МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab \vdots 2^{14}7^{10}$; $bc \vdots 2^{17}7^{17}$; $ac \vdots 2^{30}7^{37}$

Чтобы abc было минимальным нужно, чтобы ab, bc, ac были как можно меньше, тогда минимальное $ab = 2^{14}7^{10}$; мин. $bc = 2^{17}7^{17}$; $ac = 2^{30}7^{37}$, но тогда $\underbrace{ab \cdot bc}_{= 2^{31}\cdot 7^{27}} \not\vdots\ ac = 2^{30}7^{37}$, что нелогично

тогда возьмём ~~abc~~ $ac = 2^{30}\cdot 7^{37}$; $b = 2^1$, тогда
$a = 2^{13}7^{10}$ $c = 2^{17}\cdot 7^{27}$, т.е. $ab = 2^{14}\cdot 7^{10} \vdots 2^{14}7^{10}$ и минимально

~~bc~~ $ac = 2^{30}\cdot 7^{37} \vdots 2^{30}\cdot 7^{37}$ и минимально,

$bc = 2^{18}\cdot 7^{27} \vdots 2^{17}\cdot 7^{17}$ и является частью минимального ответа, т.к. ab и ac минимальны

$\boxed{\text{Ответ: } abc = 2^{31}\cdot 7^{37}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

$\frac{a}{b}$ несократима значит, что a и b взаимнопросты.

тогда $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$, чтобы мы могли сократить

эту дробь на m, и числитель и знаменатель должны делиться на m: $\boxed{(a+b) \vdots m}$; $((a+b)^2-8ab) \vdots m$,

т.е. (т.к. $(a+b) \vdots m$) $\boxed{8ab \vdots m}$

Рассмотрим взаимнопростые p и q, тогда $p+q$ взаимнопросто и с p, и с q: Док-во: пусть $p+q$ не взаимнопросто с p, тогда $p+q = \underbrace{x}_{\text{делитель и } p+q, \text{ и } p} \cdot y$; $p = x \cdot z$, тогда $x \cdot z + q = x \cdot y$,

тогда, чтобы такое выполнялось $q \vdots x$, но тогда p не взаимнопросто с q. W. ~~что~~

Тогда, чтобы $(a+b) \vdots m$ и $8ab \vdots m$ нужно, чтобы

$(a+b) \vdots m$ и $8 \vdots m$. Т.к. a и b взаимнопросты, то максимум одно из них чётно, но тогда $a+b$ нечётна и $m=1$. Т.е. если выбрать a - нечётное и b нечётное, то $a+b$ чётно и максимальное $\underline{m=2}$

Ответ: 2

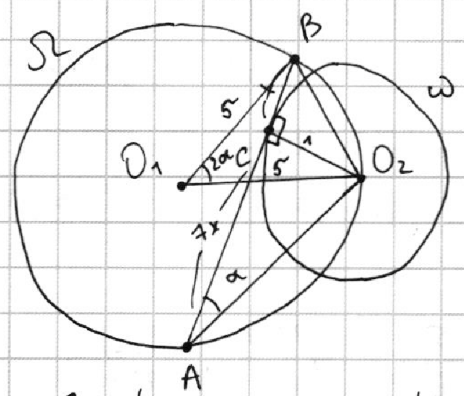
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3☒ 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3



1) пусть $\angle BAO_2 = \alpha$,

тогда $\angle BO_1O_2 = 2\alpha$,

как центральный, опир. на ту же дугу.

