



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ab = 2^{14} \cdot y^{10} p$, $bc = 2^{18} \cdot y^{12} q$, $ac = 2^{20} \cdot y^{37} t$,

где $p, q, t \in N$, тогда

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot y^{64} p q t$$

И.к $a^2 b^2 c^2$ - наименьший квадрат, то его разложение
на простые множители входит в четной степени.

И.к степень вхождения 2 в $a^2 b^2 c^2$ хотя бы 51,
тогда степень вхождения должна быть хотя бы 52.

И.к 2 входит хотя бы в 52 степени,
а 2 - хотя бы 64, то 2 abc 2 входит хотя
бы в 26 степени, а 2 хотя бы в 32. Но ик
2 abc 2 входит хотя бы в 37 степени, то и
2 abc 2 входит хотя бы в 37 степени. Тогда
 $abc \geq 2^{26} \cdot y^{37}$ (ик для вхождения)

Пример. Если $a = 2^9 \cdot y^{10}$, $b = 2^5 \cdot y^5$, $c = 2^{12} \cdot y^{24}$,
то условие задачи выполняется и $abc = 2^{26} \cdot y^{35}$.

Ответ: $2^{26} \cdot y^{35}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Саша $\frac{a}{b}$ - несократим, то $(a; b) = 1$ (б) крупным скоб-
кам будем обозначать НОД чисел)

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = (a+b; a^2 - 6ab + b^2 - (a+b)^2) =$$
$$= (a+b; -8ab) = (a+b; 8ab)$$

Мы по алгоритму Евклида можем оставлять
меньшее число и сколько-то раз это делаем
из большего (мы берем $(a+b)$ раз число $(a+b)$)

Докажем, что $(a+b, ab) = 1$.

Предположим, что это не так, тогда пусть
 $ab : p$, $ab : p$, где p -простое число.

Тк $ab : p \Rightarrow a : p$ или $b : p$. Рассмотрим $500 : 9 : p$.

Тк $a : p$, $a+b : p$, то $b : p$, тогда $a : p$, $b : p$,
тогда $(a, b) \geq p$ - противоречие, тк $(a, b) = 1$.

Тогда наше предположение неверно, а верно, что
 ab и $(a+b)$ взаимопросты

Тогда $(a+b; 8ab) = (a+b; 8) \leq 8$. Т.е. $m \leq 8$

Пример Саша $a = 3$, $b = 5$, то $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{9 - 6 \cdot 15 + 25} = \frac{8}{56}$. Тогда $m = 8$.

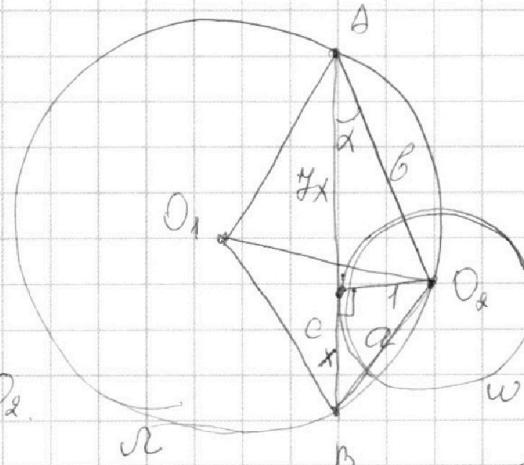
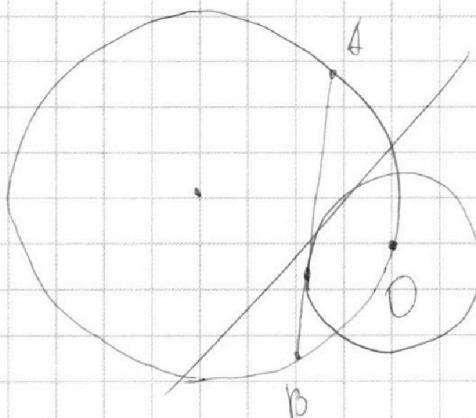
Ответ: 8.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Нужно найти центр окр w в O_2 .

