МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} p$, $bc = 2^{17} \cdot 7^{17} q$, $ac = 2^{20} \cdot 7^{37} t$, где $p, q, t \in N$, тогда

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2b^2c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} pqt$

Т.к $a^2b^2c^2$ – полный квадрат, то в его разложение все простые множители входят в чётной степени.

Т.к степень вхождения 2 в $a^2b^2c^2$ хотя бы 51, тогда степень вхождения должна быть хотя 52.

Т.к в $a^2b^2c^2$ 2 входит хотя бы в 52 степени, а 7 – хотя бы в 64, то в abc 2 входит хотя бы в 26 степени, а 7 хотя бы в 32. Но т.к в ac 7 входит хотя бы в 37 степени, то и в abc 7 входит хотя бы в 37 степени. Тогда

$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$ (т.к 2 и 7 взаимопросты)

<u>Пример</u> Если $a = 2^9 \cdot 7^{10}$, $b = 2^5 \cdot 7$, $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$, то условие задачи выполняется и $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $\frac{a}{b}$ – несократ, то $(a;b)=1$ (в круглых скобках будем обозначать НОД чисел)

$(a+b;\ a^2-6ab+b^2)=(a+b;\ a^2-6ab+b^2-(a+b)^2)=$
$=(a+b;-8ab)=(a+b;8ab)$

Мы по алгоритму Евклида можем оставлять меньшее число и сколько-то раз его вычитать из большего (мы вычли $(a+b)$ раз число $(a+b)$)

Докажем, что $(a+b, ab)=1$.

Предположим, что это не так, тогда пусть $a+b \vdots p$, $ab \vdots p$, где p – простое число.

Т.к. $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ или $b \vdots p$. Пусть БОО $a \vdots p$.

Т.к. $a \vdots p$, $a+b \vdots p$, то $b \vdots p$, тогда $a \vdots p$, $b \vdots p$, тогда $(a,b) \geq p$ – противоречие, т.к. $(a,b)=1$.

Тогда наше предположение неверно, а верно, что ab и $(a+b)$ взаимопросты.

Тогда $(a+b;\ 8ab)=(a+b;8) \leq 8$. Т.е. $m \leq 8$

<u>Пример</u> Если $a=3$, $b=5$, то $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{8}{9-6\cdot 15+25}=$
$=-\frac{8}{56}$. Тогда $m=8$.

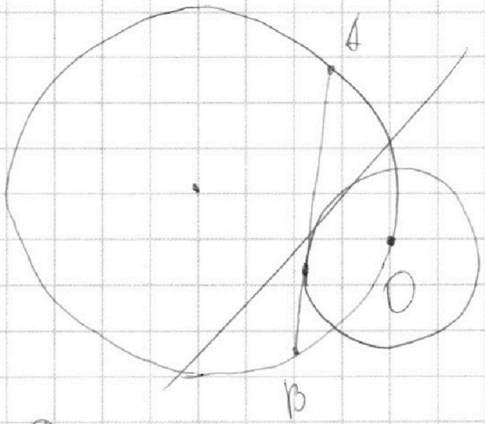
Ответ: 8.

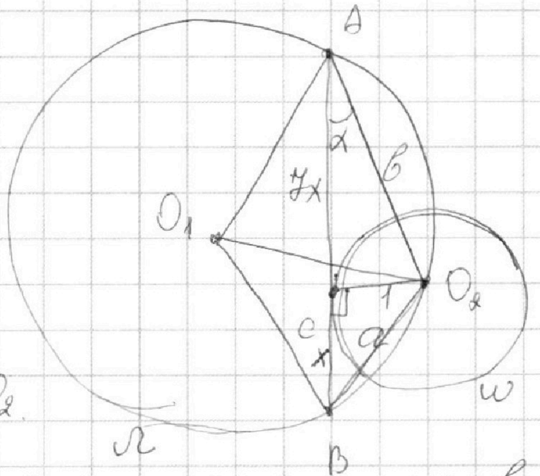
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





Пусть центр окр ω O_2.

Т.к AB – касательная к ω и касается ω в т. C, то

$O_2C \perp AB$, $O_2C = 1$.

