



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть максимальная степень бокондема 2
 $a = 2^m \cdot x$ (т.е. $a \mid 2^x$, $a \nmid 2^{x+1}$), $b = 2^n \cdot y$,
 $(\text{т.е. } b \mid 2^y, b \nmid 2^{y+1})$, $c = 2^p \cdot z$ (т.е. $c \mid 2^p$, $c \nmid 2^{p+1}$).

Тогда $ab : 2^{x+2}$, $ab \nmid 2^{x+2+1} \cdot 2$, т.е. $ab : 2^{x+y}$, $ab \nmid 2^{x+y+1}$
~~аб~~ $ab : 2^{15}$, т.е. $x+y \geq 15$

Тогда $bc : 2^y \cdot 2^z$, $bc \nmid 2^y \cdot 2^z \cdot 2$, т.е. $bc : 2^{y+z}$, $bc \nmid 2^{y+z+1}$
 $bc : 2^{17}$, т.е. $y+z \geq 17$

Тогда $ac : 2^x \cdot 2^z$, $ac \nmid 2^x \cdot 2^z \cdot 2$, т.е. $ac : 2^{x+z}$, $ac \nmid 2^{x+z+1}$
 $ac : 2^{23}$, т.е. $x+z \geq 23$

$$\text{т.е. } \begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 15+17+23 \Rightarrow x+y+z \geq \frac{55}{2}$$

$$\text{т.е. } x+y+z \geq 27\frac{1}{2}$$

т.к. x, y, z - макс. степени бокондема 2 по a, b, c
 соответственно, $x, y, z \in \mathbb{N}$, $x, y, z \geq 0$
 $x+y+z \in \mathbb{Z}$
 $x+y+z \geq 28$

~~т.е.~~ $abc : 2^x \cdot 2^y \cdot 2^z$, т.е. $abc : 2^{x+y+z}$, т.е. $abc : 2^{28}$

~~т.е.~~ $ac : 7^{39}$, т.е. $abc : 7^{39}$

т.к. $\text{НОД}(7, 2) = 1$, $abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$

$a, b, c \in \mathbb{N}$, т.е. $abc > 0$, т.е. $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

Согласованно наименее возможное abc
 $2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример: $a = 7^{16} \cdot 2^{11}$, $b = 2^{14} \cdot 7^{14}$, $c = 7^{23} \cdot 2^{73}$

Тогда $ab = 7^{16} \cdot 2^{11} : 2^{15} \cdot 7^{11} = 2^{15} \cdot 7^{11}$, $bc = 7^{23} \cdot 2^{73} : 2^{17} \cdot 7^{18} = 7^{23} \cdot 2^{73}$,

$ac = 7^{39} \cdot 2^{24} : 7^{39} \cdot 2^{23} = 2^{24}$

$abc = 7^{16} \cdot 2^{11} \cdot 2^{24} \cdot 7^{23} \cdot 2^{73} = 7^{39} \cdot 2^{28}$

Ответ: $7^{39} \cdot 2^{28}$

①



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Пусть мы можем сократить эту дробь ^{простое} на m ,
 т.е. $a+b \vdots m$, $(a+b)^2 - 9ab \vdots m$
 и.к. $a+b \vdots m$, $(a+b)^2 \vdots m$ ~~и.к.~~
 и.к. $(a+b)^2 - 9ab \vdots m$ ~~и.к.~~ $9ab \vdots m$

Очевидно находимся в 2 видах случаев:

- 1) $ab \vdots m$, то и.к. $\frac{ab}{m}$ неократима $\text{НОД}(a,b)=1$,
 и.к. если $ab \vdots m$, то или $a \vdots m$, или $b \vdots m$, но
~~если~~ и.к. $a+b \vdots m$, если $a \vdots m$, то и $b \vdots m$, а если
 $b \vdots m$, то и $a \vdots m$, и.к. $\text{НОД}(a,b)=1$ $m=1$
- 2) $9 \vdots m$, и.к. $m=3$.

Получаем мы же можем сократить нашу
 дробь на какое простое число, кроме 3

Пусть мы сократим на 3^x , где $x \geq 3$, тогда
 мы можем сократить на $3^3 = 27$

Пусть $a+b \vdots 27$, и.к. $a+b \vdots 3$, и.к. $\text{НОД}(a,b)=1$
 $a \equiv_3 -b$ ~~предположим~~ $\neq 0$, и.к. и.к. $a \equiv_3 1$, $b \equiv_3 -1$, и.к.
 $a \equiv_3 -1$, $b \equiv_3 1$, b однозначно $\equiv_3 1$, и.к. $ab \equiv_3 -1$, и.к. $ab \vdash 3$
 и.к. $9ab \vdash 9 \cdot 3$, и.к. $9ab \vdash 27$, и.к. $(a+b)^2 - 9ab \vdash 27$, и.к.
 мы можем сократить на 27, и.к. $(a+b)^2 \vdash 27$, и.к.
 и.к. $a+b \vdash 27$, и.к. $9ab \vdash 27$. Противоречие.

