



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

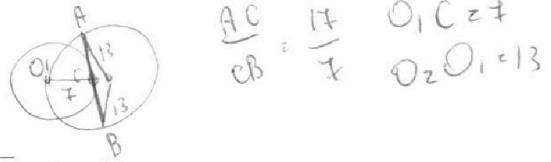
- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем t могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на t ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.



- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

Как это знают, ab кратно $2^{13} \cdot 7^4$, $bc - 2^{17} \cdot 18$

$ac - 2^{23} \cdot 39$. Пусть

$$\begin{cases} ab = x \cdot 2^{13} \cdot 7^4 \\ bc = y \cdot 2^{17} \cdot 18 \\ ac = z \cdot 2^{23} \cdot 39 \end{cases}$$

где x, y и z - неизвестные натуральные
числа.

Перенесем все в уравнение:

$$ab \cdot bc \cdot ac = xyz \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$(abc)^2 = xyz \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{xyz} \cdot 2^{\frac{27}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot 7^{\frac{34}{2}}$$

Чтобы abc было минимально (и

натурально из учебника), $\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{2}$ должно
(так как остальные множители $(2^{27} \cdot 7^{34})$ и так натуральны)
принимать наименьшие натуральные значения,

при которых x, y, z - натуральные числа,

тогда $\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{2} = 2$ (не может быть

$\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{2} = 1$, ведь тогда $xyz = \frac{1}{2}$, что неверно,

но $x, y, z \in \mathbb{N}$).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Почуаая

$$abc = (\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{z}) \cdot 2^{27} \cdot t^{34}$$

$$abc = 2^{28} \cdot t^{34}$$

Отвем. $abc = 2^{28} \cdot t^{34}$ - наименьшее возможное
значение.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input type="checkbox"/> | 2
<input checked="" type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

У нас есть дробь $\frac{a+b}{a^2 + b^2 - ab}$.

Ее числитель и знаменатель кратны m

(их наибольший общий делитель).

(из них из них)
Представим их как произведение

m на какое-то число. Пусть

$$\begin{cases} a+b = xm \\ a^2 + b^2 - ab = ym \end{cases}$$

где x, y — некоторые целые числа

$$\begin{cases} a = xm - b \\ (xm - b)^2 + b^2 - ab = ym \end{cases}$$

$$x^2 m^2 + 9b^2 - 9xmb = ym$$

$$(xm)^2 + xm(-9b) + 9b^2 = ym$$

Мы получим функцию $ym = f(xm)$ — параболу.

Ее вершина находится в точке $-\frac{9b}{2 \cdot 1}$.

Это может быть максимальное значение xm ,

если коэффициент при старшем члене $(xm)^2$

положителен, ведь парабола направлена
вниз.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Значит,

$$a + b = -\frac{9b}{2 \cdot 1}$$

$$a + b = 4,5b$$

$$a = 3,5b$$

Подставим b нашу строку:

$$\begin{array}{r} 3,5b + b \\ \hline (3,5b)^2 + b^2 - 7(3,5b \cdot b) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,5b \\ \hline -11,25b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -18 \\ 45b \end{array}$$

Наибольшее число, на которое это
может сократить числитель и знаменатель
полученной строки - это 9. Мы получим
некоторую строку $-\frac{2}{5b}$, а $m=9$

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3) $x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

$$\frac{\sqrt{3(6-2\sqrt{78})^2} - 2\sqrt{3}(6-2\sqrt{78}) + 138}{69 \cdot 69 - 58 \cdot 23 + 69} - \frac{\sqrt{3(6-2\sqrt{78})^2} - 2\sqrt{3}(6-2\sqrt{78}) + 69}{69 \cdot 69 - 64 \cdot 23 + 69} = 1 - \frac{3(6-2\sqrt{78})}{69 \cdot 23}$$
$$\frac{36 + 312 - 24\sqrt{78} - 138(6-2\sqrt{78}) + 138 \cdot 23}{69 \cdot 23} - \frac{36 + 312 - 24\sqrt{78} + 69(6-2\sqrt{78}) + 69 \cdot 23}{69 \cdot 23} = \frac{5 + 6\sqrt{78}}{23}$$
$$\frac{38 + 312 - 34\sqrt{78} - 138 \cdot 6 + 138 \cdot 2\sqrt{78} + 138 \cdot 23 - 36 - 312 + 250\sqrt{78} - 69 \cdot 6 + 138\sqrt{78} - 69 \cdot 23}{3} = 5 + 6\sqrt{78}$$