Пусть $\angle O_2AB = \alpha$, $O_2B = a$, $O_2A = b$, ~~тогда~~

$BC = x$, тогда $AC = 7x$, тогда

$S_{ABO_2} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 8x = 4x$ (т.к $S_{ABO_2} = \frac{1}{2} O_2C\cdot AB$)

С другой стороны, $S_{ABO_2} = \frac{4R}{ab\cdot 8x}$, где R – радиус описанной около $\triangle ABO_2$ окружности, т.е $R=5$.

Из т-мы синусов $\triangle ABO_2$: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

И из $\triangle AO_2C$: $\sin\alpha = \frac{1}{b}$, тогда $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = ab = 2R = 10$, т.е $ab = 10$

Тогда $S_{ABO_2} = \frac{4\cdot 5}{10\cdot 8x} = \frac{1}{4x}$ или $S_{ABO_2} = 4x$, т.е

$\frac{1}{4x} = 4x \Leftrightarrow 16x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$. Т.к $AB = 8x$, то

$AB = 2$.

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\sqrt{2x^2-5x+3} = a$, $\sqrt{2x^2+2x+1} = b$, тогда

$a - b = 2 - 7x$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \\ x \in R \end{cases}$

$a^2 - b^2 = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2 = a - b$

Т.е $a^2 - b^2 = a - b$

$(a-b)(a+b-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b-1=0 \end{array}\right.$

1) $\underline{a = b} \iff 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \iff 7x = -2$

$\iff \underline{x = -\frac{2}{7}}$ (входит в ОДЗ)

2) $\underline{a = 1 - b} \iff \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1}$

Т.к обе части ~~положите~~ не отрицательные, то можно возвести в квадрат равносильно. Получаем

$\cancel{2x^2} - 5x + 3 = 1 + \cancel{2x^2} + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x - 1$

Т.к обе части положительные, возведём равносильно в квадрат, получим

$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1 \iff 41x^2 - 22x - 3 = 0$

Решим квадратное уравнение, получим $x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$,

$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$, каждое из которых входит в ОДЗ.

Ответ: $x_1 = -\frac{2}{7}$, $x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$, $x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

тогда $y_2 - y_1 = 12$

Посчитаем, сколько пар A и B, если $x_1 = x_2$, тогда если $x_1 = x_2 = 0$, то всего 10 пар, если $x_1 = x_2 = 1$, то 10, если $x_1 = x_2 = 2$, то 9, и т.д. т.е в этом случае всего $10+10+9+9+\ldots+4+4 = 2\cdot(4+\ldots+10) =$ $= 2\cdot 49 = 58$. Аналогично, если $y_1 = y_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

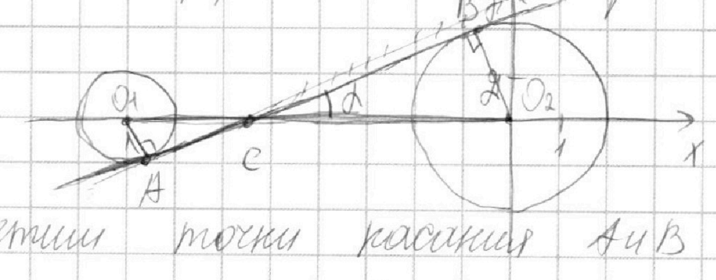
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.к решением 2-го ур-я является вся внутренняя область окружности. Т.к всего должно быть равно 2 решения, то это возможно только, если прямая касается первой и второй окружности одновременно, т.е является общей касательной.

У 2-х непересекающихся окружности могут быть всего 4 общих касательных. Т.к линия центров окружностей лежит на ~~прямой~~ оси Ox, то ~~у 2-х из этих~~ 4 общих касательных разбиваются на 2 пары, в каждой из которых касательные имеют противоположные по знаку, но одинаковые по модулю угловой коэффициент и свободный член. Найдем угловой коэффициент у общих касательных с положительным угловым коэффициентом (см рис)

1)



Отметим точки касания A и B, точку пересечения с осью Ox C (см рис) Пусть центры окр. O1 и O2

