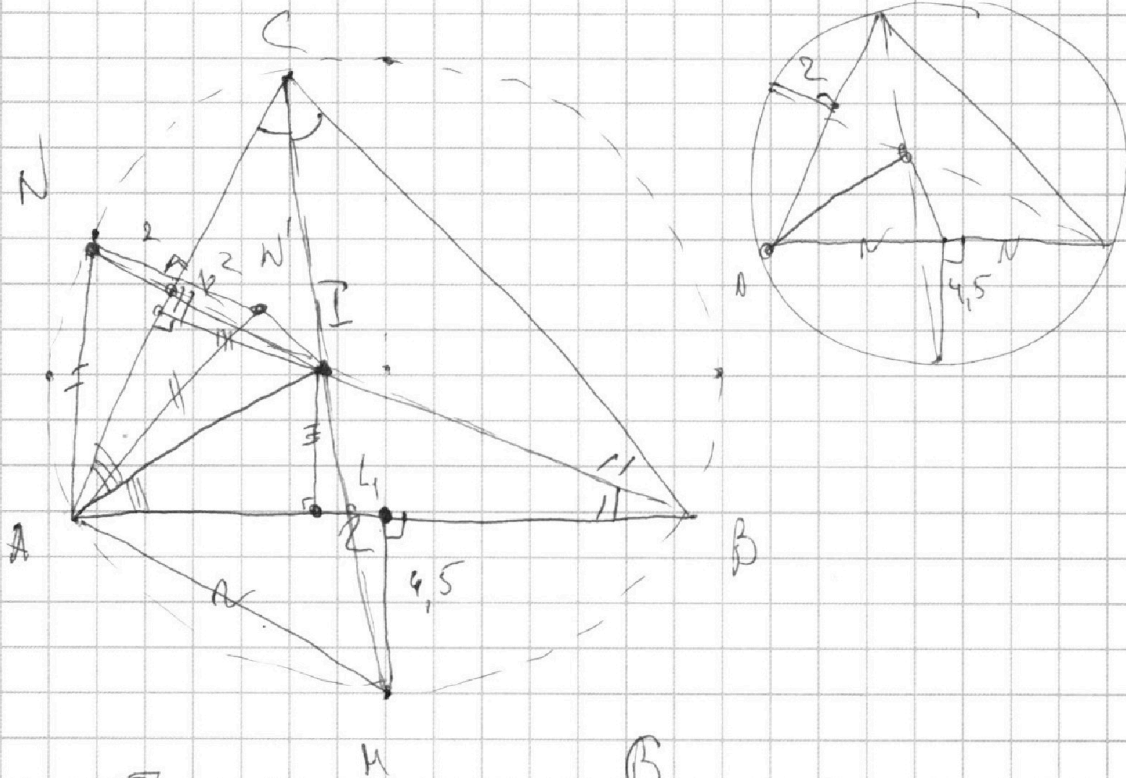
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