2) $O_2C \perp AB$, т.к. CO_2 - радиус, а BA - касательная к ω

3) тогда в прямоугольном треугольнике $\triangle ACO_2$: $tg\,\alpha = \frac{1}{7x}$

4) из т. косинусов в $\triangle BO_1O_2$: $\cos 2\alpha = \frac{5^2+5^2-BO_2^2}{2\cdot5\cdot5} = \frac{50-BO_2^2}{50}$

$BO_2 = \sqrt{1+x^2}$ - по т. Пифагора; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =$

$$= \frac{2}{1+tg^2\alpha} - 1 = \frac{2}{1+\left(\frac{1}{7x}\right)^2} - 1 = \frac{2}{\frac{49x^2+1}{49x^2}} - 1 =$$

$$= \frac{2\cdot49x^2}{49x^2+1} - 1 = \frac{49x^2-1}{49x^2+1}$$

$$\frac{50-1-x^2}{50} = \frac{49x^2-1}{49x^2+1}; \quad (49-x^2)(49x^2+1) = 50(49x^2-1)$$

$$49\cdot(49x^2) - 49x^4 + 49 - x^2 = 50\cdot(49x^2) - 50$$

$$-49x^4 + 99 - x^2 = 49x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$D = 2500 + 4\cdot99\cdot49 = 2^2(625+99\cdot49) = 2^2(625+4851) = 2^2\cdot74^2$

$$x^2 = \frac{-50\pm148}{2\cdot49} = \left[\begin{array}{l}\frac{-198}{2\cdot49} \\ \frac{98}{2\cdot49}\end{array}\right. = \left[\begin{array}{l}-\frac{198}{2\cdot49} < 0 \text{ — не подходит} \\ 1\end{array}\right.$$

$\boxed{x^2 = 1}$ $x = \pm1$ $\boxed{x = 1}$, т.к. $x > 0$

$\boxed{AB = 8x = 8}$

$\boxed{\text{Ответ: } 8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$; обозначим $2x^2+2x+1=p$;

$2-7x=q$, тогда

$\sqrt{p+q}-\sqrt{p}=q$ $\quad (2x^2-5x+3=2x^2+2x+1+2-7x=p+q)$

$\sqrt{p+q}=q+\sqrt{p}$ $\quad$ ($2x^2+2x+1>0$ $\forall x$, т.к. $D<0$ и $a>0$) (т.е. $p>0$ всегда)

$p+q=q^2+2q\sqrt{p}+p$; $\qquad q^2+2q\sqrt{p}-q=0$;

$q(q+2\sqrt{p}-1)=0$ ~~[illegible]~~

$\left[\begin{array}{l} q=0 \\ 2\sqrt{p}=1-q \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} 2-7x=0 \\ 2\sqrt{2x^2+2x+1}=1-2+7x \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{7} \\ \begin{cases} 7x-1\geq 0 \\ 4(2x^2+2x+1)=(7x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{7} \\ \begin{cases} x\geq\frac{1}{7} \\ 8x^2+8x+4=49x^2-14x+1 \quad (1) \end{cases} \end{array}\right.$

решим (1):

$8x^2+8x+4=49x^2-14x+1$

$41x^2-22x-3=0$

$D=22^2+4\cdot 41\cdot 3=$

$=2^2(121+41\cdot 3)=2^2\cdot 244=$

$=4^2\cdot 61$

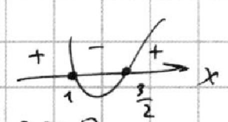
$x=\dfrac{22\pm 4\sqrt{61}}{2\cdot 41}=\dfrac{11\pm 2\sqrt{61}}{41}$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{7} \\ \begin{cases} x\geq\frac{1}{7} \\ x=\frac{11\pm 2\sqrt{61}}{41} \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{7} \\ x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right.$

$2x^2-5x+3=0$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$



$2x^2-5x+3\geq 0$

при $x\in(-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};+\infty)$

т.е. $x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ и $x=\frac{2}{7}$ подходят