Следовательно мы можем сократить ~~все~~
~~один~~ не больше, чем на 3^x , где $x \leq 2$

Следовательно наименьшее $m = 3^2 = 9$

Пример: $a=1, b=2$

Тогда $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{1+2}{1-14+4} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$ - неократимая дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{1-18+36} = \frac{9}{9} = 1 \quad \text{и.к. получаем дробь} \\ \text{и.к. можем сократить на 9}$$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (1 - 9x)$$

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0$$

$$1) 1 - 9x = 0, \text{ т.к. } x = \frac{1}{9}$$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\text{тогда } \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 9x$$

$$\text{т.к. } 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 4(9+69) = 4 \cdot 78 = 8 \cdot 39 = 8 \cdot 3 \cdot 13$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13}}{23} = \frac{2}{23} \pm \frac{2\sqrt{26}}{23\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$x = \frac{2}{23} \left(1 - \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right)$$

Первое проверим нападком на машину решения
однажды определения.

$$3x^2 + 3x + 1 = 3(x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} = 3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x - 1)^2 - 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0, \text{ т.к. мы берём корень, т.к. } 3(x - 1)^2 \geq 1$$

$$\text{т.к. } (x - 1)^2 \geq \frac{1}{3}, \text{ т.к. } \begin{cases} x - 1 \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x - 1 \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \\ x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$1) \frac{1}{9} < \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}, \text{ т.к. } \sqrt{3} < 9\sqrt{3} - 9, \text{ т.к. } 9 < 8\sqrt{3}, \text{ т.к. } 81 < 864 - 3$$

$$2) \frac{2}{23} \left(1 - \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{23} \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) < 0 < \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \quad \text{нападаем в один раз}$$

$$3) \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{23} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{26}}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \quad \text{т.к. } 2\sqrt{3} + 2\sqrt{26} < 23\sqrt{3} + 23, \\ \text{т.к. } 2\sqrt{26} < 21\sqrt{3} + 23, \\ \text{т.к. } 2\sqrt{26} < 12 < 23 + 23$$

(3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) \checkmark 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2 \left(\sqrt{3} + \sqrt{26} \right) \checkmark 23 \left(\sqrt{3} - 1 \right)$$

$$2 \sqrt{26} \checkmark 21 \sqrt{3} - 23$$

$$4 \cdot 26 \checkmark 21^2 \cdot 3 + 23^2 - 2 \cdot 23 \cdot 21 \sqrt{3}$$

$$2 \cdot 23 \cdot 21 \sqrt{3} \checkmark 21^2 \cdot 3 + 23^2 - 4 \cdot 26 = 1323 + 529 + 80 - 24 = \\ = 1243 + 505 = 1748$$

$$996 \sqrt{3} \checkmark 1748$$

$$\sqrt{3} \checkmark \frac{1748}{996} = \frac{437}{249}$$

$$249 \sqrt{3} \checkmark 437$$

$$249^2 \checkmark 437^2$$

$$186003 \checkmark 190969$$

$$186003 < 190969$$

$$\text{an } \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 42 \\ \hline 96 \\ + 92 \\ \hline 449 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \\ \times 27 \\ \hline 1323 \\ + 27 \\ \hline 449 \end{array} \quad \begin{array}{r} 441 \\ \times 3 \\ \hline 1323 \\ + 69 \\ \hline 46 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 69 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 249 \\ \hline 996 \\ + 48 \\ \hline 1748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 437 \\ \times 437 \\ \hline 1748 \\ + 1311 \\ \hline 3059 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62001 \\ \times 249 \\ \hline 2241 \\ + 996 \\ \hline 498 \\ \hline 62001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1748 \\ + 1311 \\ \hline 3059 \end{array}$$

и. в. маши алгеброй решен в единице опре-
делимъ

Ответ: $\left\{ \frac{1}{9}; \frac{2}{23} \left(1 - \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right); \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) \right\}$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \\ y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

если $x^2 + y^2 \leq 1$ и $x^2 + (y - 12)^2 \leq 16$
- где пересекаются
окружности
и касаются

Недоладка:

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

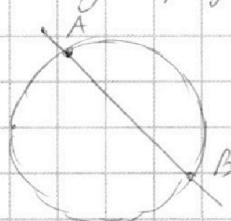
Если прямая $y = -ax + 8b$ пересекает одну из окружностей ℓ^2 в 2 точках, тогда у нас есть система линейное как-то решений, т.к. одна точка определяет сдвигом другим две точки пересечения (хорда одной из окружностей) является решением системы.