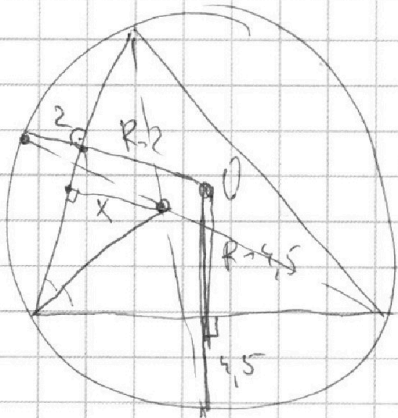
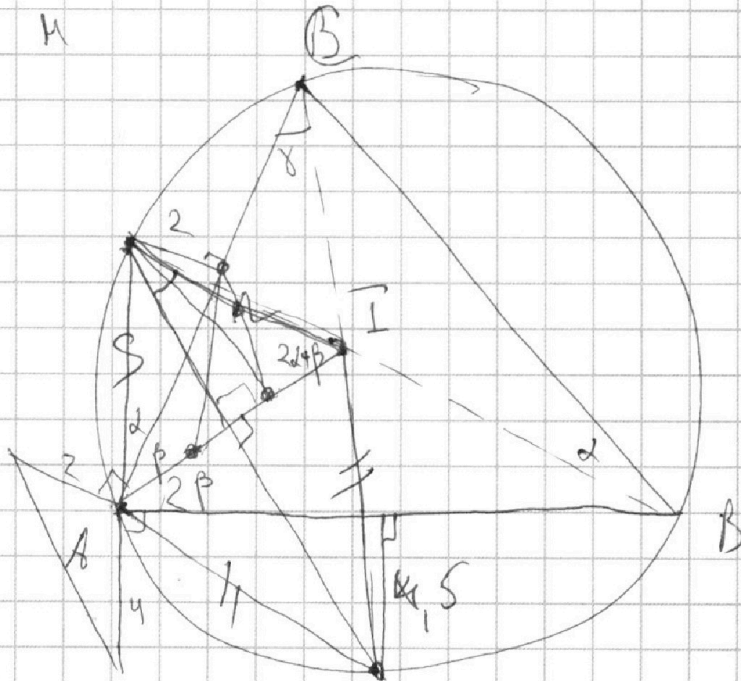
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{LN}{LM} = \frac{1}{4,5}$$

$$\frac{LK}{KN} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{LN \cdot KN}{LK \cdot LM} = \frac{2}{4,5}$$



$$180 - 2\alpha - 2\beta$$

$$2\alpha + 2\beta - 90$$

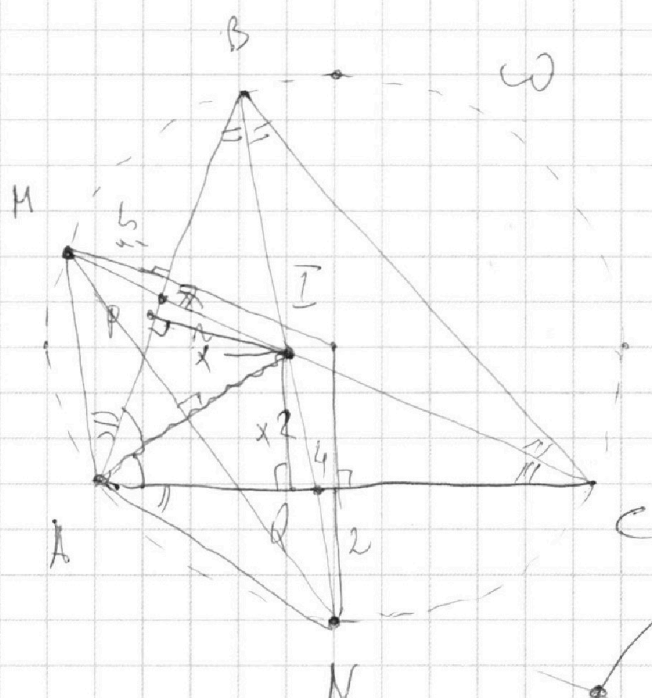
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{4}{x} + 2 = \frac{4.5}{2}$$