Ответ: $\frac{2}{7}$; $\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

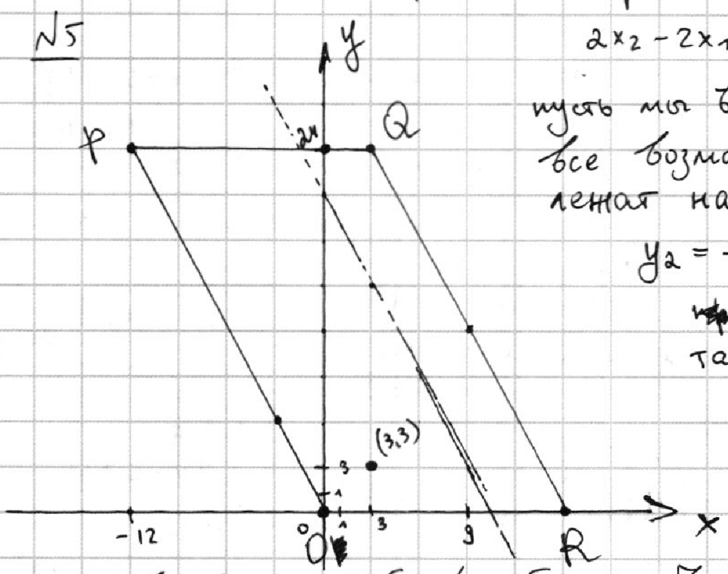
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

∥-мм – параллелограмм

№5



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

пусть мы взяли т. $A\,(x_1, y_1)$, тогда все возможные (для неё) парные точки лежат на прямой:

$$y_2 = -2x_2 + (12 + y_1 + 2x_1)$$

$k = -2$, т.е. прямые такого вида параллельны сторонам параллелограмма (∥ PO и ∥ QR)

~~Тогда точка B (парная точка)~~

если в ур-ние этой прямой подставить $x_2 = x_1$, тогда поймём, что $y_2 = y_1 + 12$ всегда для точки с тем же иксом. Тогда для любой точки легко построить прямую для парных точек: (пусть имеем т. $A(x_1, y_1)$) прямая проходит через т. (x_1, y_1+12) и имеет $k = -2$ (на рис. отмечена прямая для $A(3,3)$). Тогда если перебрать все целочисленные точки в параллелограмме, то можно посчитать кол-во пар.

Заметим, что на прямой такого вида, заключённой в ∥-мме 13 целочисленных точек, тогда для каждой точки на такой прямой существует 13 парных „справа" (если будем брать всегда только парные „справа", то подсчитаем каждую пару ровно 1 раз), а последняя прямая, чтобы пара „справа" была в ∥-мме проходит через т. $(9; 0)$, т.е. всего прямых с точками $A(x_1, y_1)$ 10

исходное количество пар $10 \cdot 13 \cdot 13 = 1690$

$\boxed{\text{Ответ: } 1690}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

$$\begin{cases} D_1 = 400a^2b^2 - 4(100b^2-4)(a^2+1) = 0 \\ D_2 = 400a^2b^2 + 256 - 32\cdot 20ab - 4(100b^2+63)(a^2+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{400a^2b^2} - 4(\cancel{100a^2b^2} + 100b^2 - 4a^2 - 4) = 0 \\ \cancel{400a^2b^2} + 256 - 640ab - 4(\cancel{100a^2b^2} + 100b^2 + 63a^2 + 63) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a^2+16-400b^2 = 0 \\ 256 - 640ab - 400b^2 - 252a^2 - 252 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20b = \pm\sqrt{16a^2+16} = \pm 4\sqrt{a^2+1} \\ 400b^2 + 640a\cdot b + (252a^2-4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20b = \pm 4\sqrt{a^2+1} \\ 20b = \dfrac{-32a \pm \sqrt{32^2a^2 - 4\cdot(252a^2-4)}}{2} = \dfrac{-32a \pm 4\sqrt{a^2+1}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20b = \pm 4\sqrt{a^2+1} \\ 20b = -16a \pm 2\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sqrt{a^2+1} = -16a + 2\sqrt{a^2+1} \\ -4\sqrt{a^2+1} = -16a + 2\sqrt{a^2+1} \\ 4\sqrt{a^2+1} = -16a - 2\sqrt{a^2+1} \\ -4\sqrt{a^2+1} = -16a - 2\sqrt{a^2+1} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2+1} = -8a \\ -3\sqrt{a^2+1} = -8a \\ 3\sqrt{a^2+1} = -8a \\ -\sqrt{a^2+1} = -8a \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2+1 = 64a^2,\ a \le 0 \\ 9a^2+9 = 64a^2,\ a \ge 0 \\ 9a^2+9 = 64a^2,\ a \le 0 \\ a^2+1 = 64a^2,\ a \ge 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a^2 = 1/63,\ a \le 0 \\ a^2 = 1/63,\ a \ge 0 \\ a^2 = 9/55,\ a \le 0 \\ a^2 = 9/55,\ a \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \pm\dfrac{1}{3\sqrt7} \\ a = \pm\dfrac{3}{\sqrt{55}} \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Ответ: } \pm\dfrac{1}{3\sqrt7};\ \pm\dfrac{3}{\sqrt{55}}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2 \ge 2^2 \\ y^2 \le -(x+8)^2 + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \le 2^2 \\ y^2 \ge -(x+8)^2+1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2 \ge 2^2 \\ y^2 + (x+8)^2 \le 1^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \le 2^2 \\ y^2 + (x+8)^2 \ge 1^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2 \le 2^2 \\ y^2 + (x+8)^2 \le 1^2 \end{array}\right. \quad (1) \end{cases}$$