(Все точки
отр. AB для
решений)

Недоладка прямая $y = -ax + 8b$ - касательная к одному окружностям

(если она будет касательной одной, и не пересекают другую, тогда будет 1 решение, если же пересекают обе, то 0, если пересекать хотя бы одну из окружностей ℓ^2 в 2 точках, тогда линейное как-то решений).

$$\text{и. } \begin{cases} y = -ax + 8b & \text{I} \\ x^2 + y^2 = 1 & \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 & \text{II} \end{cases}$$



Интересно отметить, что решения при заданных a и b (y I система 1 решение, и y II 1 решение)

$$\text{I. } \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (ax - 8b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{сн. } (a^2+1)x^2 - 16abx + (64b^2-1) = 0 \text{ имеет единственный реш.}$$

$$\text{сн. } D_{\text{нк}} = 0, \text{ сн. } \frac{D}{4} = 0$$

$$\frac{D}{4} = 64a^2b^2 - (64b^2-1)(a^2+1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 + 24(ax - 8b) + 144 = 16 \end{cases}$$

$$\text{сн. } (a^2+1)x^2 - x(16ab - 24a) + (64b^2 - 8 \cdot 24b + 144 - 16) = 0$$

$$16ab - 24a = 8a(2b - 3) \quad \text{имеет единственный реш.}$$

$$\text{сн. } D=0, \text{ сн. } D_{\text{нк}}=0$$

$$64b^2 - 8 \cdot 24b + 144 - 16 = 64b^2 - 8 \cdot 24b + 128 = 64b^2 - 3 \cdot 64b + 64 \cdot 2 = \\ = 64(b^2 - 3b + 2)$$

$$\Delta \neq 16a^2(2b-3)^2$$

$$\frac{D}{4} = 16a^2(2b-3)^2 - 64(b^2 - 3b + 2)(a^2+1) = 16a^2(4b^2 - 12b + 9) -$$

$$- 64(16a^2b^2 - 3a^2b^2 + 12a^2b + 12a^2b^2 - 3a^2b + 2)a^2 - 64(b^2 - 3b + 2) =$$

$$= 64a^2b^2 - 16 \cdot 12a^2b^2 + 16 \cdot 9a^2 - 64a^2b^2 + 16 \cdot 12a^2b^2 - 64 \cdot 2a^2 -$$

$$- 64(b^2 - 3b + 2) = 16(9a^2 - 8a^2) - 64(b^2 - 3b + 2) = 0$$

$$\text{сн. } a^2 - 4(b^2 - 3b + 2) = 0, \text{ сн. } a^2 = 4(b^2 - 3b + 2)$$

$$\text{сн. } \begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ a^2 = 4(b^2 - 3b + 2) \end{cases} \quad \begin{aligned} 64b^2 - 1 &= 4b^2 - 12b + 8 \\ 60b^2 + 12b - 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 9 \cdot 60 = 6 \cdot (6+90) = 6 \cdot 96 = 6 \cdot 6 \cdot 16 = (6 \cdot 4)^2 = 24^2$$

$$\text{сн. } b = \frac{-6 \pm 24}{60} \quad b = \frac{-1 \pm 4}{10}, \text{ сн. } \begin{cases} b = -0,5 \\ b = 0,3 \end{cases}$$

$$a^2 = \sqrt{64b^2 - 1}, \text{ сн. } \begin{cases} a = \sqrt{\frac{64}{4} - 1} \\ a = \sqrt{\frac{64 \cdot 9}{100} - 1} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = \sqrt{16 \cdot 9 - 25} : 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = \sqrt{144 - 25} : 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = \frac{\sqrt{119}}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

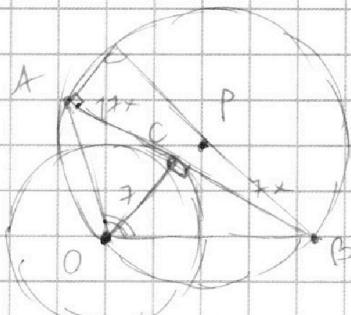


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$b^2 : m \quad a+b : m$$

$$(a+b)^2 : m^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 : m^2 \\ \cancel{a^2 + 2ab + b^2} : m^2$$



