



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}; \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{17}; \quad ac: 2^{30} \cdot 7^{37}$$

Чтобы  $abc$  было минимальным нужно, чтобы  $ab, bc, ac$  были как можно меньше, тогда минимальное  $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$ ; мин.  $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$ ;  $ac = 2^{30} \cdot 7^{37}$ , но тогда  $ab \cdot bc > ac = 2^{30} \cdot 7^{37}$ , это нелогично

$$2^{31} \cdot 7^{27}$$

тогда возьмём  $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$ ;  $ac = 2^{30} \cdot 7^{37}$ ;  $b = 2^1$ , тогда

$$a = 2^{13} \cdot 7^{10} \quad c = 2^{17} \cdot 7^{27}, \text{ т.е. } ab = 2^{14} \cdot 7^{10} : 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ и}$$

минимально

то  $ac = 2^{30} \cdot 7^{37} : 2^{13} \cdot 7^{10}$  и минимально;

$bc = 2^{18} \cdot 7^{37} : 2^{17} \cdot 7^{17}$  и является частью минимального

ответа, т.к.  $ab$  и  $ac$  минимальны

$$\boxed{\text{Ответ: } abc = 2^{31} \cdot 7^{37}}$$



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$\frac{a}{b}$  несократимо значит, что  $a$  и  $b$  взаимно просты.

Тогда  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ , чтобы мы могли сократить

эту дробь на  $m$ , и числитель и знаменатель должны делиться на  $m$ :  $(a+b) : m$ ;  $(a+b)^2 - 8ab : m$ ,

т.е.  $(a+b) : m$  |  $8ab : m$

Рассмотрим взаимно простое  $b$  и  $q$ , тогда  $b+q$  взаимно просто с

и с  $b$ , и с  $q$ : Док-во: пусть  $b+q$  не взаимно просто с  $b$ ,

тогда  $b+q = \cancel{x \cdot y}$ ;  $b = x \cdot z$ , тогда  $x \cdot z + q = x \cdot y$ ,  
делитель и  
 $b+q$ , и  $b$

тогда, чтобы такое было возможно  $q : x$ , но тогда  $b$  не  
взаимно просто с  $q$ . Из

Тогда, чтобы  $(a+b) : m$  и  $8ab : m$  нужно, чтобы

(задача):  $(a+b) : m$  и  $8 : m$ . Т.е.  $a$  и  $b$

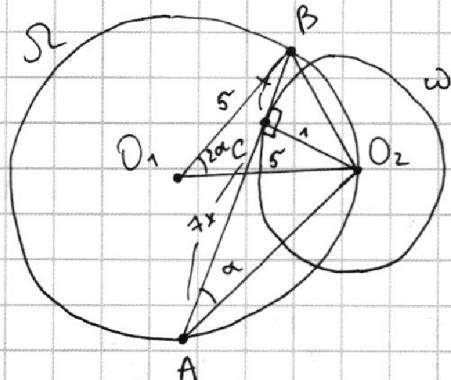
взаимно просты, то максимум одно из них чётко, но  
тогда  $a+b$  нечётна и  $m=1$ . Т.е. если брать  
 $a$  - нечётное и  $b$  нечётное, то  $a+b$  чётно и  
максимальное  $m=2$

Ответ: 2

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{3}$ 

1)  $\angle BAO_2 = \alpha$ ,  
тогда  $\angle BO_1O_2 = 2\alpha$ ,  
как центральный, опир.  
на ту же дугу.

2)  $O_2C \perp AB$ , т.к.  $O_2$  - радиус,  
а  $BA$  - касательная к  $\omega$

3) тогда в прямоугольном треугольнике  $\triangle ACO_2$ :  $\tan \alpha = \frac{1}{7x}$   
4) из т. косинусов в  $\triangle BO_1O_2$ :  $\cos 2\alpha = \frac{5^2 + 5^2 - BO_2^2}{2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{50 - BO_2^2}{50}$

$$BO_2 = \sqrt{1+x^2} \text{ - но т. Пифагора; } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{1 + \tan^2 \alpha} - 1 = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{7x}\right)^2} - 1 = \frac{2}{\frac{49x^2 + 1}{49x^2}} - 1 = \\ &= \frac{2 \cdot 49x^2}{49x^2 + 1} - 1 = \frac{49x^2 - 1}{49x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{50 - 1 - x^2}{50} = \frac{49x^2 - 1}{49x^2 + 1}; \quad (49 - x^2)(49x^2 + 1) = 50(49x^2 - 1)$$