Из $\triangle ABC$ - касательная к w и касается w в B , то

$$O_2C \perp AB, O_2C = 1.$$

Найдем $\angle O_2AB = \alpha$, $O_2B = a$, $O_2A = b$, тогда

$$BC = x, \text{ тогда } AC = 4x, \text{ тогда}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x \quad (\text{иск } S_{ABC} = \frac{1}{2} O_2C \cdot AB)$$

С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{4R}{ab \cdot 8x}$, где R -радиус

Описанной окружности $\triangle ABC$, т.е. $R = 5$.

Уз м-ны синусов $\triangle ABC$: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$

Из уз $\triangle ABC$: $\sin \alpha = \frac{1}{b}$, тогда $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = ab = 2R = 10$, т.е. $ab = 10$

Найдем $S_{ABC} = \frac{4 \cdot 5}{10 \cdot 8x} = \frac{1}{4x}$ или $S_{ABC} = 4x$, т.е.

$$\frac{1}{4x} = 4x \Leftrightarrow 16x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}. \text{ Из } AB = 8x, \text{ то}$$

$$AB = 2.$$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a$, $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b$, тогда

$$a - b = 2 - 7x.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty, 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2 = a - b$$

$$\text{Т.е. } a^2 - b^2 = a - b$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$1) \underline{a = b} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 7x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{7} \quad (\text{входит в ОДЗ})$$

$$2) \underline{a = 1 - b} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

И.к одеясти неизвестные не отрицательны то
можно возвести в квадрат равенство. Получаем

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x + 1$$

И.к одеясти неизвестные , возведем
равенство в квадрат, получим

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1 \Leftrightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0$$

Решим квадратное уравнение, получим $x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$,

$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$ которое входит в ОДЗ.

$$\text{Однако: } x_1 = -\frac{2}{8}, x_2 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}, x_3 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решаем, сколько пар А и В, если $x_1 = x_2$,
тогда если $x_1 = x_2 = 0$, то всего 80 пар,
если $x_1 = x_2 = 1$, то 10, если $x_1 = x_2 = 2$, то
9, и т.д. в этом случае
было 10 + 10 + 9 + 9 + \dots + 4 + 4 = 2(14 + \dots + 80) =
= 2 \cdot 49 = 58. И аналогично, если $y_1 = y_2$.

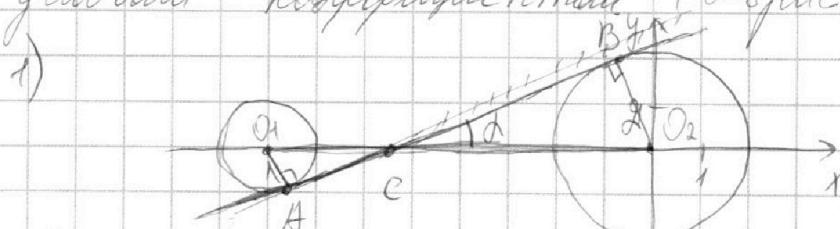
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пк решением 2-го ур-я является вся внутренняя
область окружности. Пк всего должно быть ровно
2 решения, то это возможно только, если прямая
касается первой и второй окружности одновре-
менно, т.е. является общей касательной.

У 2-х непересекающихся окружностей могут быть
 всего 4 общие касательные. Пк минимум четы-
рех окружностей лежат на прямой Ox , то
у 2-х из этих 4 общих касательных разделя-
ются на 2 пары, в каждой из которых каса-
тельные лежат противоположно по знаку, но
одинаково по модулю угловое квадрическим
и свободной член находятся угловое квадрическим
условиях касательных (см.рис.)



Отметили точки касания А и В, между пересече-
ния с осью Ox с (см.рис) лежат центры окр. O_1 и O_2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