$$\frac{158\cancel{+} - 414 \cdot 3 + 138 \cdot 3\sqrt{78}}{3} = 5 + 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{529 - 414 + 138\sqrt{78}} = 5 + 6\sqrt{78}$$

$$115 + 138\sqrt{78} = 25 + 36\sqrt{78} + 60\sqrt{78}$$

$$2718 = 18\sqrt{78}$$

$$453 = 13\sqrt{78}$$

неверно. $x \neq \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

Получаемое, $x = \frac{1}{9}$. Чтобы

Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Сделаем замену переменных: пусть

$$3x^2 - 6x + 2 = a \quad \text{и} \quad 3x^2 + 3x + 1 = b$$

при этом $a \geq 0$ и $b \geq 0$ (так как из

них можно извлечь корень). Тогда $1 - 9x = a - b$

Поставим:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})) = 0$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$$

$$1 - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} *$$

Решим *:

$$1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$1 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{ab} = 1 - a - b$$

$$4ab = 1 + a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2ab$$

$$a^2 + a(-2 - 2b) + (b^2 - 2b + 1) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \frac{2 + 2B}{2} \pm \sqrt{\frac{4 + 4B^2 + 8B - 4B^2 + 8B - 4}{4}}$$

$$a = 1 + B \pm \frac{\sqrt{16B}}{2}$$

$$\lceil a = 1 + B + 2\sqrt{B}$$

$$\lfloor a = 1 + B - 2\sqrt{B}$$

$$\lceil a = (\sqrt{B} + 1)^2$$

$$\lfloor a = (\sqrt{B} - 1)^2$$

Получаем, что:

$$\lceil a = B$$

$$\lceil a = (\sqrt{B} + 1)^2$$

$$\lfloor a = (\sqrt{B} - 1)^2$$

Заменим a и B на $3x^2 - 6x + 2$ и $3x^2 + 3x + 1$

соответственно.

$$\lceil 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$\lceil 3x^2 - 6x + 2 = (\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1)^2$$

$$\lfloor 3x^2 - 6x + 2 = (\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1)^2$$

$$\lceil x = \frac{1}{9}$$

$$\lfloor 3x^2 - 6x + 2 = (3x^2 + 3x + 1) + 1 \pm 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Решим **:

**

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{3x^2 - 6x + 2} = \cancel{3x^2 + 3x + 1} + 1 \pm 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = \pm 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 69 \cdot 4}}{2 \cdot 69}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{138}$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ 69 \\ \hline 1104 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 1104 \\ 144 \\ \hline 1248 \end{array}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

Получаем

$$\boxed{x = \frac{1}{9}}$$
$$\boxed{x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}}$$

Проверка:

$$\textcircled{1} \quad x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{37}{37}} - \sqrt{\frac{37}{37}} = 0$$

$$0 = 0$$

Все верно, корень подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6 + 2\sqrt{78}$$

$$(2) \quad x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right)^2 - 6 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} + 2} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right)^2 + 3 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} + 1} =$$

$$= 1 - \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\sqrt{\frac{3(36 + 4 \cdot 78 + 24\sqrt{78})}{69 \cdot 69} - \frac{38(6 + 2\sqrt{78})}{69 \cdot 23} + \frac{138}{69}} = \sqrt{\frac{3(36 + 4 \cdot 78 + 24\sqrt{78})}{69 \cdot 69} + \frac{3(6 + 2\sqrt{78})}{69 \cdot 23} - \frac{63}{69}} =$$

$$= \frac{69}{69} - \frac{38(6 + 2\sqrt{78})}{69 \cdot 23}$$

$$\sqrt{\frac{36 + 312 + 24\sqrt{78}}{23 \cdot 69} - 69 \cdot 2(6 + 2\sqrt{78}) + 138 \cdot 23} = \sqrt{\frac{36 + 3(2 + 24\sqrt{78}) + 69(6 + 2\sqrt{78}) + 69 \cdot 23}{69 \cdot 23}} =$$

