



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла]  $\star$  Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$\lambda$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла]  $\dagger$  Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов]  $\downarrow$  Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов]  $\times$  На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов]  $\downarrow$  Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
• страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть 
$$\begin{cases} ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14} \\ ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{k_3}} \cdot 2^5 \cdot \frac{1}{7^5}$$

$$a = \sqrt{\frac{2k_1 k_3}{k_2}} \cdot 2^8 \cdot 7^{15}$$

$$c = \sqrt{\frac{2k_2 k_3}{k_1}} \cdot 2^{11} \cdot 7^{22}$$

$\Rightarrow$  каждое из трех выражений — в. ч. целого, целое  $\frac{2k_1 k_2}{k_3} \geq 7^{10}$ ,

иначе  $b$  — не целое и  $\frac{2k_1 k_2}{k_3}$  — целое, значит  $b$  не целое:

1)  $\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 2 \cdot 7^{10} \Rightarrow k_1 k_2 = k_3 \cdot 2 \cdot 7^{10}$

$$k_1 k_2 k_3 = k_3^2 \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{k_1 k_3}{k_2} = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 7^{10} \Rightarrow \frac{2k_1 k_3}{k_2} = 2^2 \cdot 7^{10} \cdot \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \text{ — в. ч. целого}$$

или  $k_3 : k_2$

аналогично  $\frac{2k_2 k_3}{k_1} = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot 7^{10}$

$\Rightarrow$  или  $k_3 : k_1$  — в. ч. целого и  $\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 2^2 \cdot 7^{10}$

Итого малое значение, получается, или  $k_1 = k_2 = k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$$b = 2^5 \cdot \frac{1}{7^5} \cdot 2 \cdot 7^5 = 2; \quad a = 2^8 \cdot 7^{15} \cdot \frac{2 \cdot 7^{10}}{k_2}$$

$k_1 k_2 k_3 \geq 2 \cdot 7^{10}$  и  $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$ . Тогда  $b = \frac{2^6}{k_3}$ ,  
 $a = \frac{2^5 \cdot 7^{10}}{k_2}$ ;  $c = \frac{2^{12} \cdot 7^{22}}{k_1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подберём числа  $k_1, k_2, k_3$ , чис  $a, b, c$ -нам и  $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$ .

$k_1 = 7^0, k_3 = 2, k_2 = 1$ .  $a, b, c$ -нам и усл. задачи выполняем

$$\Rightarrow abc \geq \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 7^{10}} = 2^{25} \cdot 7^{32} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ищем:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Р.5:  $a = 2^9 \cdot 7^0$   
 $b = 2^{12} \cdot 7^{14}$  ← при  $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$   
 $c = 2^5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a \equiv k \pmod m$ , тогда  $b \equiv m-k \pmod m$ , иначе из  
условия  $a+b$  не будет делиться на  $m$ , причем  $k \not\equiv 0 \pmod m$ ,  
иначе  $\frac{a}{b}$  сводится к  $m$ .

$$\left. \begin{aligned} a^2 &\equiv k^2 \\ -6ab &\equiv -6k(m-k) \\ b^2 &\equiv m^2 - 2mk + k^2 \end{aligned} \right\} + \quad \begin{aligned} a^2 - 6ab + b^2 &\equiv k^2 - 6km + 6k^2 + m^2 - 2mk + k^2 \equiv \\ &\equiv 8k^2 - 8mk + m^2 \equiv 8k^2 \end{aligned}$$

И.к.  $a^2 - 6ab + b^2$  делится точно сравним с 0 по  $m \pmod m$ , иначе  
невозможно извлечь делитель  $m$ , но  $8k^2 \equiv 0 \pmod m$  и  $k^2 \not\equiv 0 \pmod m$ ,  
то  $8 \equiv 0 \pmod m \Rightarrow m \leq 8$ .

Пример на  $m=8$ :  $k=7, b=1$ :  $\frac{7+1}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1$ .

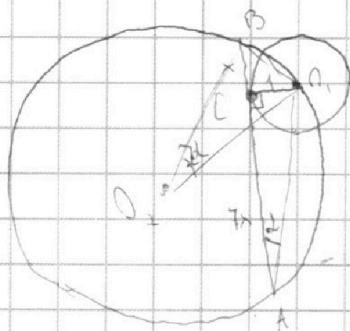
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) по т.з. описанной  $AO, C$ :  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$   
 $\cos \alpha = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}$ ; ч.к.  $AB$  кас.  $CO, MO$

$\angle O, CA = 90^\circ$ ;  $AB$  - касательная

2)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} = \frac{14x}{\sqrt{49x^2+1}}$

угловый центр в 2 раза больше вписанного, значит, не может быть

3) по т.з. описанной  $\Delta BO, O_2$ :  $\frac{BO_2}{\sin 2\alpha} = 2R = 10 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{BO_2}{10} =$

$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{10} = \frac{14x}{\sqrt{49x^2+1}} \Rightarrow 140x = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1}$

$140^2 x^2 = (x^2+1)(49x^2+1)$

$x^2 = t$ ;  $140^2 t = 49t^2 + 50t + 1$ ;  $49t^2 + t(50-140^2) + 1 = 0$

2) по т.з. описанной  $\Delta AO, B$ :  $\frac{BO}{\sin \alpha} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 10 \frac{10}{\sqrt{49x^2+1}}$

$t = x^2$ ;  $t+1 = \frac{100}{49t+1} \Rightarrow 49t^2 + 50t - 99 = 0$

$t = 1$  - корень;  $(t-1)(49t+99) = 0$

2-й корень  $< 0 \Rightarrow$  не корень  $\Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow AB = 8$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = -(7x - 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-7x + 2$$

$$-(7x - 2) + (7x - 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - 2 = 0$$

(1)

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \quad (2)$$

(1) р-на мнж, что  $x = \frac{2}{7}$

(2) раскл.  $f(x) = 2x^2 + 2x + 1; D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{D}{4a} = \frac{-4}{4} = -1$$

(2) Рассмотрим графики функций  $2x^2 - 5x + 3$  и  $2x^2 + 2x + 1$ .