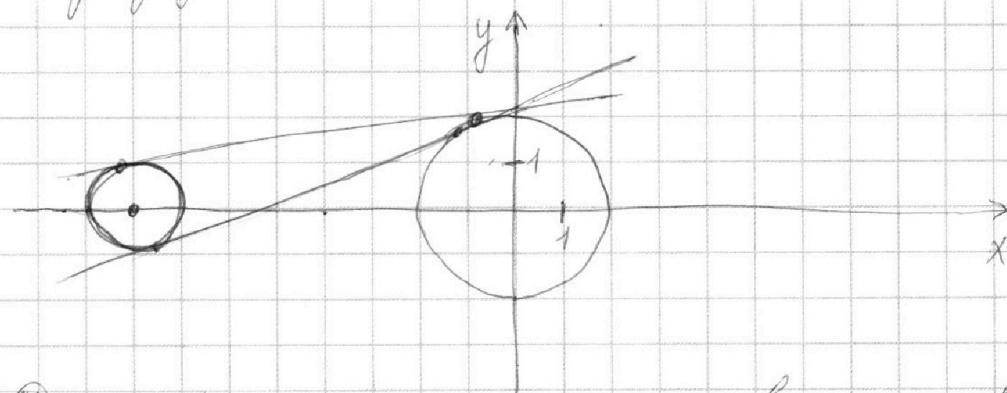
Решим задачу геометрически

Изобразим ур-е 2 на геометрике

Кападай из сюбок - это ур-е окружности.

Многа если бы мы знали радиуса, то геометрии
была бы совокупность двух окружностей с

радиусами с центрами в координатах $(-8; 0)$, $(0; 0)$
и радиусами r и $2r$ соответственно



Многа решения 2-го ур-я являются внутренние
области окружностей (шеста круглым точек)

Первое уравнение даёт прямую, где α - свободный
коэффициент прямой, $\omega\beta$ - свободные члены.

Сам прямая касается окружности, то она
образует решение, если не касает окружн
точек, то кем решает (с этой окружностью),
если пересекает, то образует бесконечно много решений,



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$O_1 A \perp AB, O_2 B \perp AB$$

Рассмотрим ур-е этой касательной $y = kx + t$, тогда
 $C\left(-\frac{t}{k}; 0\right)$

Найдем $CO_2 = \frac{|t|}{k}$, $CO_1 = 8 - \frac{|t|}{k}$. Рассмотрим угла наклона α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{8 - \frac{|t|}{k}} = \frac{2}{\frac{|t|}{k}} \Leftrightarrow \frac{|t|}{k} = 16 - 2 \cdot \frac{1}{k} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{|t|}{k} = 16$$

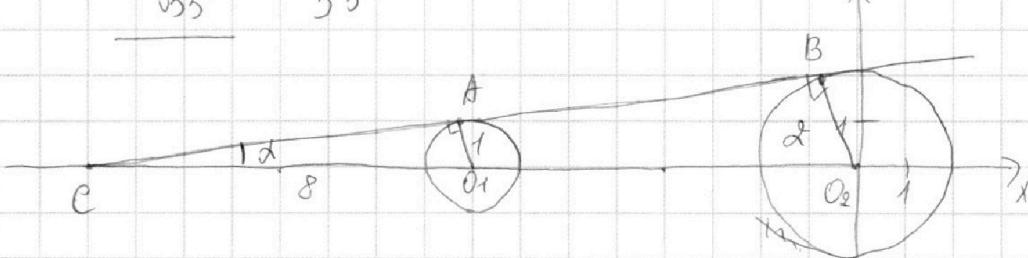
$$\Leftrightarrow \frac{|t|}{k} = \frac{16}{3}. \text{ Найдем } O_1 C = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

По т-ии Пифагора в $\triangle O_1 C$: $AC = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{И.з. } a_1 = \frac{\frac{9}{3}}{\sqrt{55}} = \frac{9\sqrt{55}}{55}.$$

2)



аналогично отметим точки касания A и B с

линейкой AB , которая пересекает ось Ox в точке C .

Найдем $O_1 C \approx 8$ и $O_2 C \approx 1$ с изогр. подобия $\frac{1}{2}$, тогда

$$O_1 C = \frac{1}{2} O_2 C \Leftrightarrow O_1 C = O_2 O_1 = 8$$

По т-ии Пифагора в $\triangle O_1 C$: $AC = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{55}$,

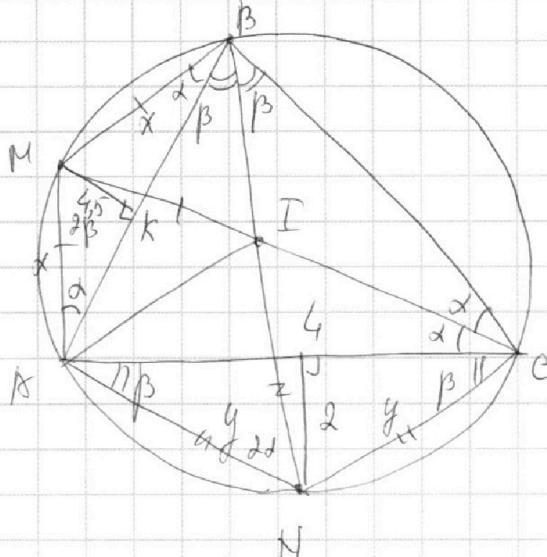
$$\text{найдем } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{55}}, \text{ т.е. } a_2 = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ! } a = \pm \frac{9}{\sqrt{55}}, \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{55}}.$$