90°

$$\frac{IN}{LN} = \frac{x}{2}$$

$$NI = IN + NI$$

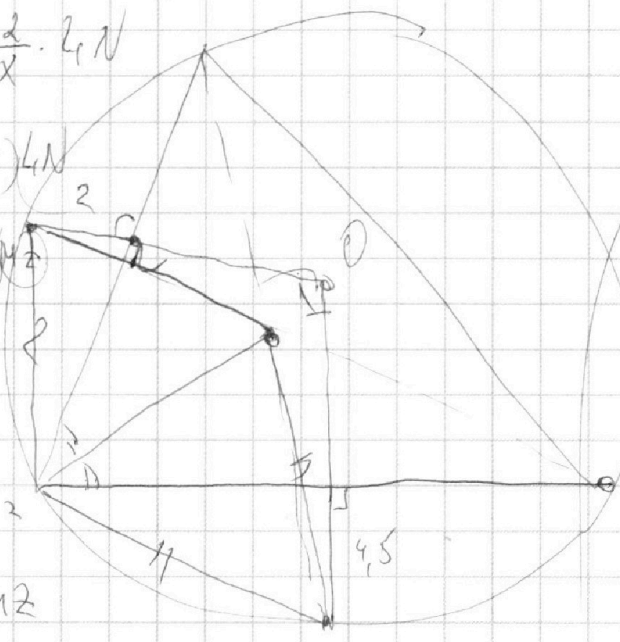
$$IN = \frac{2}{x} \cdot LN$$

$$NI = \left(\frac{2}{x} + 1\right) LN$$

$$MI = \left(\frac{4.5}{x} + 1\right) NI$$

$$\left(\frac{2}{x} + 1\right) LN =$$

$$\left(\frac{4.5}{x} + 1\right) NI$$



$$\frac{2}{x} + 1 =$$

$$\frac{4.5}{x} + 1 =$$

$$\frac{NI}{LN} = \frac{4.5}{2}$$

$$\frac{2}{x} + 2 = \frac{(4.5)^2}{x} + 4.5$$

$$4 + 2x = (4.5)^2 + 4.5x$$



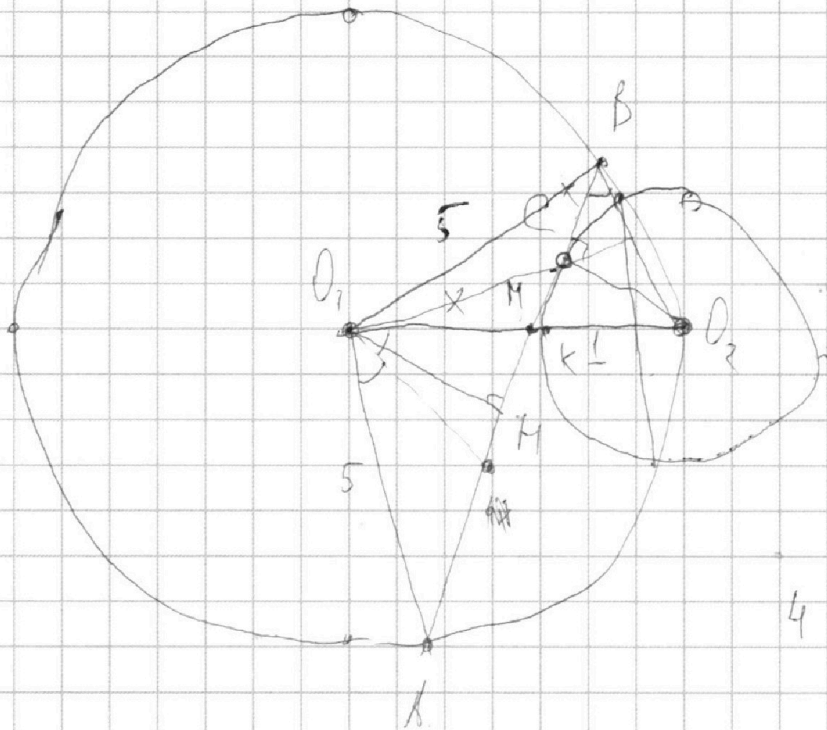
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение 1.

$$\frac{OH}{1} = \frac{x}{x-5}$$

$$\frac{OH}{1} = \frac{x}{x-5}$$

$$\frac{OH}{1} = \frac{x}{x-5}$$

$$MK \cdot MO_2 = MC^2$$

$$(5-x) \cdot (4-x) =$$

$$= (20 + x^2 - 9x)$$

$$\frac{MH}{MC} = \frac{x}{5-x}$$

$$MH = \frac{(4-x)(5-x)}{5-x} \cdot x = 4x - x^2$$

$$AH^2 = (4-x)^2 \cdot x^2 + \frac{x^2}{(5-x)^2} \cdot x^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + 1 =$$