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$D = 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{8} = \frac{1}{8}; f(0) = 3$$

$$x_0 = -\frac{-5}{8} = \frac{5}{8}$$

$$g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$D = -4 \Rightarrow y_0 = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}; g(0) = 1$$

$$x_0 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{при } x > 0 \quad g(x) > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)} > 1$$

$$\text{при } x < 0 \quad f(x) > 3 \Rightarrow \sqrt{f(x)} > \sqrt{3} > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)} > 1$$

где  $x$  из решения  
сист. 2-х уравнений

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{при } x=0: \sqrt{3} + \sqrt{1} = 4 - \text{не верно}$$

$\Rightarrow$  ур-ние 2 не лев. корни

$$\Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$\text{Проверка: } \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{8}{49} + 3} = \sqrt{3 - \frac{62}{49}} =$$

$$= \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} = \sqrt{\frac{8 + 49 + 28}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = 0 = 2 - 4 \cdot \frac{2}{7} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{лев. корни}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

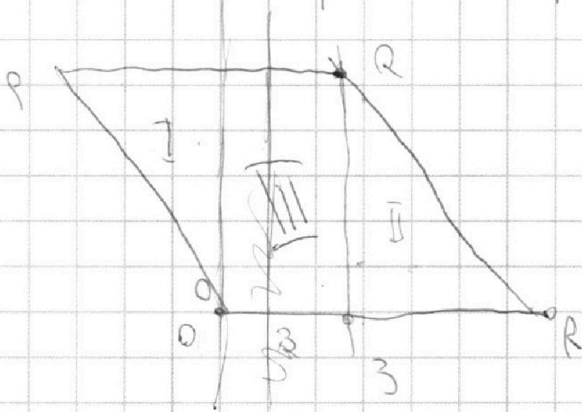
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Геометрически изобразим эти параллельные и поделим его на 2 части

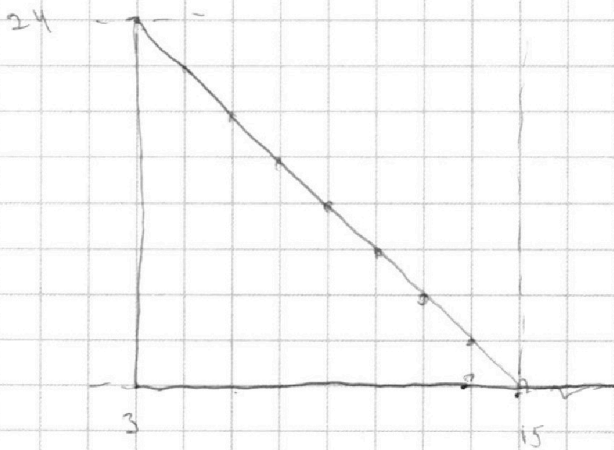


Объём вытекает 2 части:

I и II.

Для начала будем считать скорость потока в 1 час. Это, что в другой системе исс - из р-ства окруж и под. поток в горах окруж и т.д. - и.е. цилиндрич. Тогда вычитаем часть из I и II.

Будем для удобства считать часть из 2-ой части:



Известно, что  $\angle ORQ$  и  $\angle OPR$  -

- взаимноперпендикулярны.

$$\angle ORQ = \angle OPR = 45^\circ$$

Тогда выносим  
геометрически изобразим

параллельными.

Будем считать часть  $\frac{1}{2}$  круга на лев и для пр.

Итак, считаем  $\pi r^2$ ,  $\frac{1}{2} \pi r^2$ .  $X$  и  $Y$  - части длины. Также образуем



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

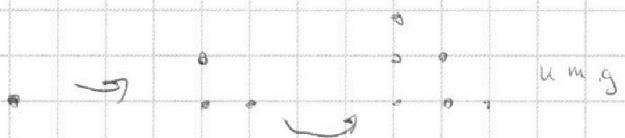
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



После раск. уч-ник из точек уже даны. справа начеб.



Возим, самая левая точка, т. к. будем считать на  $y_0$  ряду:

$$(3; 0), \text{ где } (0; 0) - 2; \text{ где } (1; 0)$$

$$\text{где } (3; 0) - 2; \text{ где } (7; 0) - 3 \text{ и т.д. до } 7, \text{ и т.д. до } 7$$

Взяв все из него, что на канале через. без учета 1

точка из 7 точек

$$\Rightarrow \text{на линии } y_0: 1 + \dots + 7 + 3 \cdot 3 = 10 \text{ точек ряда}$$

$$\text{на линии } y_1: 1 + \dots + 7 + 2 = 9 \text{ точек ряда}$$

$$\text{на линии } y_2: 1 + \dots + 7 = 8 \text{ точек ряда}$$

$$\text{на линии } y_{10}: 1 \text{ точка}$$

на линии выше точки не будем  $\Rightarrow$  ищемся в 1 точке:

$$\text{Или } 1+1-2+1-2 \rightarrow 1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+7) + 7 \cdot 6 =$$

$$= 1+3+6+10+15+21+28+36+42 = 70+31+25 = 95+31 = 126 \text{ точек}$$

$$\Rightarrow \text{в } 2\text{-х точках } (126 \cdot 2 = 252 \text{ точек})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Мы хотим найти все пары, т.е. пары "1" - "2" и "2" - "1" игровых