удовлетворяющая (1) область заштрихована

будем решать графически:

1. $y = ax + 10b$ – прямая пересекающая с $k = a$ оу в т. $(0; 10b)$

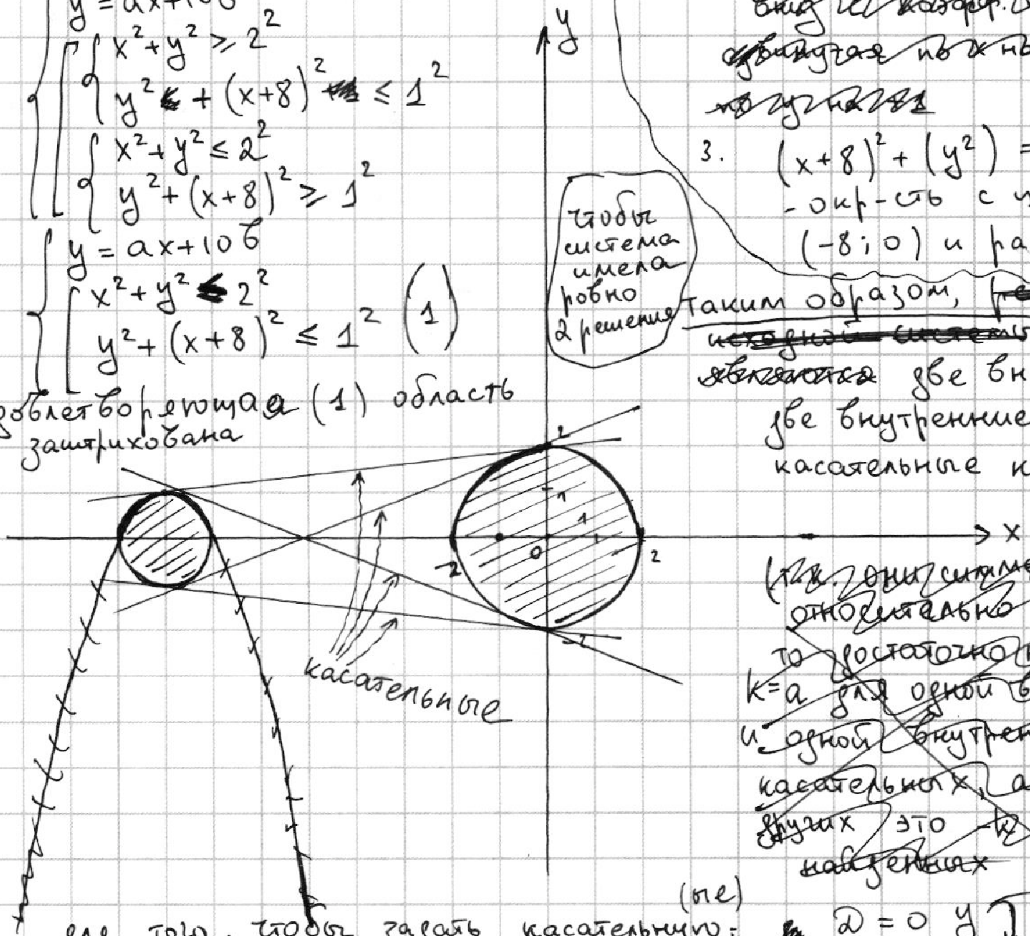
2. $x^2+y^2 = 2^2$ – окр-сть с ц-ром в $(0,0)$ и радиусом 2

