



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

2 и 7 простые числа,

значит a, b, c могут состоять только

из 2 и 7 разложим на пр. множители,

и если 8 разложим либо другие множители,
но это не приведет к различию

$$\text{НДС } a; m \Rightarrow \text{НОД } m$$

8 разложим на 2 и получим квадрат

мин степень 2 и макс степень 7

a_2, b_2, c_2 - степени 2 в разложении

a_7, b_7, c_7 - степени 7 в разложении

пред a_2, b_2, c_2 - мин. шаги

$$a_2 + b_2 = 75 \quad b_2 = 77 - c_2$$

$$a_2 + c_2 = 23 \quad a_2 + 77 - c_2 = 75$$

$$b_2 + c_2 = 77 \quad a_2 = 23 - c_2$$

$$23 - c_2 + 77 - c_2 = 15$$

мин 1 из 4

$$2c_2 = 25$$

$$c_2 = 12,5 \quad a_2 = 10,5 \quad b_2 = 9,5$$

нужных степеней быть не может

но можно увел. шаги син. на 0,5, и уменьшил шаг на 0,5

может ли не получит нужную сумму

но можно увел. шаг син. на 0,5: шаги уменьш. на 0,5

например $a_2 = 77 \quad b_2 = 5 \quad c_2 = 12 \quad abc = 2^{28} \cdot 7^{11}$

$abc = 2^{23} \cdot 7^{39} \quad \text{НМН} = 39 \quad \text{Числ: } a_7 = 16 \quad b_7 = 0 \quad c_7 = 23$

$$abc_{\min} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: $abc_{\min} = 2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1 продолжение $a b c \min = 2^{28} 7^{39}$

получаем при

$$a = 2^{11} 7^{16}$$

$$b = 2^5$$

$$C = 2^{12} 7^{23}$$

мин 2 из 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\frac{a}{b} \text{ неокрашено } \textcircled{1}$$

тогда $MOD(a; b) \leq 1$ наименьший остаток деления

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

значит и знаменатель
может содержать как m так и единицу

$$(a+b) : m \Rightarrow (a+b)^2 : m$$

$$(a^2 - 7ab + b^2) : m$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$$

$$(a+b)^2 : m$$

$$\text{значит и } 9ab : m$$

если $a|b : m$, то получаем противоречие с условием \textcircled{1}

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{b} \frac{b}{a} \text{ значит из этого следует делится на } m$$

$\frac{a}{b}$ содержит

тогда $9 : m$ значит так $m = 9$

Ответ: max $M = 9$

Номер 3 из 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

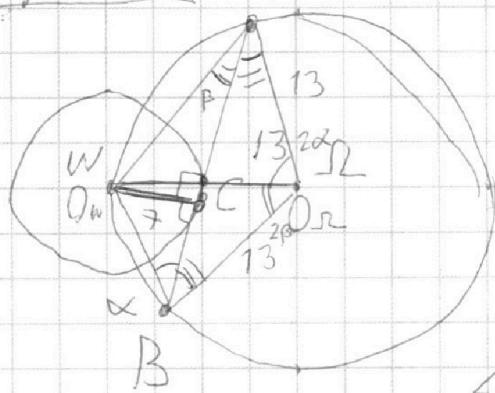
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 31



$$R_{w\ell} = 7 \quad R_{r\ell} = 13$$

из-за концентрического

$$\angle ACO_w = 90^\circ$$

$$O_w O_r, A O_r, B O_r = 13$$

$$\angle A O_r O_w = 2 \angle ABO_w$$

$$\angle O_w O_r B = 2 \angle O_w AB$$

тогда из-за подобия

$$\frac{BC}{O_w C} = \frac{7}{7}$$

$$BC = 7$$

$$AB = \frac{2}{7} BC = 24$$

Ответ: $AB = 24$

Минимум



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input type="checkbox"/> | 2
<input type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 **МФТИ**