$$\Rightarrow x_2 \geq x_1$$

$$y_2 \geq y_1$$

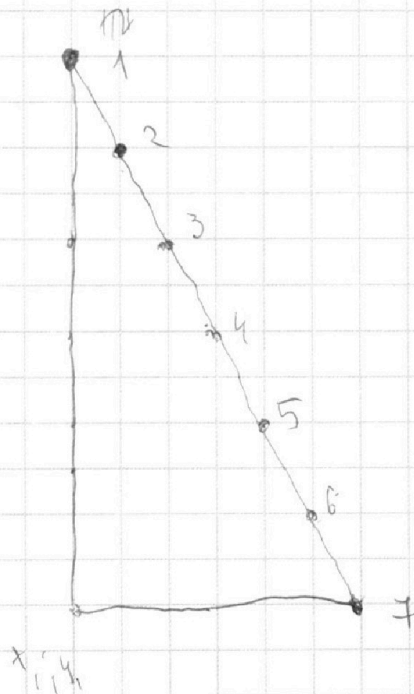
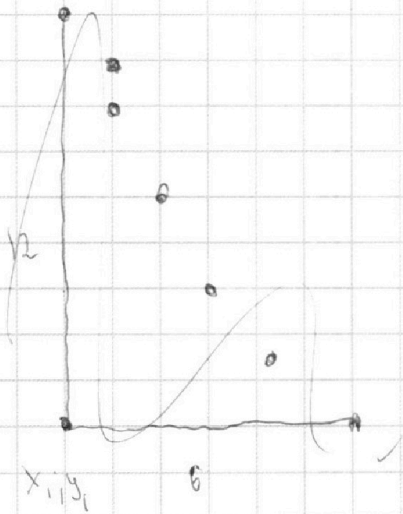
Получим решение уравнения  $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

В итоге на отрезках:  $(0; 12); (1; 10); (2; 8); (3; 6); (4; 4);$

$(5; 2); (6; 0)$ .

Три игровые пары можно найти по двум рядам справа много. ~~нужно~~

Упорядочим все точки графика:



Все 4 игровые пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решить можно только пары для I-II, II-III, I-III. и только из III.

Важно, что такие же числа. для III-II и I-III км-во паре отменяется.

Для III-II:

Для первых 12 парол км-во точек:  $4 \cdot 7 = 28$  км. в. км. км.

Все точки. Для каждой пары км-во точек равен. км 1.

$$4 \cdot 7 \cdot 11 + (6 + 1) = 4 \cdot 7 \cdot 11 + 21 \text{ км} \text{ - для III-II}$$

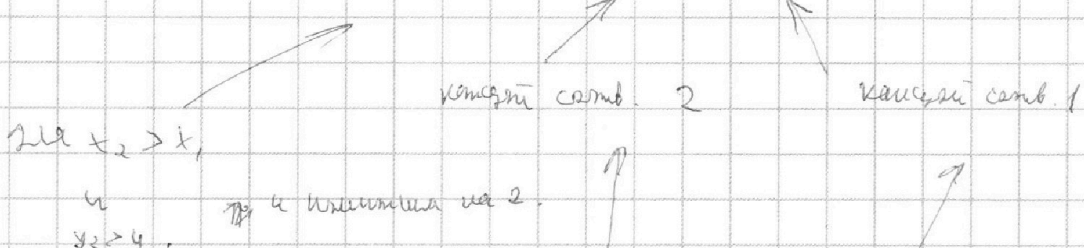
$$\Rightarrow \text{для II-III} + \text{III} + \text{III} - \text{I} : 2(324) = 658 \text{ кмкм}$$

Сложим. для I-II:

$\Delta y = 0, 1, 2, 3, \Delta y \geq 4$ .  $\Delta y$  может быть только 0, 1, 2, 3, 4, 5.

-1; 0; 1; 2; 3; 4

$\Rightarrow$  все точки I-II лежат на  $y=0, y=-1, y=-2$



$$23 \cdot 2 + 1 - 2 = 46 - 1 = 68$$

$$25 - 2 = 23$$

Итого.  $(68 + 23) \cdot 2 = 91 \cdot 2 = 182$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для начала разберемся со 2-м уравнением:

это 2 уравнения окружностей

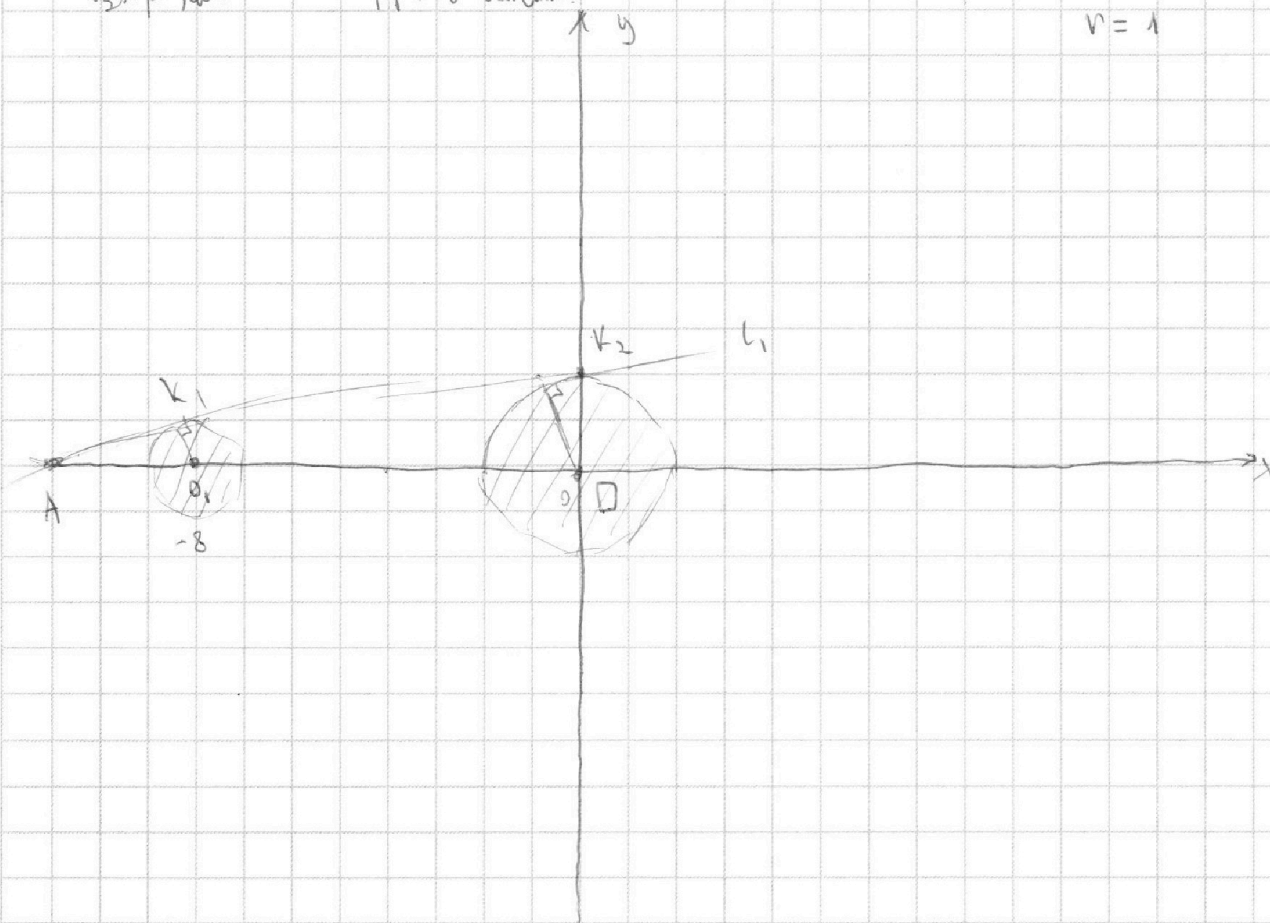
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

← r-на ГМТ 2-х точек 2-го круга, с  
v=2.

← r-на ГМТ 1-го круга, с  
v=1

Изображение на координатной плоскости:

x y



Пл.х. принадлежат прямой или не принадлежат либо 1, либо 0, либо беск.

или - во обш. виде, но  $ax + y + 10b = 0$  - касательная к внешней окружности;

или другая касательная. Всего у 2-х окружн. точек либо 1 касательная:

2 внешние и 2 внутренние.

Для начала найдем 1 внешнюю. -  $l_1$

Прямая она через  $O_1$  и  $A$ . Тогда  $\frac{AO_1}{AO} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$ ;  $AO_1 + 8 = AO$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

значит,  $A_0 = 16$ ;  $A_0 = 8 \Rightarrow m(-16; 0) \in \text{центр}$

$$-a \cdot (-16) - 0 + 10b = 0$$

$$16a = 10b \Leftrightarrow 5b = 8a.$$

По т. Пифагора:  $AK_1 = \sqrt{64^2 - 12^2} = 3\sqrt{47} \Rightarrow \text{tg } \angle K_1 A_0 = \frac{1}{3\sqrt{47}} = \frac{OK_2}{16} \Rightarrow OK_2 = \frac{16}{3\sqrt{47}}$

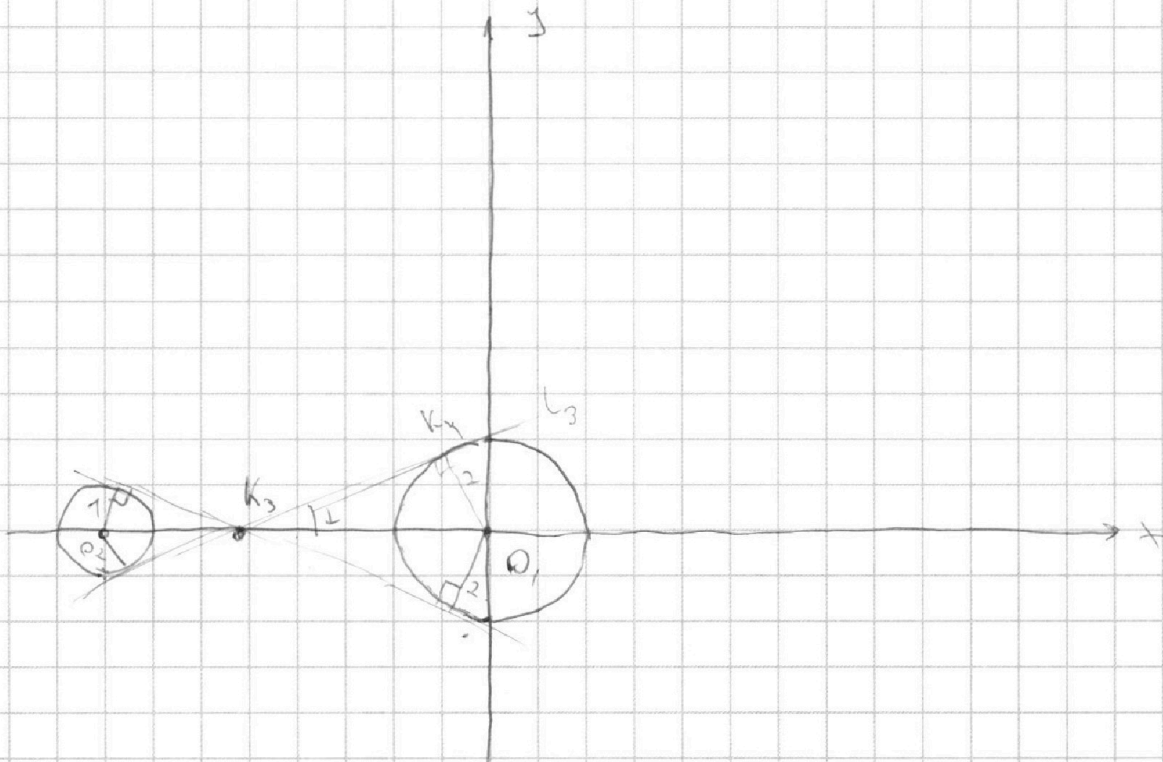
$$\Rightarrow a \cdot (0) - \frac{16}{3\sqrt{47}} + 10b = 0$$