$$20 + x^2 - 9x + 1 = (5-x)^2$$

$$20 + x^2 - 9x + 1 = 25 - 10x$$

$$(4-x)^2 + 1 - (5-x)^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



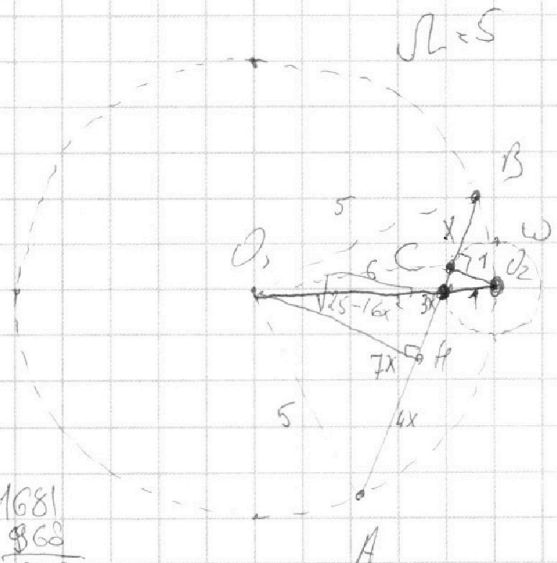
①  $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$   
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$   
 $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$   
 $a^2bc^2: 2^{51} \cdot 7^{64}$   
 $a^2b^2c^2: 2^{51} \cdot 7^{64}$   
 $abc \geq \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} = 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}$   
 $abc \geq 7 \cdot 2$      $abc \geq 7 \cdot 2$

$a = 2^{14} \cdot 7^{10}$   
 $b = 2^{17} \cdot 7^{17}$   
 $c = 2^{20} \cdot 7^{37}$   
 $a^2bc^2 = 2^{51} \cdot 7^{64}$   
 $a^2b^2c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64}$

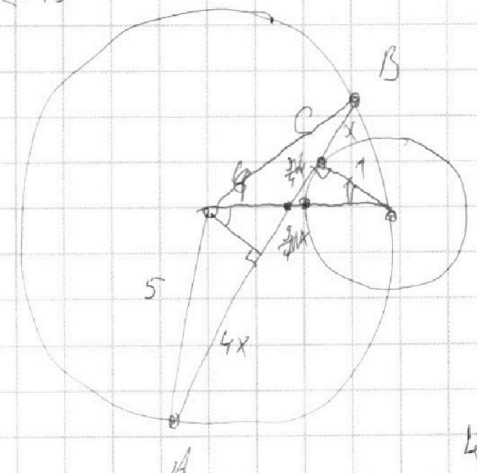
$(a|b) = 1$     ②  
 $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$   
 $(a+b) \cdot (a^2 - 6ab + b^2) = \dots$   
 $(a+b)^2 - 8ab$   
 $8ab : a+b$   
 $a=3, b=5$   
 $m = a+b$   
 $\frac{21}{5}$

③

$2x^2 + 23x - 1 = 2\sqrt{2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 22 \cdot 41 + 41^2}$   
 $2x^2 + 23x - 1 = 2\sqrt{2 \cdot 484 + 2 \cdot 902 + 1681}$   
 $2x^2 + 23x - 1 = 2\sqrt{2881}$



$AB = ?$   
 $OH = \sqrt{25 - 16x^2}$   
 $O_1C = \sqrt{25 - 4x^2}$   
 $\cos \angle OBH = \frac{4x}{5}$   
 $\Delta O_1CB:$



$25 - 16x^2 = 25 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \frac{4x}{5}$   
 $25 - 16x^2 = 25 + x^2 - 8x^2$   
 $7x - 2 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$   
 $7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$   
 $49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 1$   
 $48x - 2 = 968$