$a+b : m$, $\cancel{a^2 + 2ab + b^2}$

$$\text{1) } ab : m, \text{ m.r. } \text{HCF}(a,b) = 1 \quad [a : m, \text{ m.a+b : m}]$$

$$a : m \quad b : m \quad (\times)$$

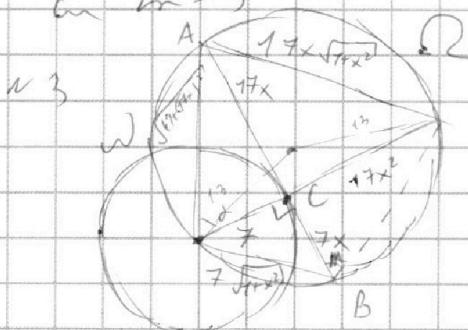
$$\text{2) } ab : k \quad m = 3k \quad \text{3) } ab : k \quad m = 9k$$

$$a+b : 3k, \text{ m.a+b : k}$$

$$a : k \\ b : k$$

$$\text{m.k} = 1$$

$$\text{m.m} = 3$$



$$a+b : 9k, \text{ m.a+b : k}$$

$$a : k \\ b : k$$

$$\text{m.k} = 1$$

$$\text{m.m} = 9$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 19$$

$$(1) 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$(2) 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$(1) D = 36 - 64 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(2) D = 9 - 12 < 0$$

$$(1-9x)\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right) = 1-9x$$

$$1-9x=0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1$$

с.н.

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15+11} \\ bc &: 2^{17+13} \\ ac &: 2^{23+7+39} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{x_a} \cdot 7^{y_a} \cdot k_a \\ b &= 2^{x_b} \cdot 7^{y_b} \cdot k_b \\ c &= 2^{x_c} \cdot 7^{y_c} \cdot k_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{15+7+11} \\ bc &= 2^{17+7+13} \\ ac &= 2^{23+7+39} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_a + x_b + x_c &\geq 15+17+39 - 27 = 25 \\ x_a + x_b + x_c &\geq 28 \\ y_a + y_b + y_c &\geq 16+11+39 - 27 = 34 \\ y_a + y_b + y_c &\geq 34 \\ ab &: 2^{x_a+x_b+x_c} \\ abc &: 2^{x_a+x_b+x_c} \end{aligned}$$

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac : 2^{11} = 2^{23+17+15} \cdot 2^{39+11+11} = 2^{76}$$

$$a = 7^{16} \cdot 2^{10} \sqrt{2}$$

$$2^{55} \cdot 7^{63}$$

$$abc \geq \sqrt{2^{55} \cdot 7^{63}} = 7^{34} \cdot 2^{28}$$

$$\begin{aligned} a &= 7^{16} \cdot 2^{10} \\ c &= 7^{23} \cdot 2^{13} \\ b &= 7^{34} \cdot 2^{28} \end{aligned}$$

$$\min(abc) = 7^{34} \cdot 2^{28}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{15+7+11} \\ c &= 2^{23+7+39} \\ b &= \end{aligned}$$

$$\frac{a+b}{a^2+7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a^2+2ab+b^2)-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \geq \frac{1}{(a+b)^2-9ab} = \frac{1}{z^{15+17+11}}$$

$$= \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \quad a+b \mid m \quad (a+b)(a+b-1) = 1 \quad (x+y+z) \geq \frac{40+15-1}{2} = 27 \frac{1}{2}$$

$$9ab \equiv_m -9b^2 \equiv 0$$

$$a+b \geq 23$$

$$\begin{cases} b^2 \mid m \\ 9 \mid m \quad \max(m)=9 \end{cases}$$

$$\frac{1+b}{(1+b)^2-9+8} = \frac{9}{9} = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

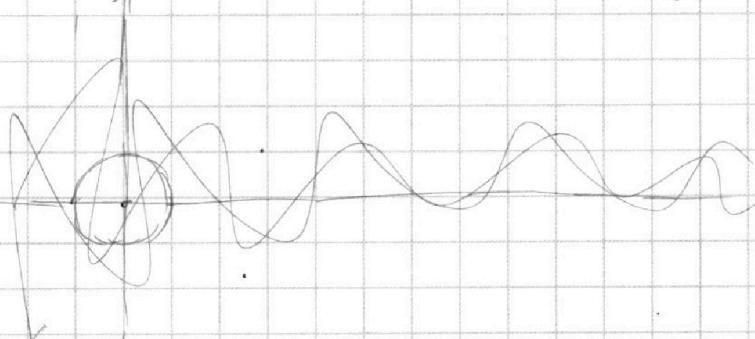
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2) \geq 1 \\ (x^2 + (y-12)^2) \leq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$



$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = -ax + 8b$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1$$

$$x^2 + a^2 x^2 - 16abx + 64b^2 = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + (64b^2 - 1) = 0$$

$$D = 16^2 a^2 b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 0$$

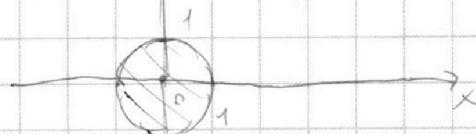
$$4(16^2 a^2 b^2 - 64a^2 b^2 + 64b^2 + a^2 + 1) = 0$$

$$64b^2 - a^2 - 1 = 0$$

$$b^2 = (a^2 + 1) : 64$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 12)^2 &= 16 \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 &= 16 \\ x^2 + y^2 &= 24y - 128 \end{aligned}$$