~~$y^2 = -(x+8)^2 + 1$ – парабола ветвями вниз с коэф. при $x^2 = -1$ сдвинутая по x на 8 влево~~

3. $(x+8)^2 + (y^2) = 1^2$ – окр-сть с ц. в т. $(-8; 0)$ и радиусом 1

чтобы система имела ровно 2 решения

Таким образом, ~~решением исходной системы являются~~ нужны две внешние и две внутренние общие касательные к окр-стям



~~(т.к. они симметричны относительно ох, то достаточно найти k=a для одной внешней и одной внутренней касательных, а k для других это -k для найденных~~

для того, чтобы задать касательную(ые): $D = 0$ у

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2^2 \\ y^2 + (x+8)^2 = 1^2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 4 \\ x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2(a^2+1) + x \cdot 20ab + (100b^2 - 4) = 0 \\ x^2(a^2+1) + x(16 + 20ab) + (100b^2 + 63) = 0 \end{array}\right.$$

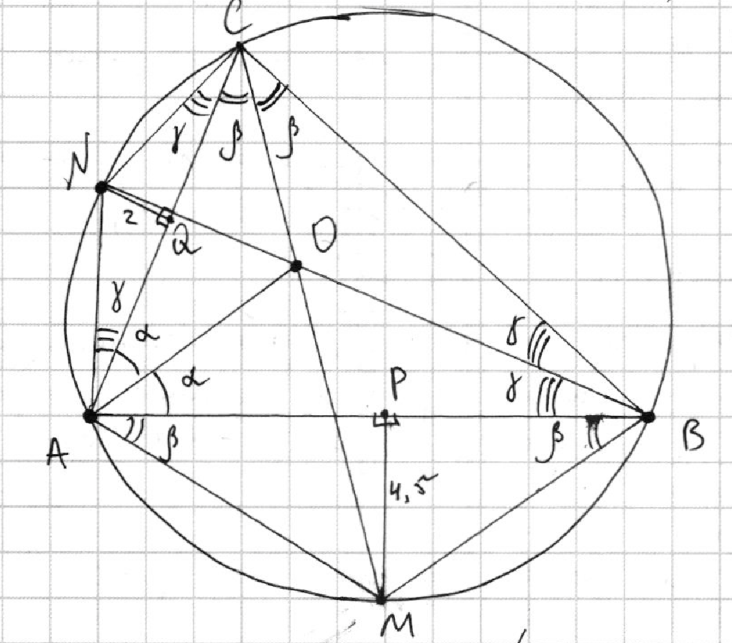
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7



1) CM – биссектриса $\angle ACB$, т.к. $\cup AM = \cup MB$, аналогично BN – биссектриса $\angle CBA$, AO – биссектриса $\angle CAB$, т.к. проходит через точку пересечения 2-х биссектрис Δ-ка.

2) Тогда, пользуясь тем, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу равны, отметим углы как на чертеже.