$b^2 + 4b^2a$   
 $\frac{41}{x} \mid 110$   
 $\frac{41}{9510}$   
 $\frac{41}{4510}$   
 $\frac{41}{1501}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 12 \\ \hline 82 \end{array}$$



$$\sqrt{(2x^2 + 2x + 1) + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \hline 452 \\ + 484 \\ \hline 936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2500 \\ - 820 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{y-x} - \sqrt{y} &= x \\ \sqrt{y-x} &= \sqrt{y} + x \\ y-x &= y + x^2 + 2x\sqrt{y} \\ x^2 - x(1+2\sqrt{y}) &= 0 \\ x(x - 1 - 2\sqrt{y}) &= 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ y= \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b$$

$$a-b = b^2 + a + 2b\sqrt{a}$$

$$b^2 + b(1+2\sqrt{a}) = 0$$

$$b = 0 \quad (1)$$

$$b = -1 - 2\sqrt{a} \quad (2)$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b^2 + b(2\sqrt{a}-1) = 0$$

$$\downarrow$$

$$b = 0 \quad (1)$$

$$b = 1 - 2\sqrt{a} \quad (2)$$

$$(1) \quad 2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$(2) \quad 2 - 7x = -1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$7x - 2 = 1 + 2\sqrt{(x+1)^2 + x^2}$$

$$(7x-3)^2 = 4(x+1)^2 + 4x^2$$

$$49x^2 - 42x + 9 = 4x^2 + 8x + 4 + 4x^2$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0$$

$$D = 50^2 - 20 \cdot 41 = 2500 - 820 = 1680$$

$$\sqrt{2 \cdot 22^2 - 5 \cdot 22 + 3} - \sqrt{2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 22 + 1} = 2 - 7 \cdot 22$$

$$464 \cdot 2 = 968 - 110 + 3 = 858 + 3 = 861 =$$

$$(1) \quad b = 0$$

$$2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$(2) \quad b = 1 - 2\sqrt{a}$$

$$2 - 7x = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 484 + 12 \cdot 41$$

$$1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2 - 7x = \left( \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 \right)^2 - 2x^2 - 2x - 1$$

$$3 + 2x^2 + 5x$$



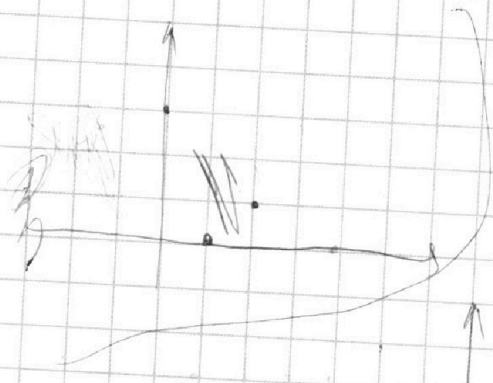
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

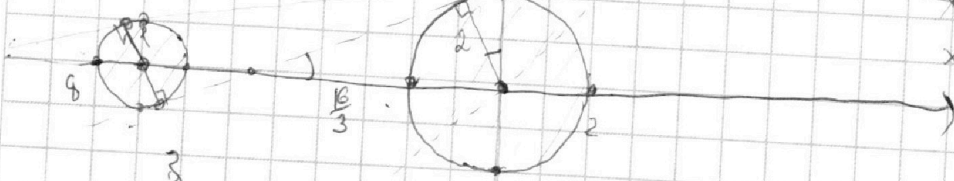
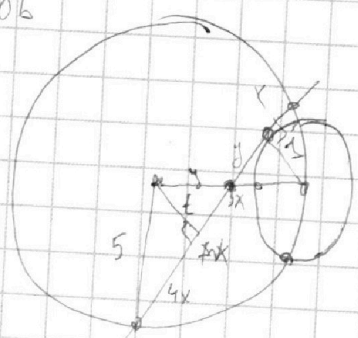


$$\begin{cases} 9x - y + 106 = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