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Як M - середина AB ,

N - середина AC , то

$MB = MA$, $NA = NC$, CM -

биссектр $\angle BCA$, BN - биссектр
 $\angle ABC$

Пусть $\angle ACM = \angle BCM = \lambda$, $\angle ABN = \angle CBN = \beta$

Уз вписан $\triangle AMB$ $\angle MBA = \angle MAB = \alpha$, уз

вписан $\triangle ABC$ $\angle CAN = \angle ACN = \beta$

Дакже $\angle AMB = 2\beta$, $\angle ANB = 2\alpha$

Русто $f(M; AB) = MK$, $f(N; AC) = NL$

Русто $AM = MB = x$, $AN = CN = y$

Уз пришоуг $\triangle AMK$ и $\triangle ANL$: $\sin \alpha = \frac{4,5}{x}$, $\sin \beta = \frac{2}{y}$

~~Дакже~~ $\angle CAM$ Русто енди $BN = 7$, могда I - центр вис \triangle

Уз лемма о түрзубде $MI = MA = MB$, $NI = AN = NC$.

Еп $\triangle AMI$ - равнод, то $\angle MAI = \angle MIA = 90^\circ - \alpha$; $\triangle AIN$ -равнод, то

т-шия синусов в $\triangle AIM$: $\frac{AI}{\sin 2\beta} = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta}$

$AI = \frac{x \cdot 2 \sin \beta \cos \beta}{\cos \alpha} = 2 \sin \beta \cdot x = 2x \cdot \frac{2}{y} = \frac{4y}{y} = 4$

Уз т-шия синусов в $\triangle AIN$: $\frac{AI}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{y}{\cos \alpha}$

$AI = \frac{y \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2y \cdot \sin \alpha = 2y \cdot \frac{4,5}{x} = 9 \frac{y}{x} (2)$

Уз (1) и (2): $4 \frac{x}{y} = 9 \frac{y}{x} \Rightarrow 4x^2 = 9y^2 \Rightarrow 2x = 3y$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$. Могда из (1) $AI = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$

Онбем: 6.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input type="checkbox"/> | 2
<input type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 **МФТИ**



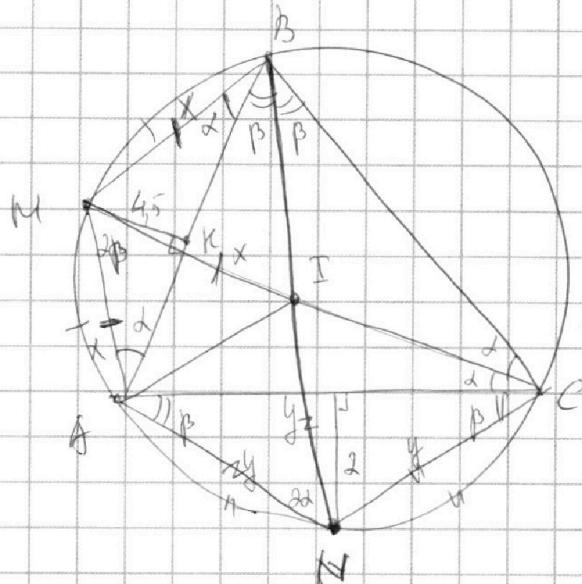
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AI - ?

$$\sin \alpha = \frac{4.5}{x}$$

$$AI = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{2}{y}$$

$$AI = 2y \cdot \sin \alpha = 2y \cdot \frac{4.5}{x} = \frac{9y}{x}$$

$$\frac{AI}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{x}{\cos \beta}$$

$$AI = 2x \sin \beta = 2x \cdot \frac{2}{y} = \frac{4x}{y}$$

$$9 \frac{y}{x} = 4 \frac{x}{y} \quad / \cdot xy$$

$$9y^2 = 4x^2$$

$$3y = 2x \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

$$AI = 9 \cdot \frac{2}{3} = [6]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