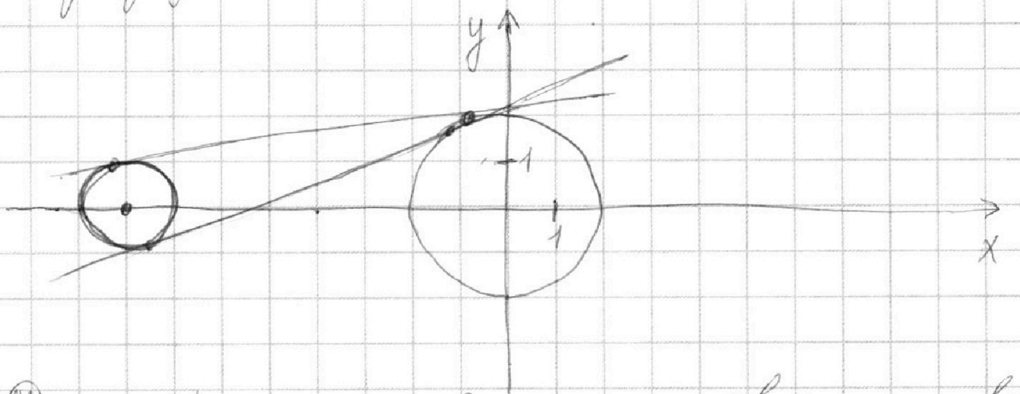
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решим задачу графически
Изобразим ур-е 2 на графике
Каждая из скобок – это ур-е окружности.
Тогда если был бы знак равенства, то графиком была бы совокупность двух окружностей с ~~рад~~ с центрами с координатами $(-8;0)$, $(0;0)$ и радиусами 1 и 2 соответственно



Тогда решением 2-го ур-я являются внутренние области окружностей (метод пробных точек)
Первое уравнение задаёт прямую, где a – угловой коэффициент прямой, и b – свободный член.
Если прямая касается окружности, то она образует решение, если не имеет общих точек, то нет решений (с этой окружностью), если пересекает, то образует бесконечно много решений,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$

Пусть ур-е этой касательной $y = kx + b$, тогда $C\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$

Тогда $CO_2 = \frac{b}{k}$, $CO_1 = 8 - \frac{b}{k}$. Пусть угол наклона α.

$\sin\alpha = \frac{1}{8 - \frac{b}{k}} = \frac{2}{\frac{b}{k}} \Leftrightarrow \frac{b}{k} = 16 - 2\frac{b}{k} \Leftrightarrow 3\frac{b}{k} = 16$

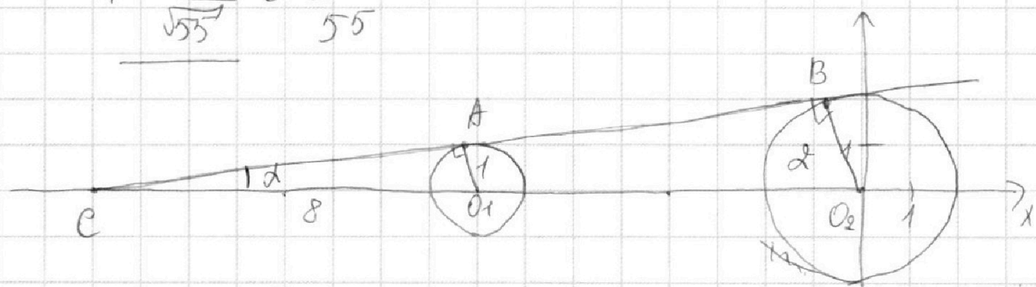
$\Leftrightarrow \frac{b}{k} = \frac{16}{3}$. Тогда $O_1C = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$

По т-ме Пифагора $\triangle ACO_1$: $AC = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{9}$

$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{55}} = \frac{9}{\sqrt{55}}$.

Т.е $a_1 = \frac{9}{\sqrt{55}} = \frac{9\sqrt{55}}{55}$.

2)



Аналогично отметим точки касания A и B и

точку пересечения с осью Ox C.