—

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$x^2 + (ax + b)^2 + 24(ax + b) + 144 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 + 24ax - 24 \cdot 8b + 144 = 16$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x(16ab - 24a) + 64b^2 - 24 \cdot 8b + 144 - 16 = 0$$

$$\frac{1}{a^2+1}x^2 + x(16ab - 24a) + 64b^2 - 24 \cdot 8b + 144 - 16 = 0$$

$$64b^2 - 3 \cdot 64b + 128 = 0$$

$$128 = 8 \cdot 16 = 8^2 \cdot 2 = 64 \cdot 2$$

$$64(b^2 - 3b + 2)$$

$$16a^2(2b - 3)^2 - (a^2 + 1)64(b^2 - 3b + 2) = 0$$

$$a^2(2b - 3)^2 - a^2 4(b^2 - 3b + 2) - 4(b^2 - 3b + 2) = 0$$

$$\underbrace{a^2(4b^2 - 12b + 9)}_{9a^2} - \underbrace{4a^2(b^2 - 3b + 2)}_{4a^2} = 4(b^2 - 3b + 2)$$

$$a^2 = 4(b^2 - 3b + 2)$$

$$64b^2 - 1$$

$$64b^2 - 1 = 64b^2 - 12b + 2$$

$$64b^2 + 12b - 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 576 \quad 36 \\ 36 \quad 16 \\ - 216 \\ \hline 216 \\ - 216 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 9 \cdot 60 = 36 + 540 = 576$$

$$b = \frac{-6 \pm \sqrt{576}}{60} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{576}{36}}}{10} = \frac{-1 \pm 4}{10}$$

$$b = 0,3 ; b = -0,5$$

1/3

$\frac{5}{9}$
 $\frac{16}{4}$
 $\frac{144}{25}$
 $- 25$
 $\hline 19$

$$a^2 = 64b^2 - 1 = \frac{64}{4} - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$a^2 = 64b^2 - 1 = \frac{16 \cdot 9 - 25}{25} - 1 = \frac{144 - 25}{25} = \frac{119}{25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3(x^2 - 2x + 1) - 1} + \sqrt{3(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} + \sqrt{(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} + \sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$y = x - 1$$

$$\sqrt{3y^2 - 1} + \sqrt{3(y + \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3y^2 - 1} + \sqrt{3y^2 + 9y + 3\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3y^2 - 1} + \sqrt{3y^2 + 9y + 7} = 1$$

$$\sqrt{z} + \sqrt{z + 9y + 8} = 1$$

$$\frac{z}{23} \frac{\sqrt{3} + \sqrt{26}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{7}{77x} = \frac{7x}{y}$$

$$y = \frac{7x \cdot 77x}{7} = 17x^2$$

$$7^2 + (7x)^2 = 7^2(7+x^2)$$

$$(17x)^2 + (77x^2)^2 = 77^2(x^2 + x^4) = 77^2x^2(7+x^2)$$

$$(7x^2)^2 + (17x^2)^2 = x^2 \cdot 49 + 77^2x^4 = x \sqrt{49 + 77^2x^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{77x}{\sqrt{49 + 77^2x^2}}$$

$$\frac{77x \sqrt{7+x^2}}{\sin \alpha} = 2R = 26$$

$$17x \sqrt{7+x^2} = \frac{26 \cdot 17x}{\sqrt{49 + 77^2x^2}}$$

$$17x (\sqrt{7+x^2} \sqrt{49+77^2x^2}) = 26 \cdot 17x$$

$\begin{array}{r} 26 \\ \times 17 \\ \hline 182 \\ + 26 \quad 119 \\ \hline 442 \\ + 156 \quad 19 \\ \hline 598 \\ 269 \quad 1 \\ \hline 289 \\ 2 \\ \hline 577 \end{array}$

 $(1+x^2)(49+(77^2x^2)) = 49+77^2x^2$
 $17^2x^4 + (49+17^2)x^2 + 49 - 26^2 = 0$
 $23+2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3}-23}$
 $2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3}-23}$
 $49+77^2x^2$
 $23+2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3}}$
 $26 \cdot 17x$
 45