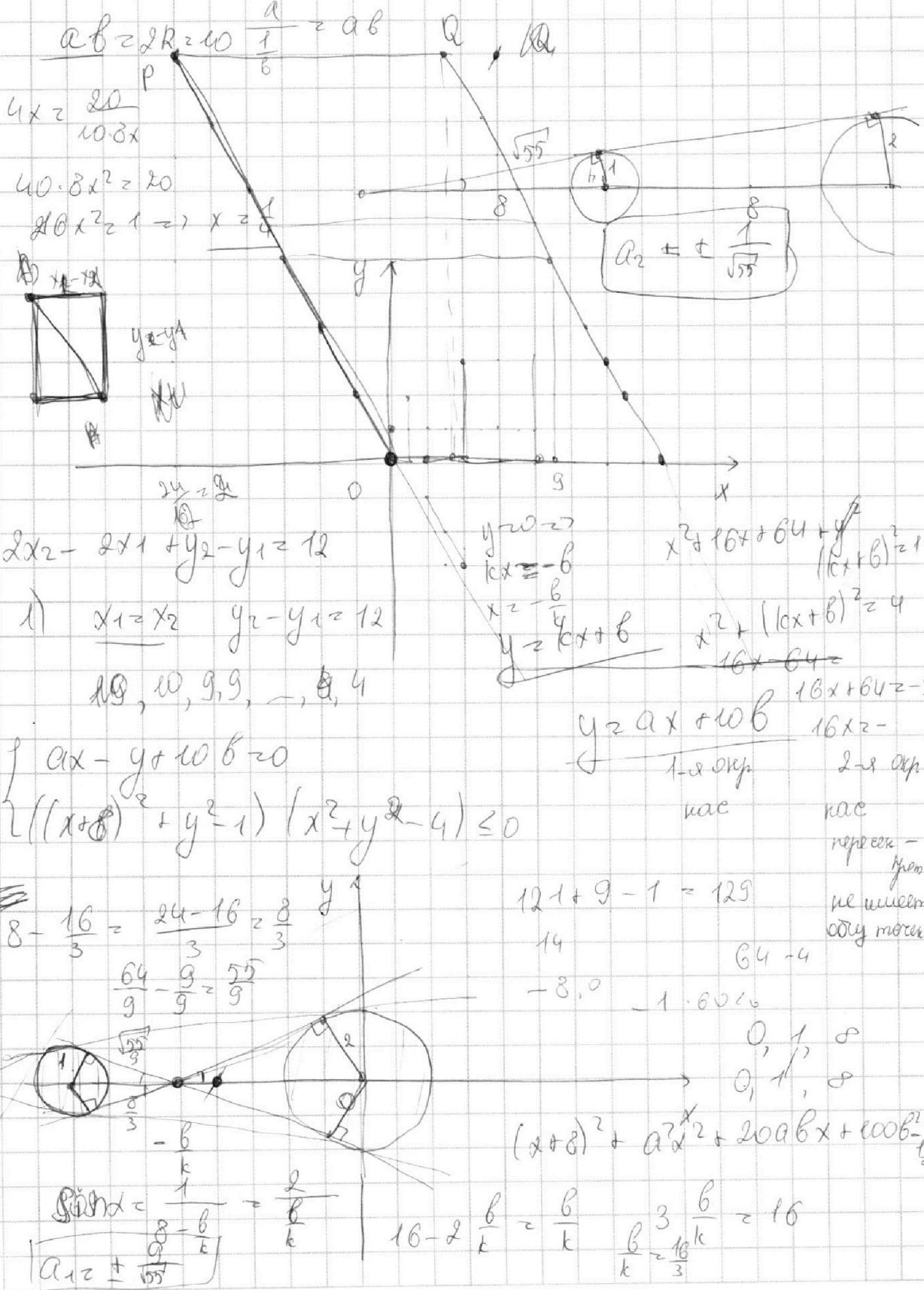
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