$$= \frac{23 \cancel{69} - (18 + 6\sqrt{78})}{23}$$

$$\sqrt{\frac{348 + 24\sqrt{78} - 138 \cdot 6 - 276\sqrt{78} + 3174}{3}} = \sqrt{\frac{348 + 24\sqrt{78} + 69 \cdot 6 + 138\sqrt{78} + 1584}{3}} =$$

$$= 5 - 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{\frac{348 + 24\sqrt{78} - 138 \cdot 6 - 276\sqrt{78} + 3174 - 348 - 24\sqrt{78} - 138 \cdot 3 - 138\sqrt{78} - 1584}{3}} =$$

$$= 5 - 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{\frac{1584 - 138 \cdot 9 - 138 \cdot 3\sqrt{78}}{3}} = 5 - 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{529 - 414 - 138\sqrt{78}} = 5 - 6\sqrt{78}$$

$$115 - 138\sqrt{78} = 25 + 36 \cdot 78 - 60\sqrt{78}$$

$$2718 = -78\sqrt{78}$$

$$6 + 2\sqrt{78}$$

неверно.

$$x \neq \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{a} \text{ Две } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \geq 4^2 \end{cases}$$

решение будет находиться
внутри и на окружности $\textcircled{2}$

$$\textcircled{8} \text{ Две } \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \leq 4^2 \end{cases}$$

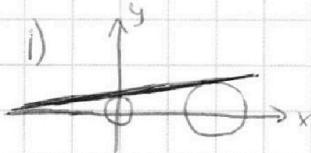
решение будет находиться
внутри и на окружности $\textcircled{3}$

Чтобы решение было ровно при обрезании
решений \textcircled{a} и $\textcircled{8}$ и пересечении с прямой,
прямая должна касаться каждой из окружностей.

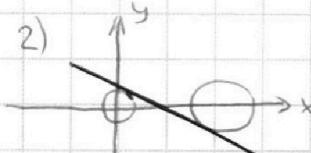
Всего возможно 4 случая:

(при первом случае: 1) ~~○○~~ 2) ~~○○~~ 3) ~~○○~~ 4) ○○)

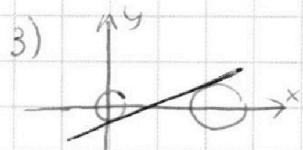
Найдем соответствующие a и b .



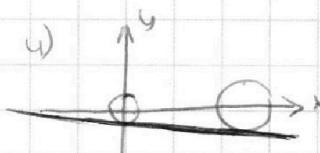
$$y = -ax + b \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in [-1; 1] \\ x \in [-4; 4] \\ y \in [-1, 1] \end{array} \right.$$



$$\textcircled{4}: \left\{ \begin{array}{l} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + a^2x^2 + b^2 - 2abx = 1 \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} x^2(1+a^2) + x(-2ab) + (b^2-1) &= 0 \\ x = \frac{-2ab \pm \sqrt{4a^2b^2 - 4(1+a^2)(b^2-1)}}{2(1+a^2)} \\ x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - b^2 + 1 - a^2b^2 + a^2}}{1+a^2} &= \frac{ab \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{1+a^2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