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

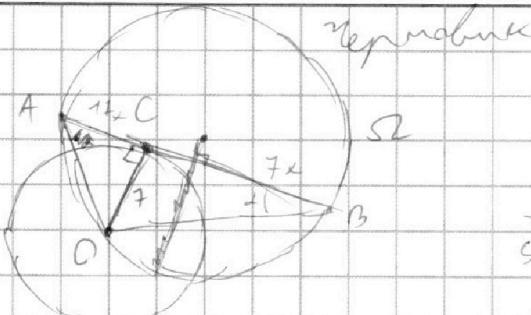
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}7^2 &= 49 \\17^2 &= 289 \\7^2 + 17^2 &= 332 \\169 &= 7^2 \quad 627\end{aligned}$$

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 36 + 4 \cdot 69 = 36 + 276 = \\&= 312 = 2156 = \\&= 4 \cdot 78 = \\&= 8 \cdot 39 = \\&= 8 \cdot 3 \cdot 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{6}{69} \pm \frac{\sqrt{8 \cdot 3 \cdot 13}}{69} = \frac{2}{23} \pm \frac{2\sqrt{693}}{3 \cdot 23} = \frac{2}{23} \pm \frac{2}{23} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} = \\&= \frac{2}{23} \left(\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right)\end{aligned}$$

$$\sin \angle = \frac{7}{\sqrt{(17^2 + 7^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{AC}{sin \angle} = 2R = 26$$

$$AC = 26 \sin \angle = \frac{26}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$AC = \sqrt{(17x)^2 + 7^2}$$

$$\sqrt{((17x)^2 + 7^2)(1+x^2)} = 26$$

$$\begin{aligned}17^2 x^4 + (7^2 + 17^2) x^2 + 7^2 - 26^2 &= 0 \\17^2 y^2 + (7^2 + 17^2) y + 7^2 - 26^2 &= 0 \\19^2 y^2 + 33^2 y - 627 &= 0\end{aligned}$$

$$y_1 = 3, y_2 = -23$$

$$\begin{aligned}D &= 13^4 + 17^2 \cdot (13^2 - 2^2 - 7^2) = \\&= 13^4 + 2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 + 17^2 \cdot 7^2 - 7^2 = \\&= (13^2 + 17^2)^2 - 19^4 - 7^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}69 &= 3 \cdot 23 \\69 &\cancel{\mid 3} \\69 &\cancel{\mid 9} \\2 &\cancel{\mid 6}\end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x = 12 \cdot 7x$$

$$(13+y)(13-y) = (12x)^2$$

$$169 - y^2 = 144x^2$$

$$y = \sqrt{169 - 144x^2}$$

$$(17x^2 + 7^2)(x^2 + 1) = 16 \cdot 13^4$$

$$17^2x^4 + (17^2 \cdot 7^2)x^2 + (7^2 - 16 \cdot 13^4) = 0$$

$$289x^4 + 2 \cdot 169x^2 -$$

289

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} =$$
$$= \left(\frac{14}{x_2 - x_1} - 2 \right)$$

$$y = \left(\frac{14}{x_2 - x_1} - 2 \right)(x - x_1) + y_1$$

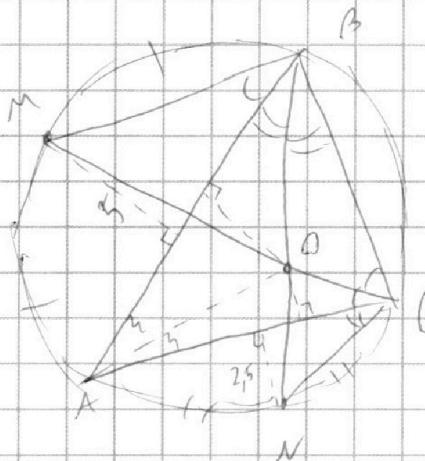
$$\frac{4}{17^2} \cdot \frac{17}{13^2}$$