3) Тогда AO – искомое расстояние

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$(a+b)=km$

$\cancel{k^2m^2-8ab}$

$8ab \vdots m$

$(a+b) \vdots m$

$a \wedge b$

a - чет b - нечет

a + b нечет

3 14 17

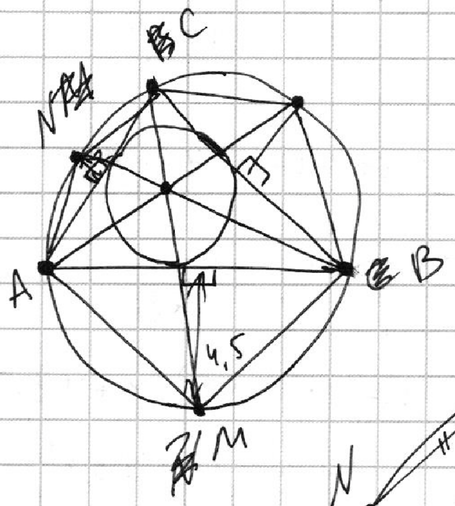
3 16 19

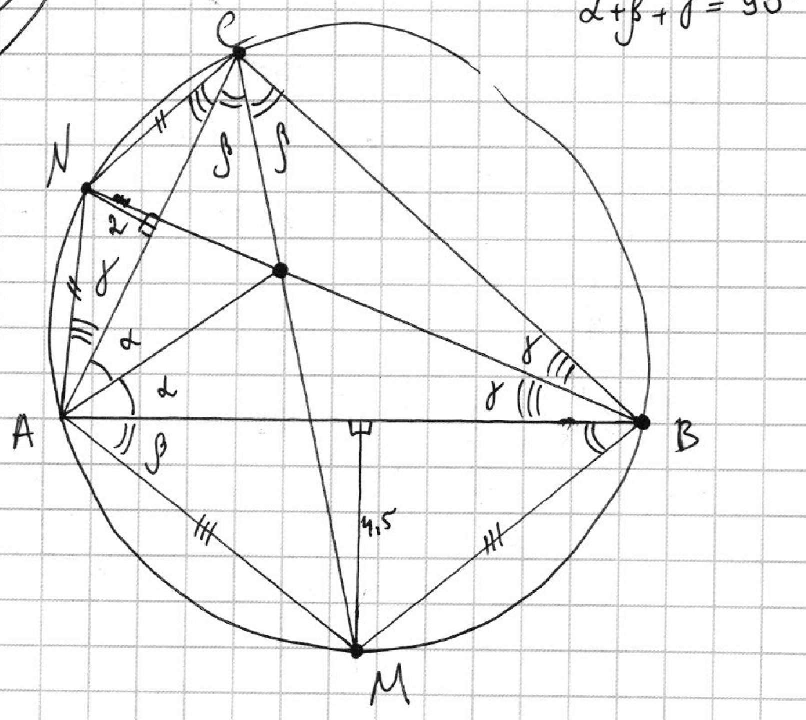
$3+3\cdot 6=3\cdot 7$

5 22 27

3

$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(64^2p^2 - 6400p + 50^2)(49p^2 + 50p + 1) = 50^2(1 - 14p + 49p^2)$

$64^2p^2 \cdot 49p^2 - 64^2 \cdot 50p^3 + 64^2p^2 - 6400 \cdot 49p^3 - 50 \cdot 6400p^2 - 6400p +$

$+ \cancel{50^2 \cdot 49p^2} + 50^3p + \cancel{50^2} = \cancel{50^2} - 50^2 \cdot 14p + \cancel{50^2 \cdot 49p^2}$

$\boxed{tg\alpha = \frac{1}{7x}} = x$

$x = \frac{1}{\sqrt{7}}$

$\frac{64}{7} \cancel{\cdot 80}$ $\quad \frac{64}{350} - 1 = 0$

$tg\alpha = \frac{1}{7x}$ $\quad$ $\cancel{\cos 2\alpha}$ $\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =$

$= \cancel{2}\, \frac{2}{\frac{\cancel{49x^2+1}}{49x^2}} - 1 = \frac{50 - 1 - x^2}{50}$