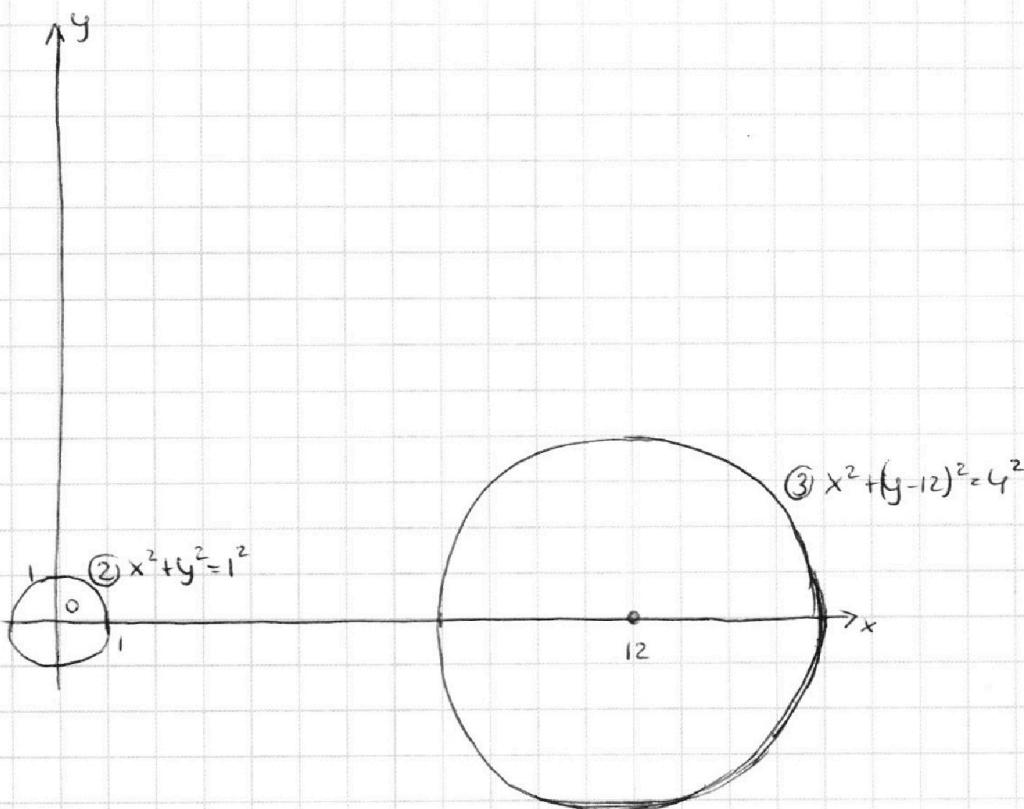
$$\begin{cases} ax + y + 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax - 8b \quad \text{или} \quad y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 \leq 1^2 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 1^2 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 4^2 \\ x^2 + (y-12)^2 = 4^2 \end{cases}$$

① - прямая

② и ③ - окружности

Изобразим ①, ② и ③ графически либо \emptyset , ②, ③.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

NF

членов г

Равные дуги замыкают равные хорды,

значит, $AN = NC$, $AM = MB$.

MH_1 и NH_2 - высоты в равнобедренных

треугольниках (из вершин), а значит, они

же и перпендикульны. Если продолжить MH_1 и NH_2

до пересечения, получим точку O , $MH_1 \cap NH_2 = O$,

то O -центр описанной окружности $\odot ABC$ окружности,

все MH_1 и NH_2 - серединные перпендикуляры $\odot ABC$.

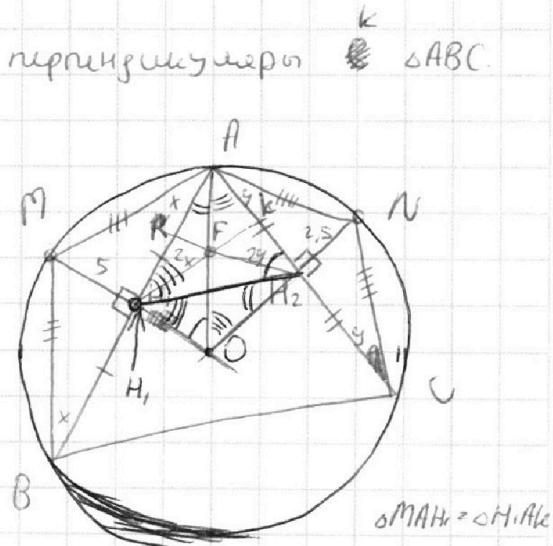
(MH_1 - перп. от M до AB ,

NH_2 - перп. от N до AC)

$MH_1 = 5$; $NH_2 = 2,5$

AH_1, OH_2 можно вписать в окр.