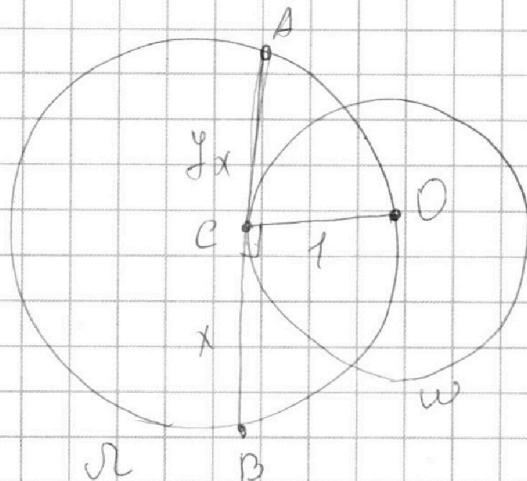
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

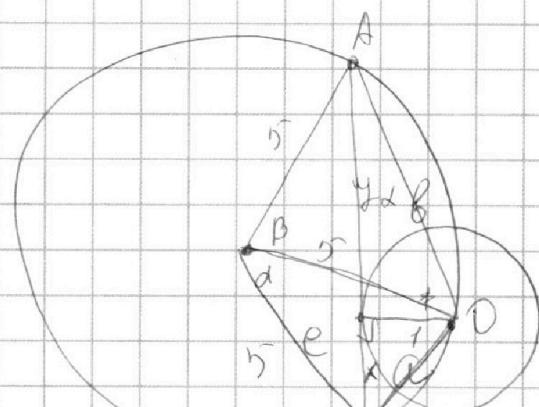
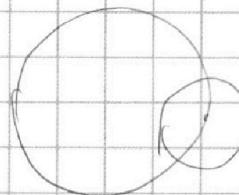
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = ?$$

$$r = 1$$

$$x = 5$$



$$a^2 = x^2 + 1$$

$$b^2 = 49x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \alpha = \\ &= 50(1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \beta = \\ &= 50(1 - \cos \beta) \end{aligned}$$

$$x^2 + 1 = 50(1 - \cos \alpha)$$

$$49x^2 + 1 = 50(1 - \cos \beta)$$

$$64x^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$64x^2 = 50(1 - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha = \frac{x^2 + 1 + 50}{2 \cdot 25} = \frac{-x^2 + 49}{50} = \frac{(-x + 7)(x + 7)}{50}$$

$$\cos \beta = \frac{-49x^2 + 1 + 50}{2 \cdot 25} = \frac{-49x^2 + 49}{50} = \frac{(2 - yx)(y + yx)}{50}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in N$$

$$ab : 2^{14} \cdot y^{10}$$

$$abc \text{ наим. - ?}$$

$$bc : 2^{14} \cdot y^{14}$$

$$ac : 2^{20} \cdot y^{34}$$

$$\Rightarrow ac, 2^{20} \cdot y^{34}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{14} \cdot y^{10} p \cdot 2^{14} \cdot y^{14} q \cdot 2^{20} \cdot y^{32} t = 2^{51} y^{64} \cancel{p} \cancel{q} \cancel{t}$$

rem: em

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} y^{64} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot y^{34}$$

Пример

$$a = 2^9 \cdot y^{10}$$

$$b = 2^5 \cdot y^8$$

$$c = 2^{12} \cdot y^{24}$$

$$abc, 2^{26} \cdot y^{34}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a}{b} - \text{неконд.} \Rightarrow (a, b) = 1$$

$$a, b \in N$$

$$a+b$$

$$a+b : m$$

$$5-6 \cdot 2 = m - \text{наиб}$$

$$a^2 - 6ab + b^2$$

$$a^2 - 6ab + b^2 : m$$

$$5^3 - 6 \cdot 14 = 53 - 84 = -31$$

$$m \mid (a+b, a^2 - 6ab + b^2) \Rightarrow (a+b, -6ab - 2ab) \Rightarrow (\textcircled{a+b}, \underline{8ab})$$

$$\Rightarrow (a+b, 8)$$

$$\boxed{m \text{ наиб} \geq 8}$$

($a+b$) $\nmid p$, p - простое число

$a+b \mid p \Rightarrow a \mid p$ и $b \mid p$

бес. $a \mid p \Rightarrow b \mid p \Rightarrow (a, b) \mid p$

$$a=3 \quad b=5$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{9+25-0 \cdot 15}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{34} = \frac{4}{17}$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{56} = -\frac{1}{7}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{9+25-0 \cdot 15}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{34} = \frac{4}{17}$$