$$10b = \frac{16}{3\sqrt{47}}$$

$$b = \frac{16}{30\sqrt{47}} = \frac{8}{15\sqrt{47}} \Rightarrow a = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{15\sqrt{47}} = \frac{1}{3\sqrt{47}}$$

Максимальный и "минимальный" значения кас.  $\Rightarrow a = \pm \frac{1}{3\sqrt{47}}$ .

Случай с "выпукл." значения кас.:



Из подобия  $\frac{O_2 K_3}{O_1 K_3} = \frac{1}{2}$ ;  $O_2 K_3 + O_1 K_3 = 8 \Rightarrow O_1 K_3 = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow \text{т. } \left(-\frac{16}{3}; 0\right) \in \text{прямой } L_3$$

$$a \cdot \left(-\frac{16}{3}\right) - 0 + 10b = 0$$

$$10b = \frac{16a}{3} \Leftrightarrow 5b = \frac{8a}{3}$$

$$\text{По т. Пифагора } k_3 k_4 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{16^2 - 12}{9}} = \sqrt{\frac{161}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{11} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{3}{\sqrt{11}} = a.$$

Значит и координаты концевых точек  $y=0 \Rightarrow a = \pm \frac{3}{\sqrt{11}}$

Ответ:  $a = \pm \frac{3}{\sqrt{11}}$ ;  $a = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}$

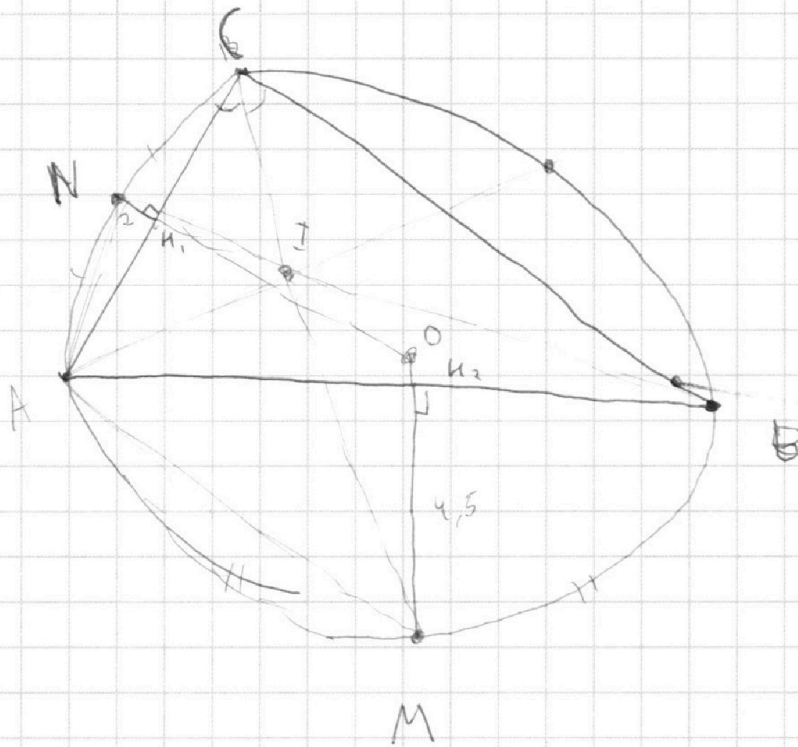
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $BN$  и  $CM$  пересекаются в  $O$ . Высоты  $BN$  и  $CM$ , и.к.

$BN$  и  $CM$  - бис-сы : на равн. кр. равные углы

2) по лемме о треугольнике :  $AN = NI$  и  $AM = MI$ .

3)  $AN = NC \Rightarrow NH_1$  - сер. пер. к  $AC$

аналогично  $MH_2$  - сер. пер. к  $AB \Rightarrow OM$  пересекается в  $O$

анал. медианы  $ABC \Rightarrow OH_1 = OH_2 + 2,5$ , и.к.  $ON = OM$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

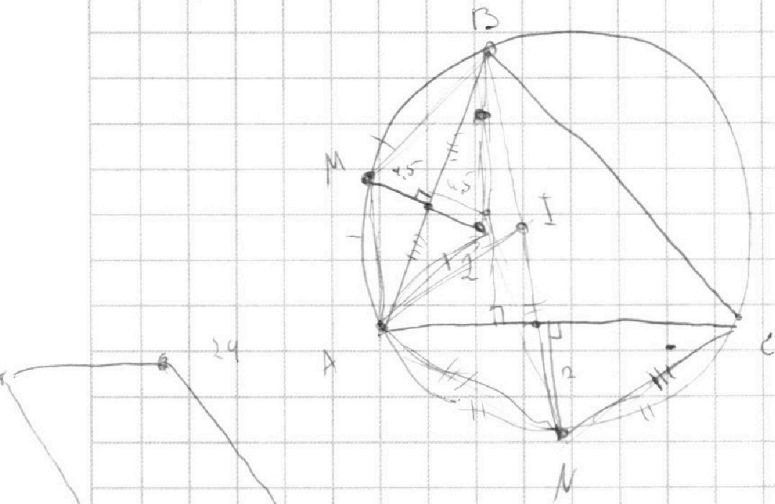
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