$\frac{2 \cdot 49x^2}{1 + 49x^2} - 1 = \cancel{50} \quad \frac{49 - x^2}{50}$

$\frac{2 \cdot 49x^2 - 1 - 49x^2}{1 + 49x^2} = \frac{49 - x^2}{50}$

$50(49x^2 - 1) = (49 - x^2)(1 + 49x^2)$

$50 \cdot 49x^2 - 50 = 49 + 49^2x^2 - x^2 - 49x^4$

$\cancel{49x^2 = 99}$ $\quad 50x^2 - 99 + 49x^4 = 0$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$D = 2500 + 99 \cdot 4 \cdot 49$

$$\begin{array}{r} 396 \\ \times\ 49 \\ \hline 3564 \\ +1584\ \ \\ \hline 19404 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19404 \\ +\ 2500 \\ \hline 21904 \end{array} \qquad 98 \qquad \begin{array}{r} 99 \\ \times 49 \\ \hline 891 \\ +396\ \ \\ \hline 4851 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74 \\ \times 74 \\ \hline 296 \\ +518\ \ \\ \hline 5476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4851 \\ +\ 625 \\ \hline 5476 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4) $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$4 - 3 \cdot 2 \cdot 4 < 0$

$25 - 2\cdot 4 \cdot 3 = 1$

$2x^2-5x+3+49x^2+14x\sqrt{2x^2-5x+3} = 4+2x^2+2x+1+4\sqrt{2x^2+2x+1}$

$\sqrt{p+q} - \sqrt{p} = q$

$x = \frac{5\pm 1}{4} = \left[\begin{array}{l} 3/2 \\ 1 \end{array}\right.$

$45x^2-22x-3=0$

$\sqrt{p+q} = q+\sqrt{p}$

$D = 22^2+4\cdot 3\cdot 45 = 2^2(11^2+3\cdot 45) = 2^2(121+135) = 32^2$

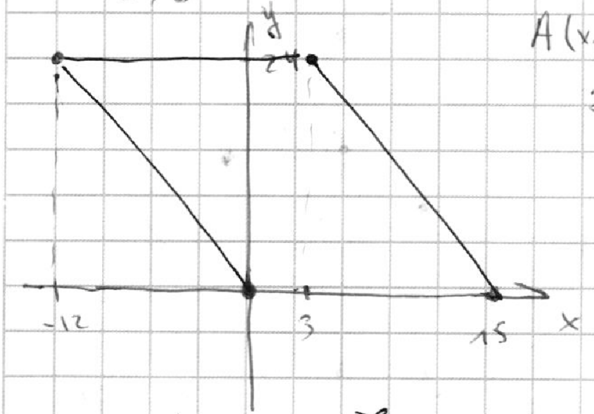
$p+q = q^2+p+2q\sqrt{p} \Longrightarrow q(q+2\sqrt{p}-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} q=0 \\ q = 1-2\sqrt{p} \end{array}\right.$ $\longrightarrow$

$x = \frac{22\pm 32}{45} = \left[\begin{array}{l} \frac{6}{5} \\ \cancel{-\frac{2}{9}} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2-7x=0 \\ 7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{7} \\ \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ 49x^2-14x+1 = 4x^2+8x+4 \end{cases} \end{array}\right.$



$A(x_1, y_1)$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$y_2 = -2x_2 + (12+y_1+2x_1)$

$144 \times 9 = 1296$

$32^2 a^2 - 1008a^2 + 16$

$1024a^2$

$16a^2+16$

$a = 2^{13}\cdot 7^{10}$ $b = 2^1$ $c = 2^{17}\cdot 7^{27}$

(6) $\begin{cases} y = ax+10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2 \geq 2^2 \\ y^2 \leq -(x+8)^2+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \leq 2 \\ y^2 \geq -(x-8)^2+1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

① $ab = 2^{14}7^{10}$ $bc = 2^{17}7^{17}$ $ac = 2^{30}7^{37}$ $\sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} =$

$\boxed{abc = 2^{30}7^{37}}$ $= \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + \frac{147}{49}} =$

② $\cancel{a = k\,b + c}$ $\frac{5+7}{5^2 - 6\cdot5\cdot7 + 7^2} = \frac{-12}{210-74} = \frac{-12}{} = \sqrt{\frac{85}{49}} =$