$$\frac{17}{289}$$

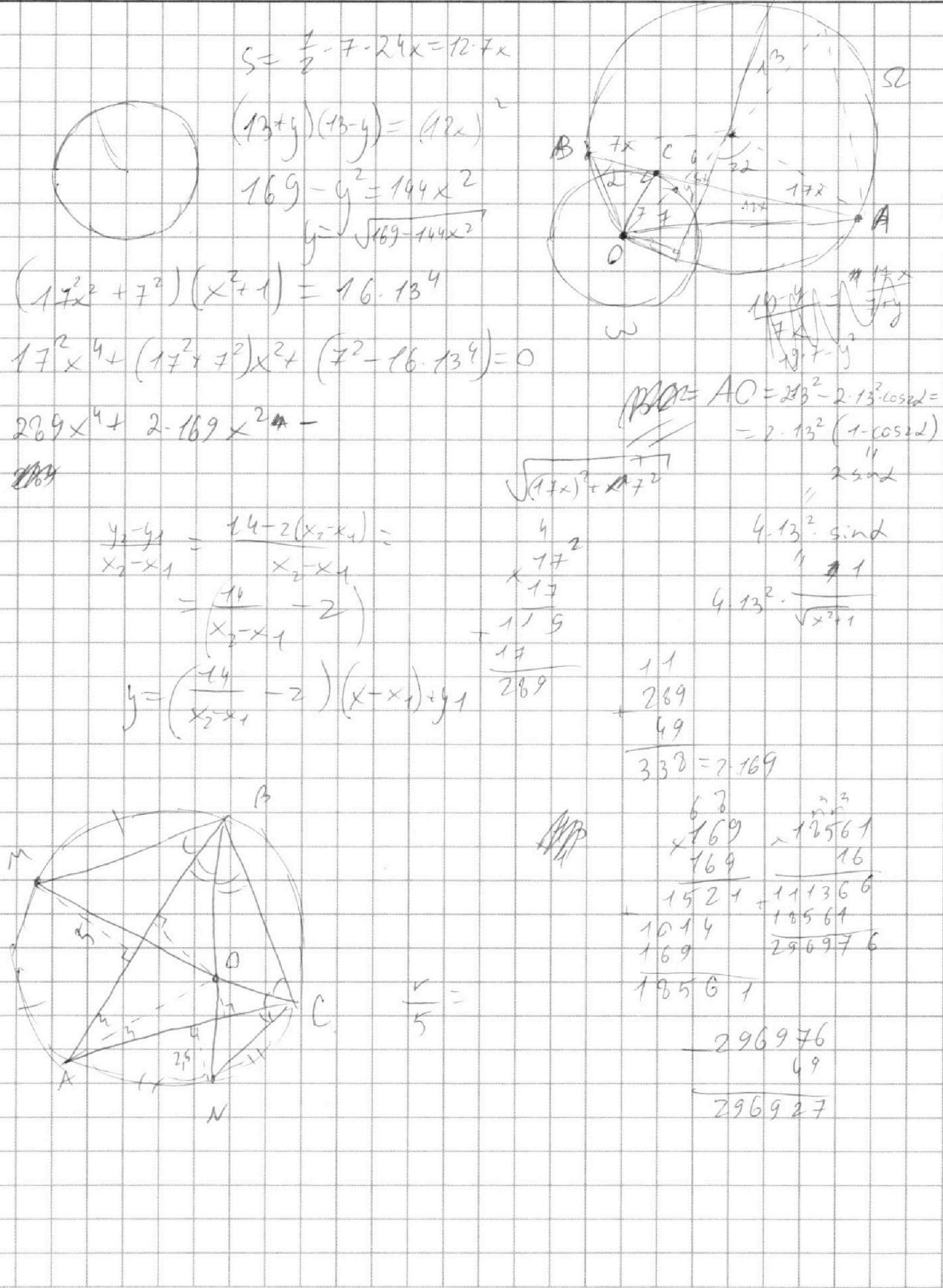
$$4 \cdot 13^2 \cdot \sin \alpha$$
$$4 \cdot 13^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$
$$\frac{338}{289} = 7 \cdot 169$$

APP

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 169 \quad \overline{12561} \\ 169 \\ \hline 1521 \quad + 111366 \\ 1014 \quad \overline{16564} \\ 169 \quad \overline{296976} \\ 198567 \\ \hline 296976 \\ 49 \\ \hline 296927 \end{array}$$



$$\frac{r}{5} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\frac{2}{23} \sqrt{3 + \sqrt{26}} < \frac{\sqrt{3 - 1}}{\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{26} < 23\sqrt{3} - 23$$

$$2\sqrt{26} < 21\sqrt{3} - 23$$

$$2\cancel{7}\cancel{2} 4 - 26 < 21 - 3 - 2 \cdot 21 \cdot 23\sqrt{3} + 23$$

$$\cancel{2 \cdot 21 \cdot 23 \cdot \sqrt{3}} \cancel{>} \cancel{23^2 + 27 \cdot 3 + 4 \cdot 26}$$

$$(23, 26) \cancel{\sqrt{23} \sqrt{26}} \cancel{+} \cancel{\sqrt{23} \sqrt{26}}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 529 + 63 + 80 + 24 = \\ & = 529 + 63 + 104 = \\ & = 529 + 167 = \\ & = 696 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 23 \\ \hline 96 \\ + 126 \\ \hline 966 \end{array}$$

$$24x \cdot (7 + 17x^2) =$$

=

(0; 0)

(16; 0)