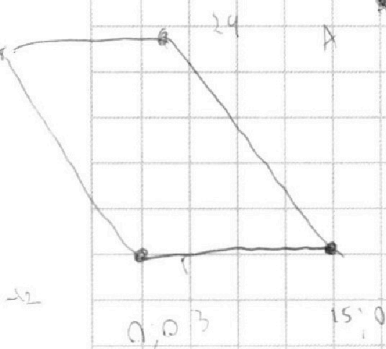


$\theta I - ?$

$$M \equiv 8$$

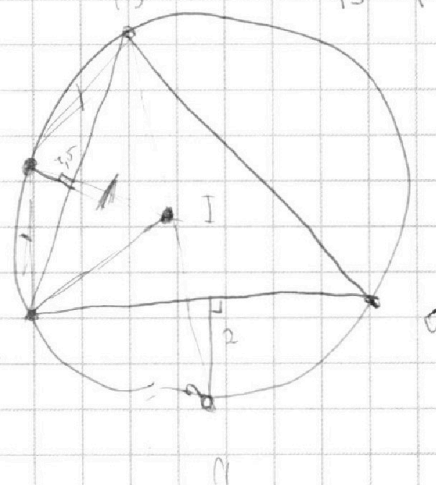
$$a = 7 \quad b = 1$$

$$\frac{49 - 42 + 1}{8}$$



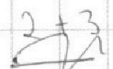
$B, A, C$

кажд  $m \rightarrow$  менш.  $A$



$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$m \left( \frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right)$$



$$\frac{a+b}{(a-b)^2 - 3ab}$$

$\mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z}$

$$a \equiv k$$

$$b \equiv m - k$$

$\text{mod } m$

$$a \equiv b$$

$$k \neq 0$$

$$\begin{cases} a^2 \equiv k^2 \\ 6ab \equiv 6k(m-k) \\ b^2 \equiv (m-k)^2 \end{cases} \equiv k^2 + 6k(m-k) + (m-k)^2 = k^2 + 6km - 6k^2 + m^2 - 2mk + k^2 = m^2 + 4mk - 4k^2 \equiv m^2 + 4mk \pmod{m}$$

$$0 \equiv 0 \pmod{m} \quad k \equiv 0 \pmod{m}$$

$$k \equiv 0 \pmod{m} \quad 4k^2 \equiv 0 \pmod{m}$$



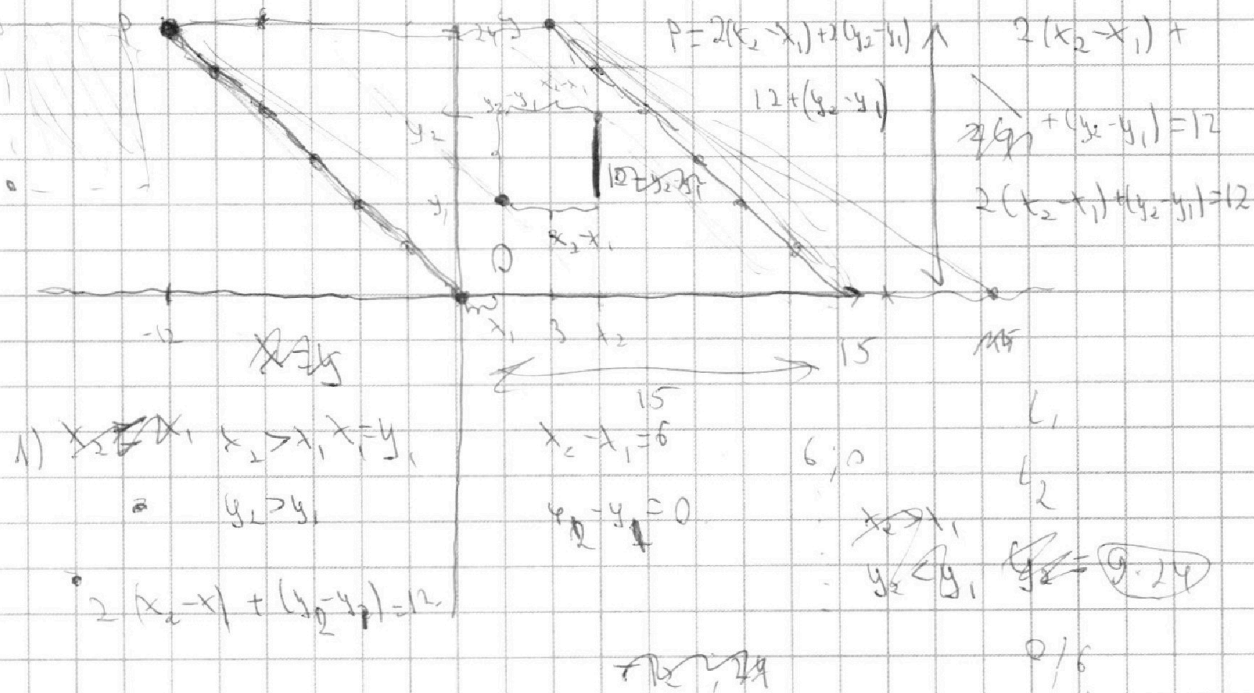
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