$\triangle AO_1C \sim \triangle BO_2C$ с коэф. подобия $\frac{1}{2}$, тогда

$O_1C = \frac{1}{2} O_2C \Leftrightarrow O_1C = O_2O_1 = 8$

По т-ме Пифагора $\triangle AO_1C$: $AC = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{55}$,

тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{55}}$, т.е $a_2 = \frac{1}{\sqrt{55}}$

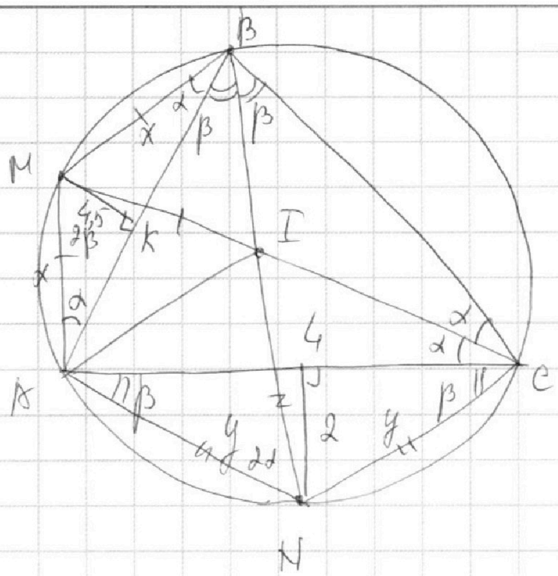
Ответ: $a = \pm\frac{9}{\sqrt{55}}$, $a = \pm\frac{1}{\sqrt{55}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Т.к M — середина $\breve{AB}$, N — середина $\breve{AC}$, то $MB = MA$, $NA = NC$, CM — биссектр $\angle BCA$, BN — биссектр $\angle ABC$

Пусть $\angle ACM = \angle BCM = \alpha$, $\angle ABN = \angle CBN = \beta$

Из вписан. $\triangle AMBC$ $\angle MBA = \angle MAB = \alpha$, из вписан $\triangle ABCN$ $\angle CAN = \angle ACN = \beta$

Также $\angle AMC = 2\beta$, $\angle ANB = 2\alpha$

Пусть $\rho(M; AB) = MK$, $\rho(N; AC) = NL$

Пусть $AM = MB = x$, $AN = CN = y$

Из прямоуг $\triangle AMK$ и $\triangle ANL$: $\sin\alpha = \frac{4,5}{x}$, $\sin\beta = \frac{2}{y}$

~~Из СМ~~ Пусть $CM \cap BN = I$, тогда I — центр впис окр

Из леммы о трезубце $MI = MA = MB$, $NI = AN = NC$.

Из Т.к $\triangle AMI$ — равнобед, то $\angle MAI = \angle MIA = 90^\circ - \beta$; т.к $\triangle AIN$ — равнобед, то $\angle IAN = 90^\circ - \alpha$

~~Ао~~ т-мы синусов $\triangle AIM$: $\frac{AI}{\sin 2\beta} = \frac{x}{\cancel{\cos}\sin(90^\circ-\beta)} = \frac{x}{\cos\beta}$

$AI = \frac{x \cdot 2\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta} = 2\sin\beta \cdot x = 2x \cdot \frac{2}{y} = \frac{4x}{y}, 4\frac{x}{y}$ (1)

Из т-мы синусов $\triangle AIN$: $\frac{AI}{\sin 2\alpha} = \frac{y}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{y}{\cos\alpha}$

$AI = \frac{y \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2y \cdot \sin\alpha = 2y \cdot \frac{4,5}{x} = 9\frac{y}{x}$ (2)

Из (1) и (2): $4\frac{x}{y} = 9\frac{y}{x} \Leftrightarrow 4x^2 = 9y^2 \Leftrightarrow 2x = 3y$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$. Тогда из (1) $AI = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