$\cancel{k\,b(k+1)+c}$

$\cancel{k^2b + 2kbc + c^2 b}$ $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ $=$

$b = p_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \cdot p_{n+2}^{\alpha_{n+2}} \dots p_{2n}^{\alpha_{2n}}$

$\frac{3+4}{9 - 6\cdot3\cdot4 + 16} = \frac{7}{25-72} = \frac{7}{47}$ $\frac{2+3}{4 - 6\cdot2\cdot3 + 9} = \frac{5}{13-36} = \frac{5}{23}$ $\frac{8}{49} + \frac{28}{49} + \frac{45}{49} =$

$=$

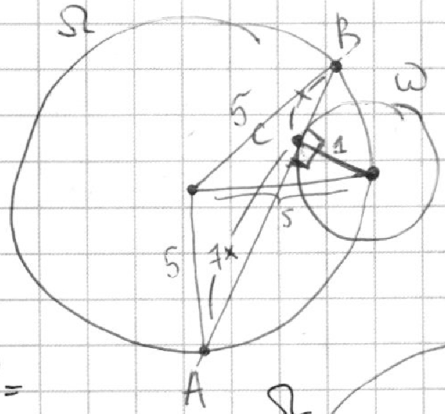
$\frac{3+8}{9 - 6\cdot3\cdot8 + 64} = \frac{11}{73-144} = \frac{11}{71};$ $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} =$

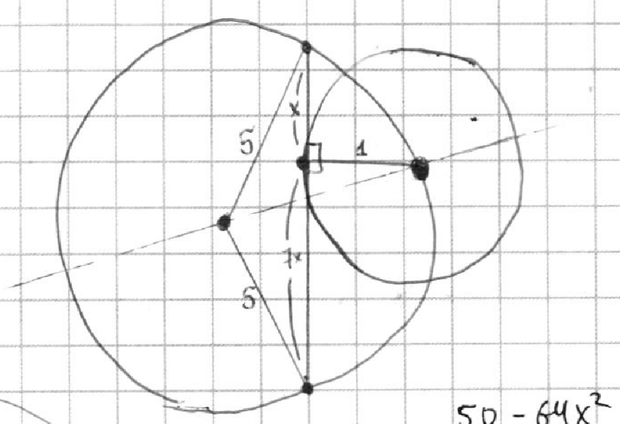
$\frac{64p-50}{50} = \frac{1-7p}{\sqrt{(1+p)(1+49p)}}$ $= \frac{a+b}{(a-b)^2 - 4ab} \sim \frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} =$

$\frac{(64p-50)^2}{50^2} = \frac{(1-7p)^2}{(1+p)(1+49p)}$ $a+b - \frac{8ab}{a+b}$

$\cancel{\cos 48}$

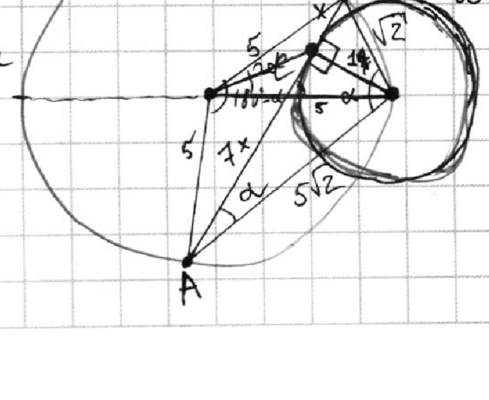
③





$\frac{64x^4-50}{50} =$

$= \frac{1 - 7x^4}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+49x^4}} = k$



$\cos\alpha = \frac{50-64x^2}{50}$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{64x^2-50}{50}}$

$\cos\alpha = \frac{1+x^2+49x^2+1-64x^2}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+49x^2}} =$

$\cancel{\frac{64x^2}{50}k - k = 1 - 7x^2}$

$= \frac{1-7x^2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+49x^2}}$