а2?  $\frac{3}{16} = \frac{2}{16}$

$$y = 9x + 106$$

$$\sin t = \frac{3}{8}$$



$$\sin = \frac{3}{8}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$t = \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$\frac{y}{3x - y} = \frac{1}{t}$$

$$ty = 3x - y$$

$$y = \frac{3x}{1+t}$$

$$\frac{y}{5-y} = \frac{6}{t}$$

$$y = 5t - yb$$

$$y = \frac{5t}{1+t}$$

$$\sin = \frac{3}{8}$$

$$\cos = \sqrt{\frac{64-9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\frac{\sqrt{256-36}}{3} = \frac{\sqrt{220}}{3} = \frac{\sqrt{44 \cdot 5}}{3}$$

$$\frac{\sin}{\cos} = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{\sqrt{55}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\sin = \frac{1}{8}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\tan = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$25 = (1+t)^2 + 9x^2$$

$$25 = 1 + 2\sqrt{25-16x^2} + 25-16x^2 + 9x^2$$

$$7x^2 - 1 = 2\sqrt{25-16x^2} \Rightarrow x = 1$$

$$\left(\frac{5}{1+t}\right)^2 = 1 + \frac{9x^2}{(1+t)^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{3x}{1+t}\right)^2$$

$$t \cdot ck = 3x - ck$$

$$49x^4 - 16x^2 + 1 = 100 - 64x^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

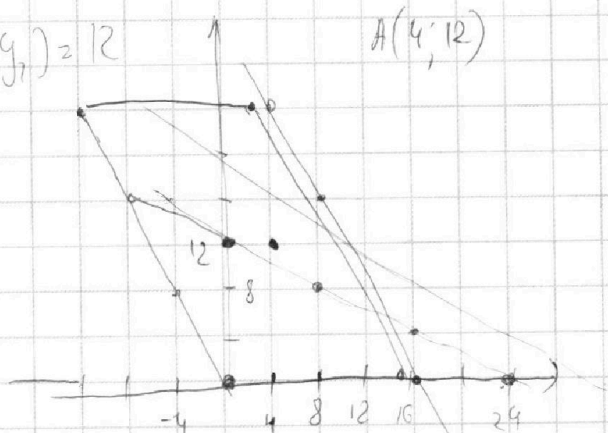


$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$A(4, 12)$$



$$2(x_2 - 4) + (y_2 - 12) = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 20 = 32$$

$$y_2 = 32 - 2x_2$$

$$2x_2 + y_2 = 24$$

$$y_2 = 24 - 2x_2$$

A - const.

$$\sqrt{25 - 16x^2} = y$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + y_1 + 2x_1$$

$$y_2 = -2x_2 + (12 + y_1 + 2x_1)$$

$$O_2K = \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$O_2S = y$$

~~y~~

$$y = \frac{5-y}{y} = \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}$$

$$y = \frac{5\sqrt{25-16x^2}}{1+\sqrt{25-16x^2}}$$

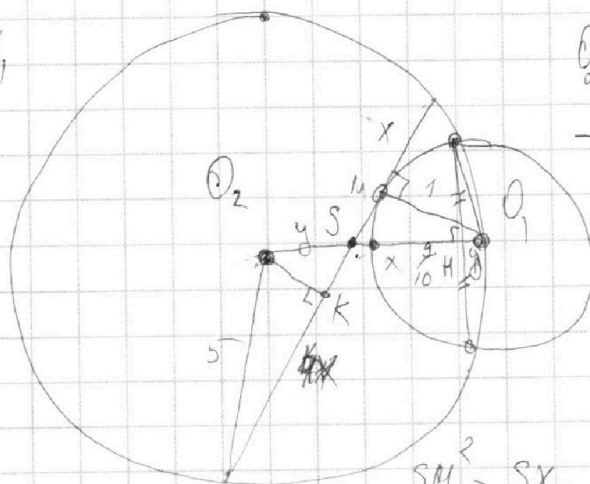
~~2x~~

$$y_2 + 2x_2 = 12 + y_1 + 2x_1$$

45-

~~O\_2H~~

$$x(x+y) =$$



$$SM^2 = SX \cdot SO_1 =$$

$$= SX^2 + SX$$

$$OH = \frac{1}{10}$$

$$O_2H =$$

$$\frac{KS}{SM} = \frac{O_2K}{O_1H} = \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$KS + SM = 3x$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 1-y^2=25-x^2 \end{cases}$$

$$1-y^2=25-(5-y)^2$$

$$1-y^2=25-25+y^2+10y$$

$$y^2=10$$