\textcircled{3}

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

a b

$$a^2 - b^2 = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a+b-1) = 0$$

$$1) \quad a = b \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2) \quad a + b = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 3x + 4 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 4 \end{array}$$

$$8x^2 - 6x + 8 \geq 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{D}{4} = \frac{9}{4} < 0 \quad 2\sqrt{81} < 30 \quad 7x - 8 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{81}{49} - \frac{140}{49} + \frac{137}{49} = \frac{29}{49} \quad \sqrt{61} < 81 \quad 49x^2 - 49x + 49 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$\frac{32}{49} + \frac{56}{49} + \frac{489}{49} = \frac{132}{49} \quad 61x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\sqrt{\frac{29}{49}} - \sqrt{\frac{137}{49}} = -2$$

$$22 + 4\sqrt{61} < 123$$

$$4\sqrt{61} < 101$$

$$16 \cdot 61 < 101^2$$

$$\sqrt{29} - \sqrt{137} = -14$$

$$\sqrt{29} = \sqrt{137} - 14$$

$$29 = 137 - 196 -$$

$$41x^2 - 36x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{36}{41} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

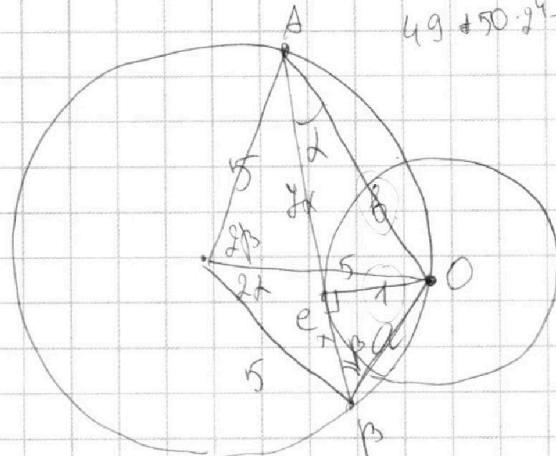
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49x^4 + 50x^2 + 1 = 49x^4 - \frac{1}{6^2} - \frac{49x^2 - 1}{6^2}$$

$$\alpha^2 = x^2 + 1 \quad (49x^2 + 1 - 49x^2 + 1)$$

$$b^2 = 49x^2 + 1 \quad 49x^2 + 1$$

$$\alpha^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos 2\alpha = \\ \approx 50(1 - \cos 2\alpha) =$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \approx 50(\alpha - \cancel{\cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha}) =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 100 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\frac{49}{28} + \frac{50}{28} = 99$$

$$x^2 + 1 = 100 \cdot \frac{1}{49x^2 + 1}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{6^2}$$

$$\frac{49}{28} + \frac{50}{28} = 99$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$\frac{99}{49}$$

$$\frac{51}{255} \times \frac{56}{50} = 12800$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\frac{891}{4851}$$

$$\frac{66}{66} \times \frac{86}{86} = 12800$$

$$D = 625 + 4851 =$$

$$\frac{396}{4356} \times \frac{456}{532} =$$

$$x^2 + 1 = 50 - 50 \cdot \frac{49x^2 - 1}{49x^2 + 1} =$$

$$\frac{5476}{5476}$$

$$\frac{396}{4356} \times \frac{456}{532} =$$

$$= 50 \cdot \frac{2}{49x^2 + 1}$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 =$$

$$\frac{196}{98} \times \frac{99}{99} = 196$$

$$S = 4x = \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{a \cdot 8x}$$

$$\frac{256}{96} \times \frac{24576}{24576} =$$

$$\frac{1864}{19404} \times \frac{99}{99} = 1864$$

$$\sin(\angle APB) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{45}{625} \cdot \frac{2}{5} =$$

$$\frac{1536}{2304}$$

$$\frac{19404}{2500} = 19404$$

$$a \cdot 8x^2 = 5 \quad 80x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{5446}{1389}$$

$$a \cdot 8 = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{(49x^2 + 1)(49x^2 + 1)} = \boxed{AB = 2} \quad 463$$

$$= \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1} = 10$$