(тк $\angle AHO + \angle AHO = 180^\circ$)



$\Rightarrow \angle AON = \angle AH_1 H_2 = 2 \angle ACN$ (внешний угол)

$\angle AOM = \angle AH_2 H_1 = 2 \angle MBA$

пересечение в F

\Rightarrow проведен биссектриса $\angle AH_1 H_2 \sim \angle AH_2 H_1$, образующая
 $= \angle CAN = \angle MAB$ $F = 2AF$
член, равные соответствующие $\angle ACN \sim \angle MBA$

$AH_1, AH_2 \sim \odot ABC$ $\sim k=2$, тк $AH_1 = \frac{1}{2}AB$, $AH_2 = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \frac{AF}{k} = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

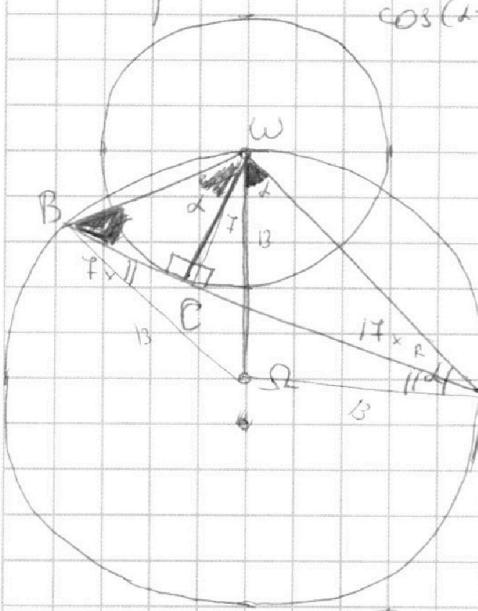
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = 2 \cdot \sin \frac{45^\circ}{2} \cos \frac{45^\circ}{2}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$\angle WC = 7$$

$$\Omega W = 13$$



$$\angle WCA = \frac{180 - \gamma}{2}$$

$$\angle WBA = \frac{\angle WCA}{2} = \frac{90 - \delta}{2}$$

$$\angle BWC = 90 - \angle WBA = 90 - \frac{90 - \delta}{2}$$

$$\frac{90 - \delta}{2} + \beta = \frac{90 + \gamma}{2} + \gamma$$

$$\gamma = 90 - R - \delta \quad \tan 45^\circ = \tan \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\tan 30 + 30 = \tan 30 \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan 30 + 60 = \tan 45 \cdot \tan \frac{\beta}{2}$$

~~$$\frac{90 - \delta}{2} + \beta = \frac{90 + \gamma}{2} + 90 - \delta - \delta + \beta$$~~

~~$$\frac{90 - \delta - 90 + \delta}{2} = 90 - 2\delta$$~~

$$\delta = R$$

~~$$-\delta = 90 - 2\delta$$~~

~~$$\angle C \text{ outer angle}$$~~

~~$$\delta = 90$$~~

$$(\tan(\alpha+\beta) = \frac{17x}{h})$$

$$\angle BCA = 180 - 2\delta \quad \tan \delta = \frac{7x}{h}$$

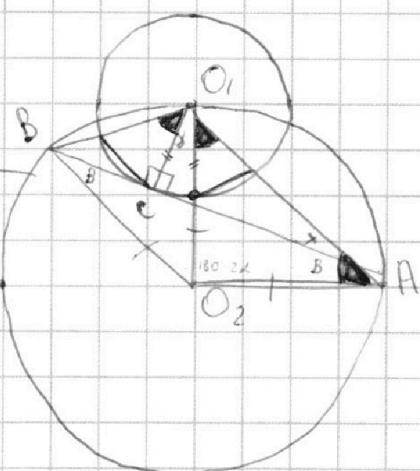
$$\angle WBA = \frac{\angle BCA}{2} = 90 - \delta \quad \tan(\delta + \beta) = \frac{\tan \delta}{17}$$

$$\angle BWC = 90 - \angle WBA = \delta$$

$$B + (90 - \delta) = \delta + (90 - (180 - 2\delta - \beta))$$

$$B + 90 - \delta = \delta + 90 - 2\delta + \beta$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$