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$\cancel{x_1} \cancel{x_2} \cancel{y_1} \cancel{y_2}$$

$$y_2 - y_1 = 14 - 2(x_2 - x_1)$$

$$2(16 + 13) + (0 - 26) =$$

$$= 2 \cdot 29 - 26 = 29 + 3 = 32$$



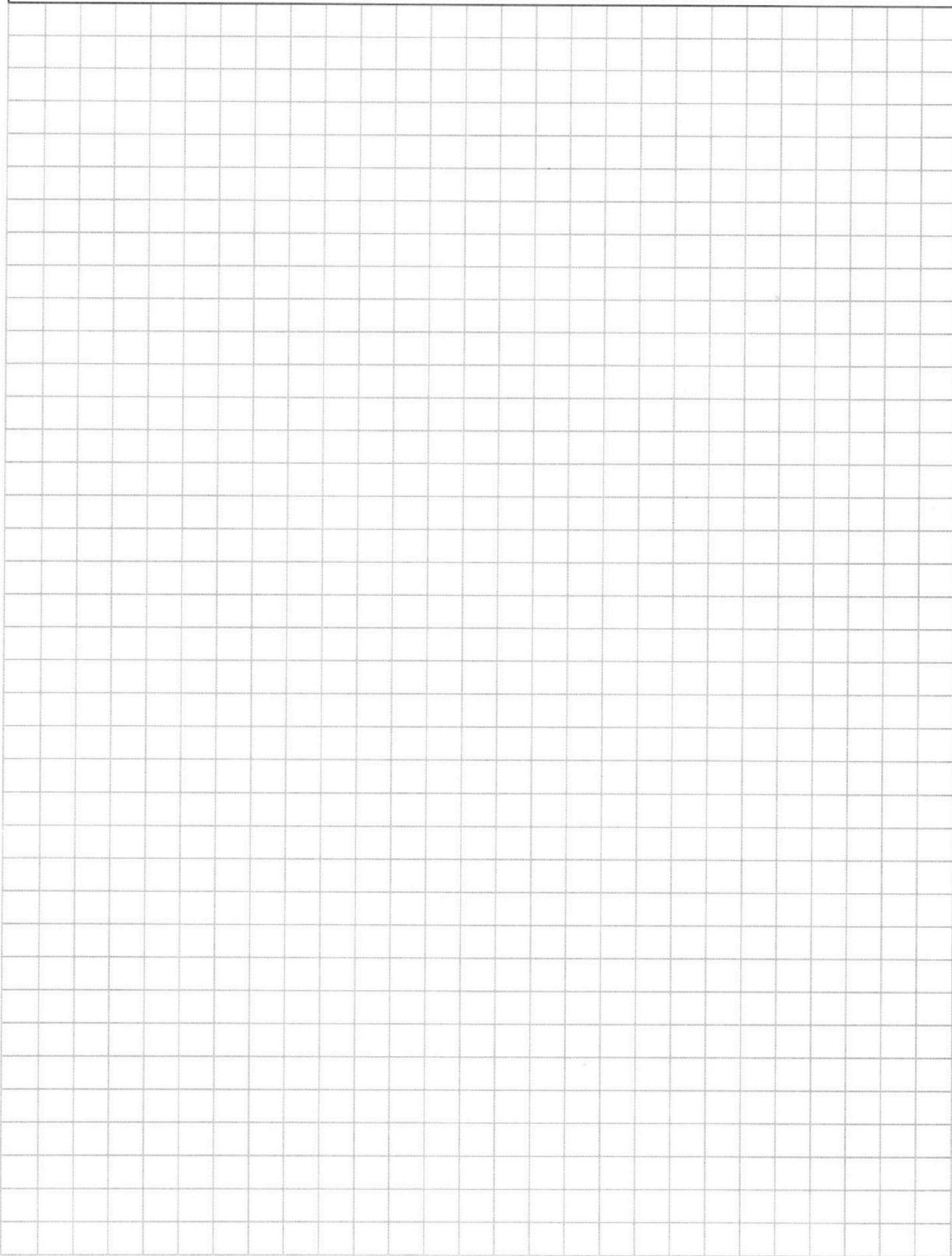
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





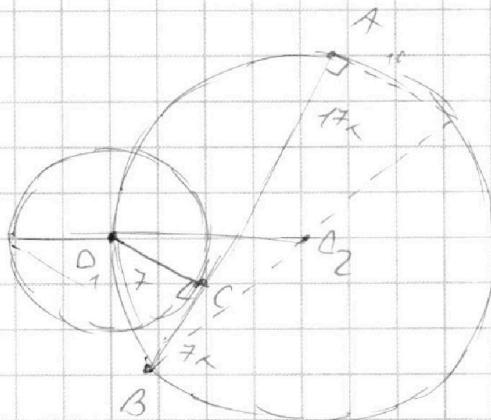
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$24^2 = 144 \cdot 4 = 576$$

$$26^2 = 13^2 \cdot 4 = 169 \cdot 4 =$$

$$= 400 + 240 + 36 =$$

$$= 676$$