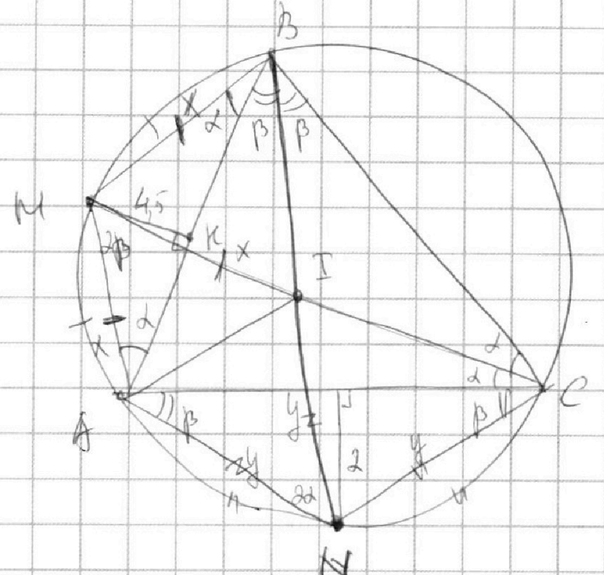
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$AI - ?$



$\sin\alpha = \frac{4,5}{x}$

$\sin\beta = \frac{2}{y}$

$\frac{AI}{2\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}} = \frac{y}{\cancel{\cos\alpha}}$

$AI = 2y\cdot\sin\alpha = 2y\,\frac{4,5}{x} = 9\,\frac{y}{x}$

$\frac{AI}{2\sin\beta\cancel{\cos\beta}} = \frac{x}{\cancel{\cos\beta}}$

$AI = 2x\sin\beta = 2x\cdot\frac{2}{y} = 4\,\frac{x}{y}$

$9\,\frac{y}{x} = 4\,\frac{x}{y} \quad /\cdot xy$

$9y^2 = 4x^2$

$3y = 2x \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$

$AI = \cancel{9}^{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} = \boxed{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

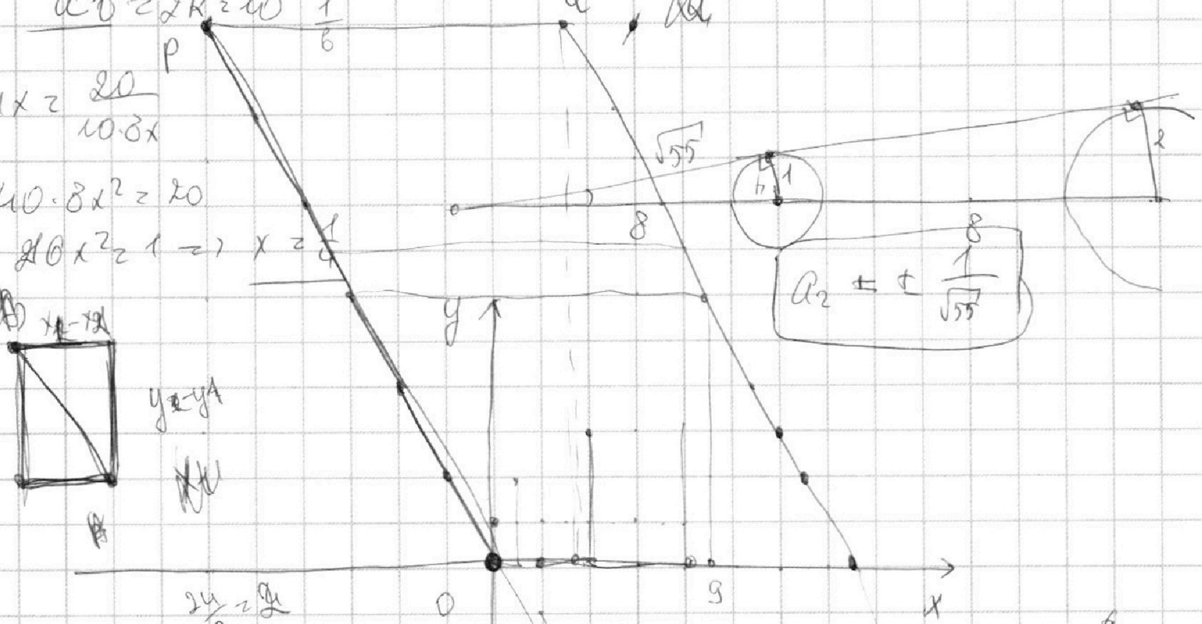
$ab = 2R = 40 \frac{a}{\frac{1}{b}} = ab$