$$\beta + 90 - \delta = \delta + (90 - (180 - 2\delta - \beta + \gamma))$$

$$\gamma = 180 - 90 - \beta - (180 - 2\delta - \beta + \gamma)$$

$$\gamma = 2\delta$$

$$2\delta = 90 - \beta \quad 90 + 180 - 2\delta - \beta + \gamma$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a + b = xm \\ (a+b)^2 - 9ab = ym \end{cases}$$

$$a = xm - b$$

$$(xm^2 - 2xb + b^2) - 9ab = ym$$

$$9b^2 + xm(xm - 9b) - ym = 0$$

$$(xm)^2 + xm(-9b) + (9b^2 - ym) = 0$$

xm - парабола

$$xm = \frac{1}{2} \frac{9b \pm \sqrt{81b^2 - 36b^2 + 4ym}}{2} = \frac{9b \pm \sqrt{45b^2 + ym}}{2}$$

$$xm = \frac{gB \pm \sqrt{45b^2 + 4a^2 + 4b^2 - 28ab}}{2}$$

$$gB = \frac{-9b}{2} = 4,5b$$

$$xm = \frac{gB \pm \sqrt{(-b - 2a)^2}}{2}$$

$$xm = \frac{gB \pm 18 - 2a}{2}$$

$$xm = \frac{gB \pm (-b - 2a)}{2} = \frac{b(9 \pm 7)}{2} \pm \frac{2a}{2} = b(4,5 \pm 3,5) \pm a$$

$$4,5b = a + b$$

$$a = 3,5b$$

$$- \frac{22}{45} b$$

$$\begin{cases} 8b + a \\ 8b - a \\ b + a \\ b - a \end{cases}$$

$$a, b = 6, b - a$$

$$m \cdot x = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{18}{45b} : g = -\frac{2}{5b}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

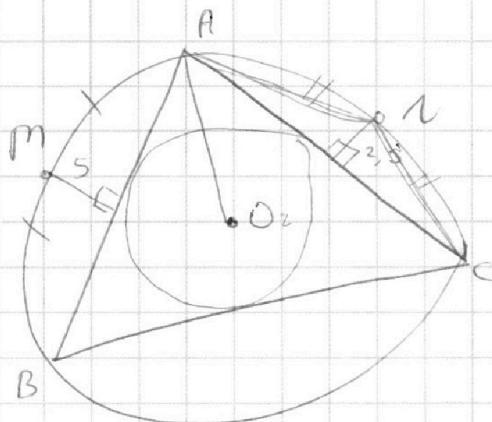
4

5

6

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad 5\sqrt{6}\sqrt{78}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad 1 + \frac{3(6+2\sqrt{78})}{69\sqrt{23}} = \frac{23+6+2\sqrt{78}}{23\sqrt{6}\sqrt{78}}$$

$$1 - 9x \geq 6 \quad 2 - \frac{36+12\sqrt{78}}{69\sqrt{23}}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad \sqrt{b} - \sqrt{a} = b-a \quad \frac{46-12-4\sqrt{78}}{23} \quad \frac{34-5\sqrt{78}}{23}$$

$$b-a = b^2 + a^2 - 2ab \quad b+a - 2\sqrt{ab} = b^2 + a^2 - 2ab$$

$$a^2 + a(1-2b) + (b^2 - b) = 0 \quad b+a+2ab - b^2 - a^2 = 2\sqrt{ab}$$

$$a = \frac{2b-1 \pm \sqrt{1+4b^2-4b-4b^2+4b}}{2} \quad \sqrt{b} - \sqrt{a} = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$$