$$49 \cdot (49x^2) - 49x^4 + 49 - x^2 = 50 \cdot (49x^2) - 50$$

$$-49x^4 + 99 - x^2 = 49x^2$$

$$x^2 = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49 =$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$= 2^2(625 + 99 \cdot 49) =$$

$$x^2 = \frac{-50 \pm \sqrt{198}}{2 \cdot 49} = \frac{-198}{2 \cdot 49} \text{ и } \frac{98}{2 \cdot 49} \quad (\Rightarrow)$$

$$= 2^2(625 + 4851) =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{198}{2 \cdot 49} < 0 & \text{некорректно} \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$= 2^2 \cdot 74^2$$

$$x = \pm 1$$

$$\boxed{x = 1}, \text{ т.к. } x > 0$$

$$\boxed{AB = 8x = 8}$$

$$\boxed{\text{Отв: 8}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x; \text{ обозначим } 2x^2 + 2x + 1 = p;$$

$$\sqrt{p+q} - \sqrt{p} = q$$

$$(2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 + 2 - 7x = p + q)$$

$$\sqrt{p+q} = q + \sqrt{p}$$

$$p+q = q^2 + 2q\sqrt{p} + p; \quad q^2 + 2q\sqrt{p} - q = 0;$$

$$q(q + 2\sqrt{p} - 1) = 0 \quad (\text{если } q > 0, \text{ то } q + 2\sqrt{p} > 1)$$

$$\begin{cases} q = 0 \\ 2\sqrt{p} = 1 - q \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 - 2 + 7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x \geq \frac{1}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{7}; \quad \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 7x - 1 \geq 0 \\ 4(2x^2 + 2x + 1) = (7x - 1)^2 \end{cases}$$

решим (1):

$$\begin{aligned} 8x^2 + 8x + 4 &= 49x^2 - 14x + 1 \\ 41x^2 - 22x - 3 &= 0 \\ D &= 22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 3 = \\ &= 2^2 (121 + 41 \cdot 3) = 2^2 \cdot 244 = \\ &= 4^2 \cdot 61 \end{aligned}$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 1 \end{cases} \quad + \begin{array}{c} - \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ \curvearrowright \end{array} \quad x$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &\geq 0 \\ \text{нпр } x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \\ \text{т.д. } x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \text{ и } x = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