$4x = \frac{20}{10 \cdot 8x}$

$40 \cdot 8x^2 = 20$

$16x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$y_2 - y_1$



$a_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{55}}$

$\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

1) $x_1 = x_2$ $\quad y_2 - y_1 = 12$

$10, 10, 9, 9, \ldots, 8, 4$

$y = 0 \Rightarrow kx = -b$

$x = -\frac{b}{k}$

$y = kx + b$

$x^2 + 16x + 64 + (kx + b)^2 = 1$

$x^2 + (kx + b)^2 = 4$

$16x + 64 = -3$

$16x = -$

$y = ax + 10b$

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$

1-я окр нас

2-я окр нас

пересек — нет

не имеет общ точек

$8 - \frac{16}{3} = \frac{24 - 16}{3} = \frac{8}{3}$

$\frac{64}{9} - \frac{9}{9} = \frac{55}{9}$

$121 + 9 - 1 = 129$

14

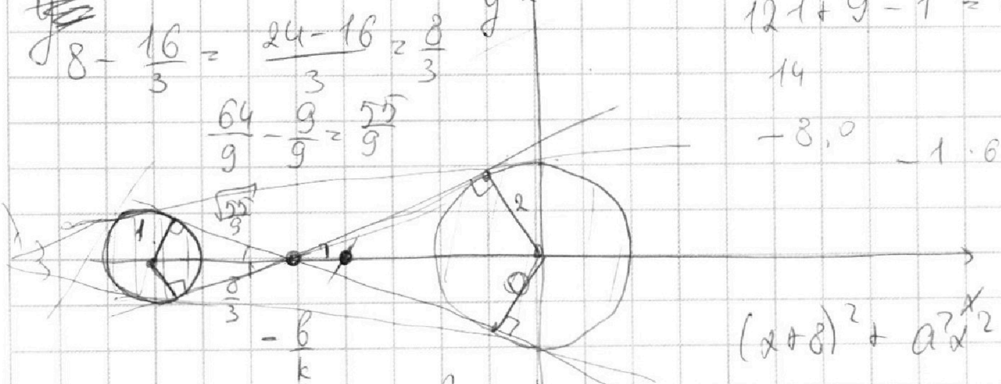
$-8, 0$

$64 - 4$

$-1 \cdot 60$

$0, 1, 8$

$0, 1, 8$



$(x+8)^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1 = 0$

$\sin\alpha = \frac{1}{8 - \frac{b}{k}} = \frac{2}{\frac{b}{k}}$

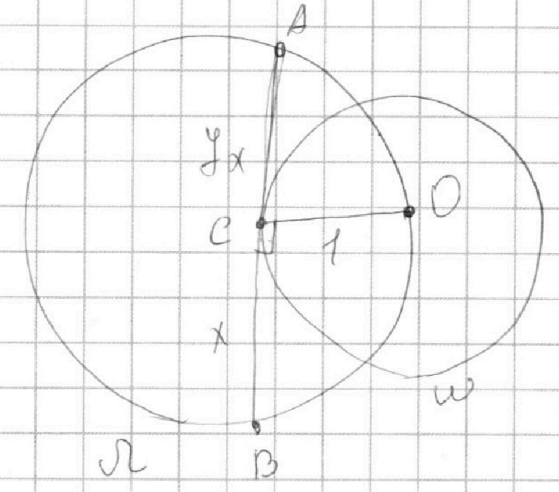
$16 - 2\frac{b}{k} = \frac{b}{k}$ $\quad 3\frac{b}{k} = 16$ $\quad \frac{b}{k} = \frac{16}{3}$

$\boxed{a_1 = \pm \frac{8}{\sqrt{55}}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

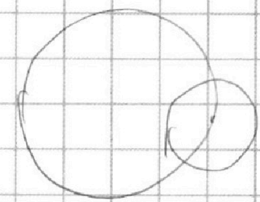
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