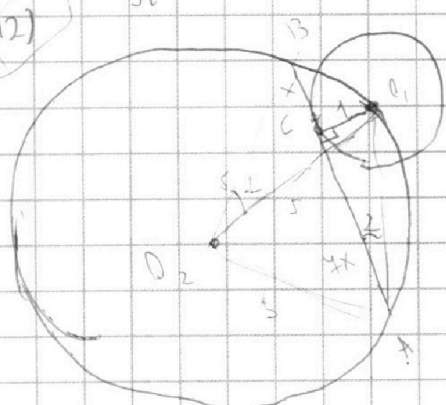


1)  $x_2 > x_1$ ,  $x_2 > y_1$   
 $y_2 > y_1$   
 $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

$x_2 - x_1 = 6$   
 $y_2 - y_1 = 0$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$   
 $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

- 2)  $2(x_2 + x_1)$   
 (0, 0) (1, 4) (2, 8) (6, 12)  
 (5, 2) (3, 6) (1, 10)



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$   
 $2(x_2 + x_1) + y_2 = 12 + 3x_1$

$\sin \alpha = \frac{8x}{5}$   
 $\sin \alpha = \frac{4K}{5}$

$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{9K^2 + 4}} = \frac{\sqrt{K^2 + 1}}{10}$

$\frac{\sqrt{K^2 + 1}}{\sin \alpha} = 10$   
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{K^2 + 1}}{10}$

$2K + K = 12$   
 $K = 0, K = 6$   
 $K = 2, K = 5$

$K = 4, K = 8, K = 4$   
 $K = 8, K = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$   
 $bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$   
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{62.5} \cdot 7^{64}$$

$$abc = \sqrt{2 k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$\Rightarrow 2k_1 k_2 k_3$  - квадрат ком. числа, иначе abc - не целое, так как не делится

1)  $k_1 k_2 k_3 = 2$ :  $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ ,  $b = 2^6 \cdot 7^5$  - не целое  
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

2)  $k_1 k_2 k_3 = 8$ :  $abc = 2^{27} \cdot 7^{32}$ ,  $b$  - не целое.  
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

3) Значит,  $k_1 k_2 k_3$  простое  $7$ , иначе  $b$  - не целое:  $k_1 k_2 k_3 = 7^2 \cdot 2$

Пусть:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{33}$ ,  $b$  не целое.  
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\Rightarrow k_1 k_2 k_3 \geq 7^{10}$ , иначе  $b$  не целое.

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$ :  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ ,  $b = 2^6$   
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$   
 $ab = 2^{14} \cdot 7^{14}$   
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$   
 $ab = 2^{14} \cdot 7^{14}$   
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$   
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$k_1 k_2 k_3 \geq 2 \cdot 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$   
 $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$   
 $ab = 2^{14} \cdot 7^{14}$   
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$2 k_1 k_2 k_3 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 7^{10}$

$k = 2 \cdot 7^{10}$

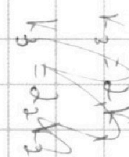
$2k = 2^2 \cdot 7^{10}$

$k_3 \neq 1$

$k_1 = k_2 = k_3$

$k_1 k_2 k_3 = k_3^3 \cdot 2 \cdot 7^{10}$

$b = \frac{2}{k_3}$



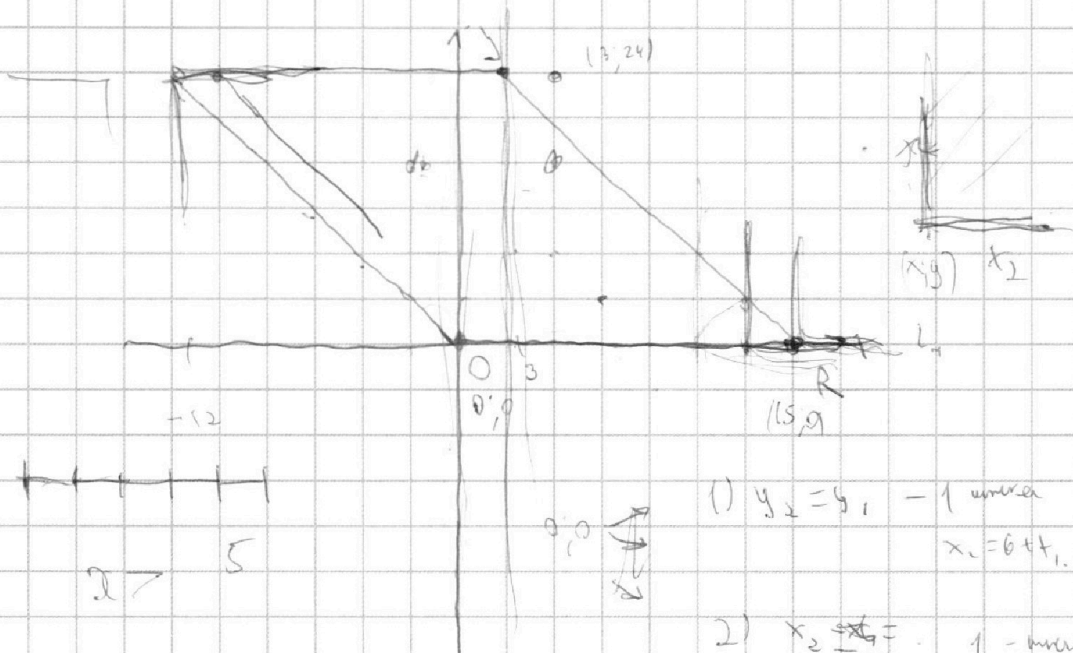
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