поглощает

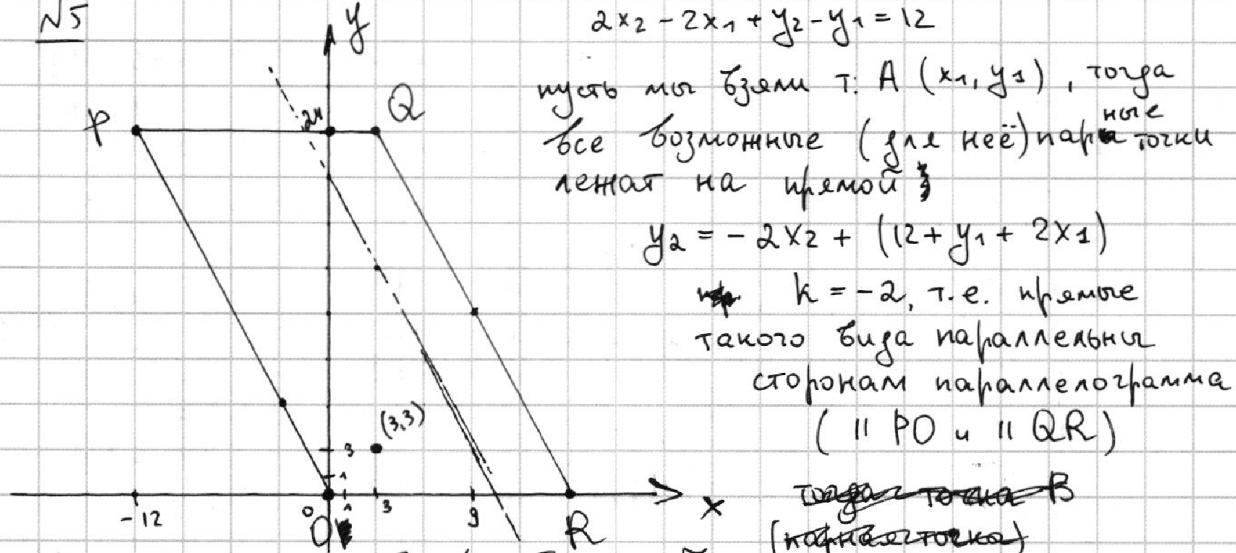


- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### II-ММ - параллелограмм

№5



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

пусть мы знаем т. А  $(x_1, y_1)$ , тогда все возможные (для неё) пары точек лежат на прямой  $y_2 = -2x_2 + (12 + y_1 + 2x_1)$

$k = -2$ , т.е. прямые такого вида параллельны сторонам параллелограмма ( $\parallel PO$  и  $\parallel QR$ )

~~тогда точки В  
(параллельные)~~

если бы ур-ние этой прямой подставить  $x_2 = x_1$ , тогда получим, что  $y_2 = y_1 + 12$  всегда для точки с тем же искомом. Тогда для любой точки легко построить прямую где парных точек: ~~здесь~~ (поскольку имеем т. А  $(x_1, y_1)$ ) прямая проходит через т.  $(x_1, y_1 + 12)$  и имеет  $k = -2$  (на рис. отмечена прямая где А  $(3, 3)$ ). Тогда если перебрать все целочисленные точки в параллелограмме, то можно посчитать кол-во пар.

Заметим, что на прямой такого вида, заключённой в II-мme 13 целочисленных точек, тогда для каждой точки на такой прямой существует 13 парных "справа" (если будем брать всегда только парные "справа", то получаем каждую пару ровно 1 раз), а последние прямые, чтобы пары "справа" были в II-мme проходят через т.  $(9; 0)$ , т.е. всего прямых с точками А  $(x_1, y_1)$  ~~всего~~ 10

исходное количество пар

Ответ: 1690

1690

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (усложнение)

$$\begin{cases} D_1 = 400a^2b^2 - 4(100b^2 - 4)(a^2 + 1) = 0 \\ D_2 = 400a^2b^2 + 256 - 32 \cdot 20ab - 4(100b^2 + 63)(a^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400a^2b^2 - 4(100a^2b^2 + 100b^2 - 4a^2 - 4) = 0 \\ 400a^2b^2 + 256 - 640ab - 4(100a^2b^2 + 100b^2 + 63a^2 + 63) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a^2 + 16 - 400b^2 = 0 \\ 256 - 640ab - 400b^2 - 252a^2 - 252 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{640ab} \quad 20b = \pm \sqrt{16a^2 + 16} = \pm 4\sqrt{a^2 + 1} \\ 400b^2 + 640a \cdot b + (252a^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20b = \pm 4\sqrt{a^2 + 1} \\ 20b = \frac{-32a \pm \sqrt{32^2a^2 - 4 \cdot (252a^2 - 4)}}{2} = \frac{-32a \pm 4\sqrt{a^2 + 1}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20b = \pm 4\sqrt{a^2 + 1} \\ 20b = -16a \pm 2\sqrt{a^2 + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\sqrt{a^2 + 1} = -16a + 2\sqrt{a^2 + 1} \\ -4\sqrt{a^2 + 1} = -16a + 2\sqrt{a^2 + 1} \\ 4\sqrt{a^2 + 1} = -16a - 2\sqrt{a^2 + 1} \\ -4\sqrt{a^2 + 1} = -16a - 2\sqrt{a^2 + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = \cancel{16a}, \quad a \leq 0 \\ ga^2 + g = 64a^2, \quad a \cancel{\geq 0} \geq 0 \\ ga^2 + g = 64a^2, \quad a \leq 0 \\ a^2 + 1 = 64a^2, \quad a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{16a} = -4\sqrt{a^2 + 1} \\ -8\sqrt{a^2 + 1} = -16a \\ 3\cancel{16a} = -4\sqrt{a^2 + 1} \\ -2\sqrt{a^2 + 1} = -16a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{16a} = 1/63, \quad a \leq 0 \\ a^2 = 1/63, \quad a \geq 0 \\ a^2 = 9/55, \quad a \leq 0 \\ a^2 = 9/55, \quad a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} \pm \frac{1}{3\sqrt{7}} \\ a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \end{cases}$$