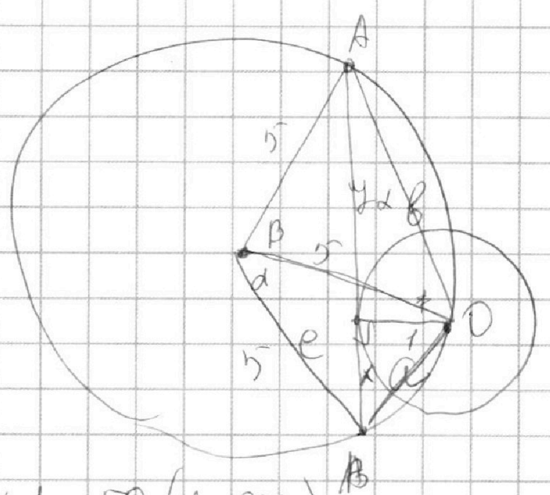


AB - ?

r = 1

R = 5





$a^2 = x^2+1$

$b^2 = 49x^2+1$

$a^2 = 25+25 - 2\cdot 25\cdot\cos\alpha =$

$= 50(1-\cos\alpha)$

$b^2 = 25+25-2\cdot 25\cdot\cos\beta =$

$= 50(1-\cos\beta)$

$x^2+1 = 50(1-\cos\alpha)$

$49x^2+1 = 50(1-\cos\beta)$

$64x^2 = 25+25-2\cdot 25\cdot\cos(\alpha+\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$64x^2 = 50(1-\cos(\alpha+\beta))$

$\cos\alpha = \dfrac{-x^2-1+50}{2\cdot 25} = \dfrac{-x^2+49}{50} = \dfrac{(-x+7)(x+7)}{50}$

$\cos\beta = \dfrac{-49x^2-1+50}{2\cdot 25} = \dfrac{-49x^2+49}{50} = \dfrac{(7-7x)(7+7x)}{50}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a, b, c \in N$

$abc_{наим.}$ – ?

$ab \vdots 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$ $\Rightarrow ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$

$a^2b^2c^2 = 2^{14} \cdot 7^{10} p \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} q \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} t = 2^{51} 7^{64} pqt \vdots 2$

чётн. ст.

$a^2b^2c^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64}$ $\Leftrightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$

$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример.

$a = 2^9 \cdot 7^{10}$

$b = 2^5 \cdot 7^0$

$c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

(2) $\frac{a}{b}$ – несократ. $\Rightarrow (a; b) = 1$ $a, b \in N$

$1+2=3$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ $a+b \vdots m$ $5-6\cdot 2=$ m – наиб

$=-7$

$a^2-6ab+b^2 \vdots m$ $53-6\cdot 14 = 53-84 = -31$

$m = (a+b, a^2-6ab+b^2) = (a+b, -6ab-2ab) = (a+b, 8ab) =$

$= (a+b, 8)$ $\boxed{m_{наиб} = 8}$

$(a+b, ab) = 1$ $a+b \vdots p$, p – простое число

$ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ или $b \vdots p$

БОО: $a \vdots p \Rightarrow b \vdots p \Rightarrow (a, b) = p$

$a=3$ $b=5$ $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{9+25-6\cdot 15} = \frac{8}{34-90} =$

$= -\frac{8}{56} = -\frac{1}{7}$

(3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{\sqrt{2x^2-5x+3}}_{a} - \underbrace{\sqrt{2x^2+2x+1}}_{b} = \underbrace{2-7x}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \text{ – прямая} \end{cases}$

$D = 25-24 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$

$x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$1 \quad 1{,}5 \quad x$

$\frac{D}{4} = 1-2 = -1 < 0$

$a^2 - b^2 = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 + 2x - 1 = -7x + 2$

$a - b = a^2 - b^2$

$(a-b)(a+b-1) = 0$

1) $\underline{a = b} \Leftrightarrow \cancel{2x^2} - 5x + 3 = \cancel{2x^2} + 2x + 1$ $\quad 7x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$

2) $\underline{a + b = 1} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\frac{2x^2-5x+3+2x^2+2x+1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{4x^2-3x+4}{2} \geq \frac{1}{4}$

$8x^2 - 6x + 8 \geq 1$

$8x^2 - 6x + 7 \geq 0$

$\frac{D}{4} = 9 - \ldots < 0$

$\sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1}$

$\cancel{2x^2} - 5x + 3 = 1 + \cancel{2x^2} + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2\sqrt{61} < 30$