$$a = \frac{2b-1 \pm 1}{2} \quad (b-\sqrt{a})(1-\sqrt{b}-\sqrt{a}) = 0$$

$$a = b - \frac{1 \pm 1}{2}$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{a} \quad \begin{array}{l} 69 \\ 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \times 23 \\ 207 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 2 - \frac{1 \pm 1}{2} \quad \begin{array}{l} 138 \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$9x = 1 - \frac{1 \pm 1}{2} \quad \begin{array}{l} a = b \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$x = \frac{1}{9} \quad \begin{array}{l} 138 \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$x = 0 \quad \begin{array}{l} 138 \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$a^2 + a(-2-2b) + (b^2 - 2b + 1) = 0 \quad * \quad \begin{array}{l} 138 \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$a^2 + a(-2-2b) + (b-1)^2 = 0 \quad \begin{array}{l} 138 \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$(a^2 + 2a(1+b) + (b-1)^2 = 0) \quad \begin{array}{l} 138 \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$2 + 2b \pm \sqrt{4 + 4b^2 + 8b - 4b^2 - 4 + 8b} = 0 \quad \begin{array}{l} 138 \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$a = \frac{2 + 2b \pm \sqrt{4 + 4b^2 + 8b - 4b^2 - 4 + 8b}}{2} \quad \begin{array}{l} 138 \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$a = 1 + b \pm \frac{\sqrt{16b}}{2} = 1 + b \pm \frac{4\sqrt{b}}{2} = 1 + b \pm 2\sqrt{b} \quad \begin{array}{l} 138 \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \\ 138 \\ 138 \\ \hline 69 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} ab \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\ bc \quad x \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \\ ac \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \end{array} \times a^2 b^2 c^2 = 2^{14} \cdot 3^{10} \cdot 5^5 \cdot 7^8$$

abc = 2^14 \cdot 3^10 \cdot 5^5 \cdot 7^8 \quad (\text{не кратно})

min abc

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} =$$

a + b \text{ кратно } m

$$a^2 + b^2 - 9ab \mid m$$

$$\begin{cases} a+b \mid m \\ (a+b)^2 - 9ab \mid m \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ m \end{matrix} \quad \begin{cases} -9ab \mid m \\ a+b \mid m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = xm \\ -9ab = ym \end{cases} \quad :2$$

$$\begin{cases} a+b = xm \\ -9ab = ym \end{cases} \quad :9$$

$$a = xm - b$$

$$-9xm + 9b^2 = ym$$

$$9b^2 - 9b \cdot xm - ym = 0$$

$$b = \frac{9xm \pm \sqrt{81x^2m^2 + 36ym}}{18}$$

$$xm : 2 \quad \frac{\cancel{9} \sqrt{x^2m^2 + 4ym}}{\cancel{36}} : 6$$

$$\frac{a}{b+c} = \frac{x}{b} + \frac{y}{c}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{x}{(a+b)^2 - 9ab} + \frac{y}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{x(a+b)}{(a+b)^2 - 9ab} + \frac{y}{9ab}$$

$$(a+b)$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{x}{(a+b)^2} + \frac{y}{-9ab}$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad -(a+b)^3 9ab = -9ab((a+b)^2 - 9ab)x + y(a+b)^2(a^2 + b^2 - 7ab)$$

$$(a+b)^2 (+9ab(a+b) + y(a^2 + b^2 - 7ab)) = 9ab(a^2 + b^2 - 7ab)$$

$$(a+b)^2 (9a^2b + 9ab^2 + ya^2 + yb^2 - 7ab)$$

$$x = \frac{9ab(a^2 + b^2 - 7ab)}{9ab(a^2 + b^2 - 7ab)}$$

$$9ab(a^2 + b^2 - 7ab) = 0$$

$$9xm \pm 3\sqrt{9x^2m^2 + 4ym} \quad \in \mathbb{N}$$

€ N

$$xm : 2 \\ ym : 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



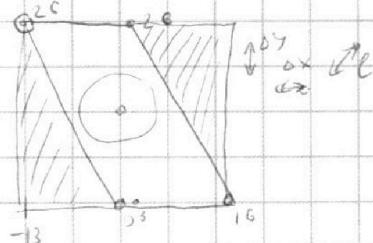
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$



$$2\Delta x + \Delta y = 14$$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = l^2$$

$$\Delta y = 14 - 2\Delta x$$

$$\Delta x^2 + 196 + 4\Delta x^2 - 56\Delta x + l^2$$

$$l^2 = 56\Delta x^2 - 56\Delta x + 196$$

l - радиус окр.

$$\begin{cases} ax + y - 8B = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

2 реш.

$$\begin{cases} y = -ax + 8B \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + s^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (s-12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