~~Все эти~~  $\pm \frac{1}{\sqrt{63}} \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$

~~(Одно из:~~  $\pm \frac{1}{3\sqrt{7}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$ )



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6

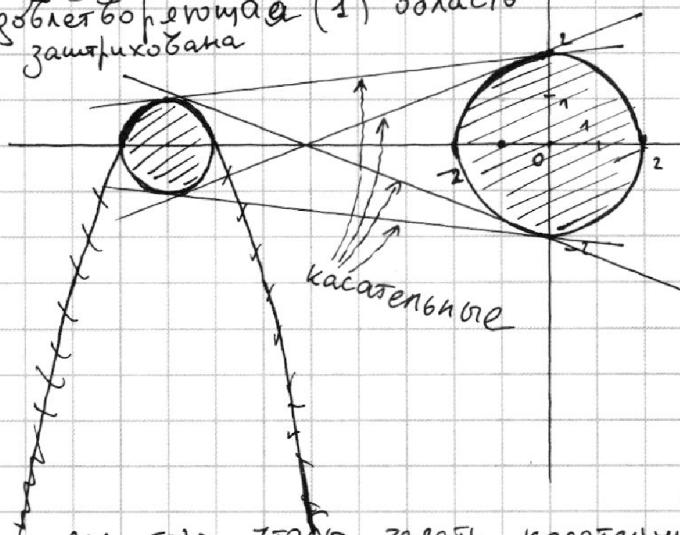
$$\begin{cases} ax - y + 106 = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 106 \\ x^2 + y^2 \geq 2^2 \\ y^2 \leq -(x+8)^2 + 1 \\ x^2 + y^2 \leq 2^2 \\ y^2 \geq -(x+8)^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 106 \\ x^2 + y^2 \geq 2^2 \\ y^2 + (x+8)^2 \leq 1^2 \\ x^2 + y^2 \leq 2^2 \\ y^2 + (x+8)^2 \geq 1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 106 \\ x^2 + y^2 \leq 2^2 \\ y^2 + (x+8)^2 \leq 1^2 \quad (1) \end{cases}$$

Удобнее решать (1) область  
заштрихована



Надо решить, чтобы задать касательную:

$$\begin{cases} y = ax + 106 \\ x^2 + y^2 = 2^2 \\ y^2 + (x+8)^2 \leq 1^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + a^2 x^2 + 2ax + 1006^2 = 4 \\ & x^2 + 16x + 64 + a^2 x^2 + 2ax + 1006^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2(a^2 + 1) + x(2a + 16) + (1006^2 - 4) = 0 \\ & x^2(a^2 + 1) + x(16 + 2ax) + (1006^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Будем решать графически:

1.  $y = ax + 106$  — прямая

пересекающая с осью  $x$  в  $(0, 106)$

2.  $x^2 + y^2 = 2^2$  — окружность с

центром  $O(0, 0)$  и  
радиусом 2

$x^2 + y^2 = 2^2$  —

окружность с центром  $O(0, 0)$

с радиусом 2

и  $y^2 \leq 1^2$

3.  $(x+8)^2 + (y^2) = 1^2$  —  
окружность с центром  $(-8, 0)$  и радиусом 1

Таким образом, ~~нужна одна~~ ~~одна~~ ~~окружность~~ ~~касательная~~  
вне внешние и  
вне внутренние общие  
касательные к окр-стям

~~изображение системы~~  
~~относительно оси~~  
~~то достаточно найти~~  
 ~~$k=a$  для одной внешней~~  
~~и одной внутренней~~  
~~касательной~~  
~~а т.к. же~~  
~~этих это~~  
~~касательных~~

(п.е)  $\Rightarrow x=0 \quad y=106$

$$\begin{cases} x^2 + a^2 x^2 + 2ax + 1006^2 = 4 \\ x^2 + 16x + 64 + a^2 x^2 + 2ax + 1006^2 = 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