$\sqrt{61} < 15$

$61 < 225$

$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$

$41x^2 - 22x - 3 = 0$

~~$41x^2 - 36x = 0$~~

$x = 0$

$x = \frac{36}{41}$

$\frac{D}{4} = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$

$41 \cdot 3 = 123$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \\ x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right.$

$3 \cdot 41$

$49 \cdot 3 = 161 \; 137$

49

$\frac{32}{49} - \frac{140}{49} + \frac{137}{49} = \frac{29}{49}$

$\frac{32}{49} + \frac{56}{49} + \frac{49}{49} = \frac{137}{49}$

$61 \cdot 16 = 366 + 61\ldots = 976$

$\frac{\sqrt{29}}{7} - \frac{\sqrt{137}}{7} = -2$

$\sqrt{29} - \sqrt{137} = -14$

$\sqrt{29} = \sqrt{137} - 14$

$29 = 137 - 196 -$

$22 + 4\sqrt{61} < 123$

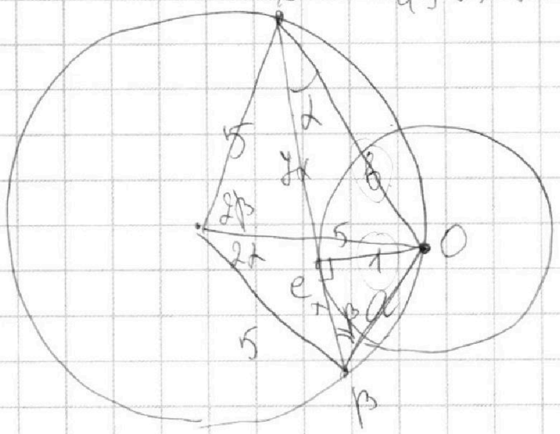
$4\sqrt{61} < 101$

$16 \cdot 61 < 101^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком **номер задачи**,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$49+50\cdot 2^4=99\cdot 2^8$

$\frac{49x^2}{b^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{49x^2-1}{b^2}$

$a^2=x^2+1$ $\quad \frac{49x^2+1-49x^2+1}{49x^2+1}$

$b^2=49x^2+1$

$a^2=25+25-2\cdot 25\cdot \cos 2\alpha=$

$=50(1-\cos 2\alpha)=$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$ $\quad =50(\cancel{1}-\cancel{1}+2\sin^2\alpha)=$

$=1-2\sin^2\alpha$ $\quad =100\cdot\sin^2\alpha$ $\quad \frac{49}{2^8}+\frac{50}{2^4}=99$

$x^2+1=100\cdot\frac{1}{49x^2+1}$ $\quad \sin^2\alpha=\frac{1}{b^2}$ $\quad \frac{49}{2^8}+\frac{50\cdot 2^4}{2^8}=99$

$49x^4+49x^2+x^2+1=100$

$49x^4+50x^2-99=0$

$\frac{D}{4}=625+4851=$

$x^2+1=50-50\cdot\frac{49x^2-1}{49x^2+1}=$

$=50\cdot\frac{2}{49x^2+1}$

$S=4x=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 5}{ab\cdot 8x}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ $\quad 24576=2\cdot 2$

$=\frac{1}{b}\cdot\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\cdot\frac{7x}{b}$

$ab\cdot 8x^2=5$ $\quad 80x^2=5\Rightarrow x^2=\frac{1}{16}\Rightarrow x=\frac{1}{4}\Rightarrow$ $\quad =\boxed{AB=2}$

$ab=\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)}$

$=\sqrt{49x^4+50x^2+1}=10$

$99\cdot 49$: 891, 396, 4851; $4851+625=5476$

$51\cdot 51$: 51, 255, 2601; $256\cdot 50=12800$

$66\cdot 66$: 396, 396, 4356; $76\cdot 76$: 456, 532, 5776

$2500+4\cdot 49\cdot 99=$ $\quad 24576$

$256\cdot 96$: 1536, 2304, 24576

$196\cdot 99$: 1764, 1764, 19404; $+2500$; 21904

$33\cdot 33=1089$

5476
1389
463