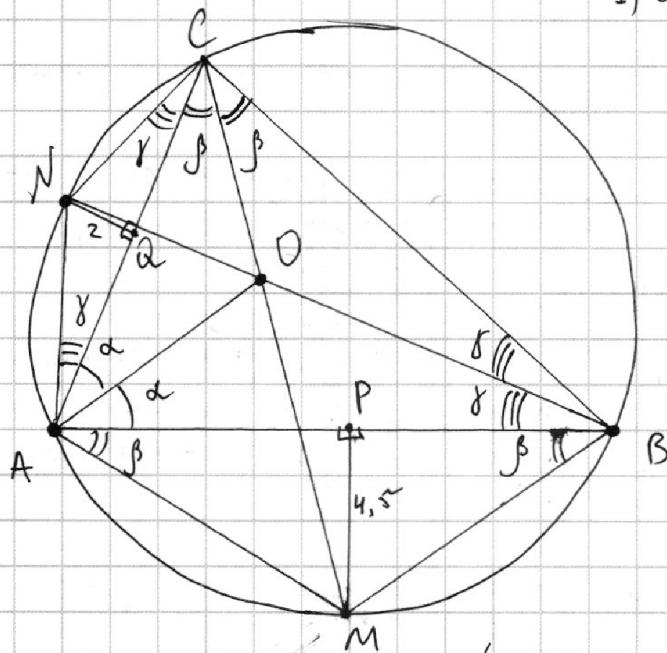
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N  
4



1) CM - биссектриса  $\angle ACB$ , т.а.

$\angle AM = \angle MB$ , аналогично  
 $BN$  - биссектриса  $\angle CAB$ ,

$AO$  - биссектриса  $\angle CAB$ ,  
т.к. проходит через  
точку пересечения 2-х  
биссектрис  $\alpha$ -ка.

2) Тогда, пользуясь  
тем, что вписанные  
углы, опирающиеся  
на одну дугу равны,  
отметим углы  
как на чертеже.

3) Тогда  $AO$  - искомое расстояние

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$(a+b) = km$$

$$\frac{8ab}{(a+b)^2 - 8ab} \\ 8ab : m \\ (a+b) m$$

~~a+b~~ a - лет б - лет

a+b лет

3 14

14

3 16 19

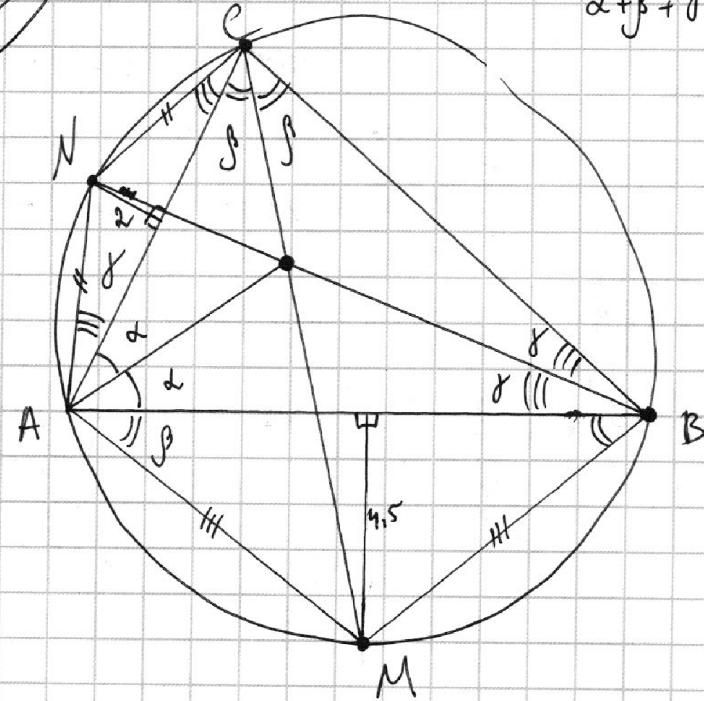
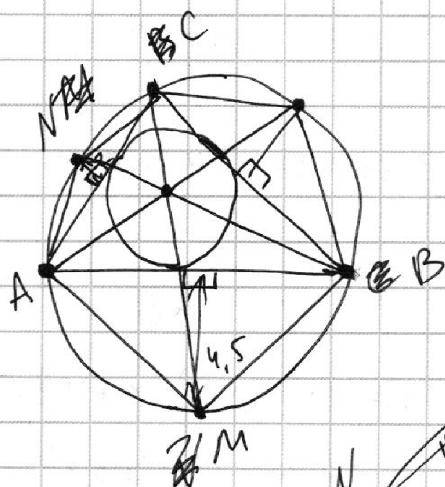
~~3 16 19~~

$$3 + 3 \cdot 6 = 3 \cdot 7$$

~~5~~ 22 27

3

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(64^2 p^2 - 6400 p + 50^2)(49 p^2 + 50 p + 1) = 50^2 (1 - 14 p + 49 p^2)$$

$$64^2 p^2 \cdot 49 p^2 - 64^2 \cdot 50 p^3 + 64^2 p^2 - 6400 \cdot 49 p^3 - 50 \cdot 6400 p^3 - 6400 p^2 + 50^2 \cdot 49 p^2 + 50^3 p + 50^2 = 50^2 - 50^2 \cdot 14 p + 50^2 \cdot 49 p^2$$

$$\left( \text{tg} \alpha = \frac{1}{7x} \right) = x$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{64}{\cancel{5780}} - 1 = 0$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{7x}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 =$$

$$= \cancel{\alpha} \frac{1/2}{\cancel{49x^2}} - 1 = \frac{50 - 1 - x^2}{50}$$

$$\frac{2 \cdot 49x^2}{1 + 49x^2} - 1 = \frac{50 - 1 - x^2}{50}$$
$$\frac{2 \cdot 49x^2 - 1 - 49x^2}{1 + 49x^2} = \frac{49 - x^2}{50}$$

$$50(49x^2 - 1) = (49 - x^2)(1 + 49x^2)$$

$$50 \cdot 49x^2 - 50 = 49 + 49^2 x^2 - x^2 - 49x^4$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ 8 5 \\ 3 9 6 \\ \times 1 4 9 \\ \hline 1 5 8 4 \\ + 1 5 8 4 \\ \hline 1 9 4 0 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9 4 0 4 \\ + 2 5 0 0 \\ \hline 2 1 9 0 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9 8 5 1 \\ + 6 2 5 \\ \hline 5 4 7 6 \end{array}$$

$$\cancel{49x^2} - \cancel{99} - 49x^4 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\mathcal{D} = 2500 + 99 \cdot 4 \cdot 49$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ 99 \\ 1 \\ \times 49 \\ \hline 1891 \\ + 396 \\ \hline 4851 \\ + 518 \\ \hline 5476 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(4) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\cancel{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 7x} = 2 + \cancel{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 49x^2 + 14x\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 4 + 2x^2 + 2x + 1 + 4\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$4 - 3 \cdot 2 \cdot 4 < 0$$

$$25 - 2 \cdot 4 \cdot 3 =$$

$$= 1$$

$$45x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 45 = 45 = p+q = q^2 + p + 2q\sqrt{p} \Rightarrow q(q+2\sqrt{p}-1) = 0$$

$$= 2^2(11^2 + 3 \cdot 45) = 11^2 + 13^2 = q = 0 \quad q = 1 - 2\sqrt{p}$$

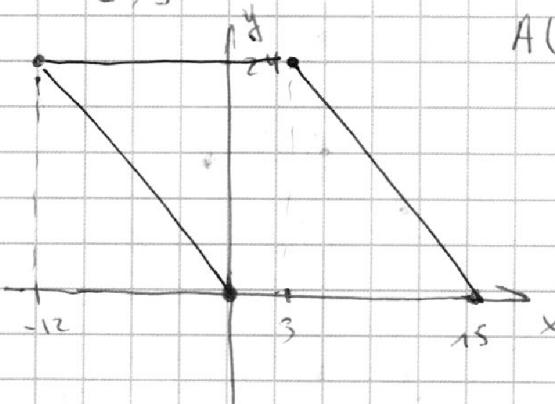
$$= 32^2$$

$$x = \frac{22 \pm 32}{45} = \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$2 - 7x = 0 \quad 2x^2 + 2x + 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x = \frac{2}{7} \quad 49x^2 - 14x + 1 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x > \frac{1}{4} \\ 49x^2 - 14x + 1 = 4x^2 + 8x + 4 \end{cases}$$



A(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>)

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$y_2 = -2x_2 + (12 + y_1 + 2x_1)$$

$$\begin{matrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ \times & 9 \\ \hline 12 & 9 & 6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 32^2 a^2 - 1008 a^2 + 1000 \\ 16 \\ 1024 a^2 \\ - 16 a^2 + 16 \end{matrix}$$

$$a = 2^{13} \cdot 7^{10} \quad b = 2^1 \quad c = 2^{17} \cdot 7^{27}$$

$$(6) \quad \begin{cases} y = ax + 106 \\ x^2 + y^2 \geq a^2 \\ y^2 \leq -(x+8)^2 + 1 \\ x^2 + y^2 \leq 2 \\ y^2 \geq -(x-8)^2 + 1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad ab = 2^{14} 7^{10} \quad bc = 2^7 7^{17} \quad ac = 2^{30} 7^{37}$$

$$abc = 2^{30} 7^{37}$$

$$\sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + \frac{147}{49}} =$$

$$\textcircled{2} \quad x = \cancel{ab+bc}$$

$$\cancel{6(b+k+3)+c}$$

$$\frac{5+7}{5^2 + 6 \cdot 5 \cdot 7 + 7^2} = \frac{-12}{210 - 74} = \frac{-12}{136} = \frac{85}{49} =$$

$$\frac{3+4}{9 - 6 \cdot 3 \cdot 4 + 10} = \frac{7}{25 - 72} = \frac{7}{49} =$$

$$\frac{3+8}{9 - 6 \cdot 3 \cdot 8 + 64} = \frac{11}{73 - 144} = \frac{11}{71}; \quad \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} =$$

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \quad =$$

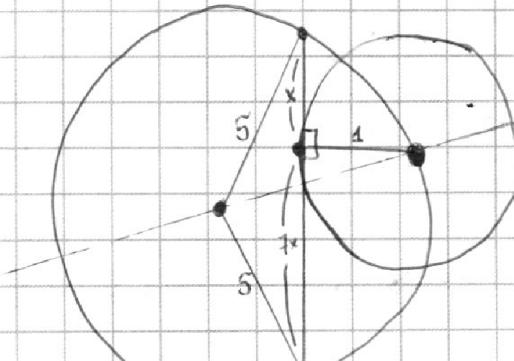
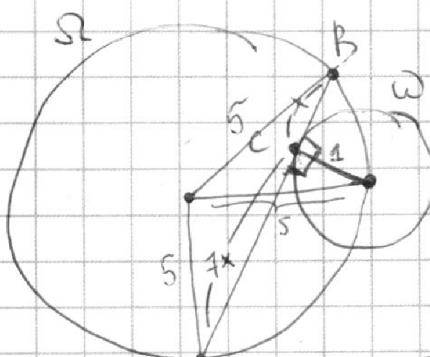
$$b = p_{n+1}^{a_{n+1}} p_{n+2}^{a_{n+2}} \cdots p_{2n}^{a_{2n}}$$

$$\frac{a+3}{4 - 6 \cdot 23 + 9} = \frac{5}{13 - 36} = \frac{5}{23} = \frac{8}{49} + \frac{4}{49} + \frac{45}{49} =$$

$$\frac{64p-50}{50} = \frac{1-7p}{\sqrt{(1+p)(1+49p)}} = \frac{a+b}{a+b} \sim \frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} =$$

$$\frac{64p^2-50}{50^2} = \frac{(1-7p)}{\sqrt{(1+p)(1+49p)}} a+b - \frac{8ab}{a+b}$$

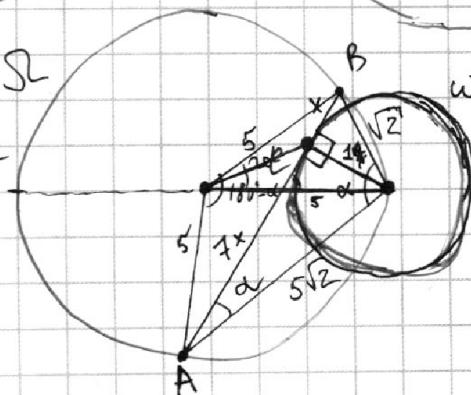
\textcircled{3}



$$\frac{64x^4 - 50}{50} =$$

$$= \frac{1 - 7x^4}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+49x^2}} = k$$

$$\frac{64x^2 \sqrt{2} k}{50} = 16 \sqrt{2} x^2$$



$$-\cos \alpha = \frac{50 - 64x^2}{50}$$

$$\cos \alpha = \frac{64x^2 - 50}{50}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 + x^2 + 49x^2 + 1 - 64x^2}{2 \sqrt{1+x^2} \sqrt{1+49x^2}} =$$

$$= \frac{1 - 7x^2}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+49x^2}}$$