1)  $y_2 = y_1$  — 1 минута  
 $x_2 = 6 + x_1$

2)  $x_2 = x_1$  — 1 минута

$$y_2 = y_1$$

$$x_2 > x_1$$

$$y_2 > y_1$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

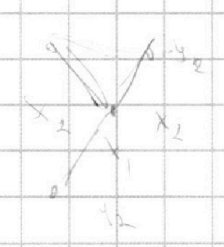
1)  $x_2 > x_1$

- 0,0
- 1,0
- 2,0
- 3,0
- 4,0
- 5,0
- 6,0
- 7,0
- 8,0
- 9,0
- 10,0
- 11,0
- 12,0

$$x_2 < x_1$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$(y_2 - y_1) = 12 + 2(x_1 - x_2)$$



~~...~~

~~...~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, сумма:

$$252 + 658 + 182 = 260 + 380 + 660 - 2 = 440 + 660 - 2 = 1100 - 2 = 1098 \text{ мм}^2$$



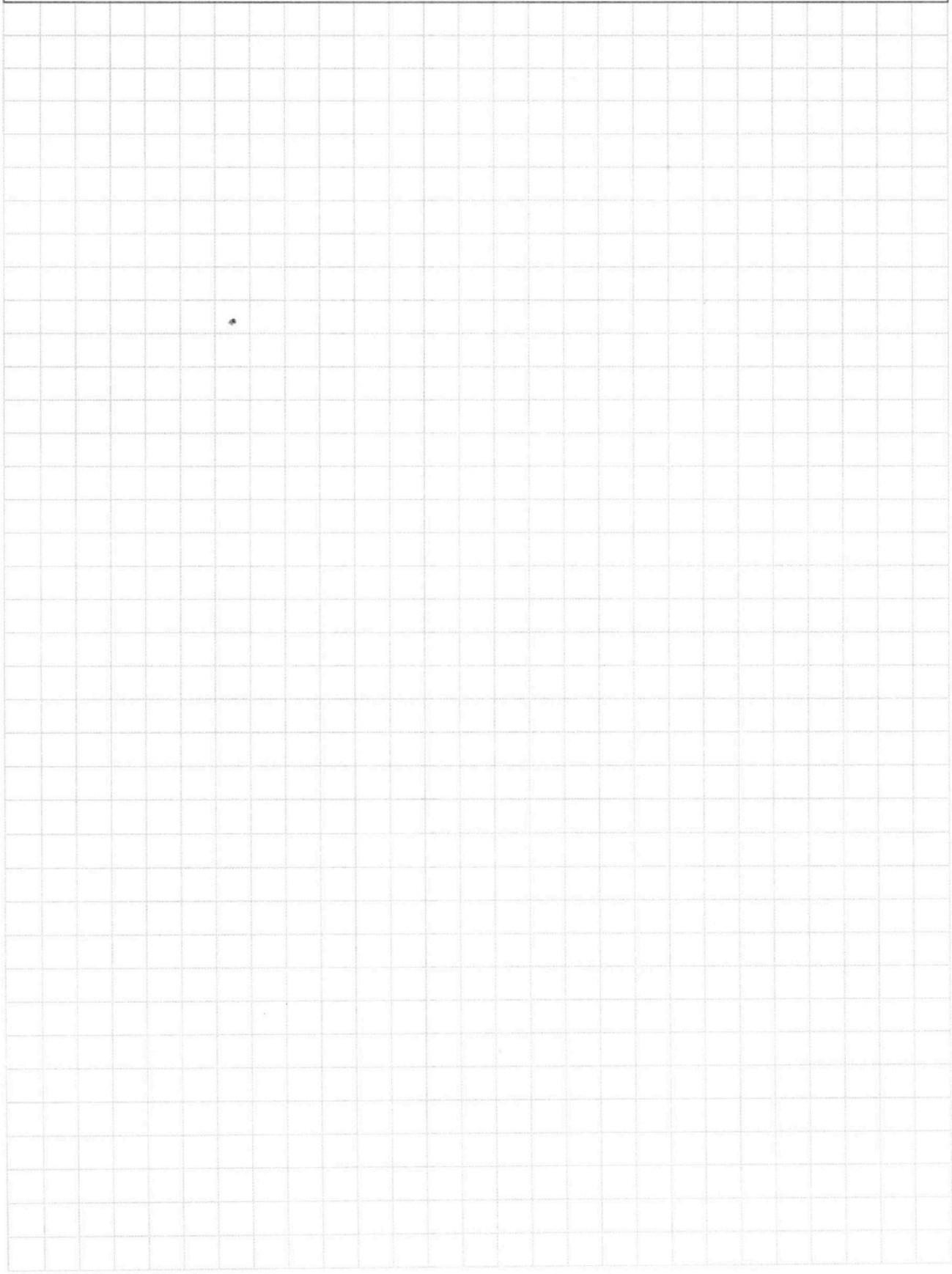
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{a}{c} = 2^{82} \cdot 7^{227}$$

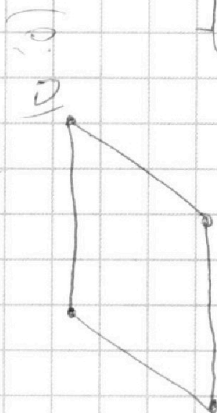
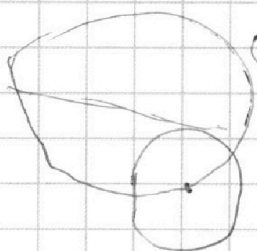
$$\frac{c}{a} = 2^4 \cdot 7^7$$

$$c^2 = 2^{24} \cdot 7^{44}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{22}$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{15}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^7$$



$$\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 7^{10} \cdot 2$$

$$\frac{k_1 k_2}{k_3} = 7^{10}$$

С15

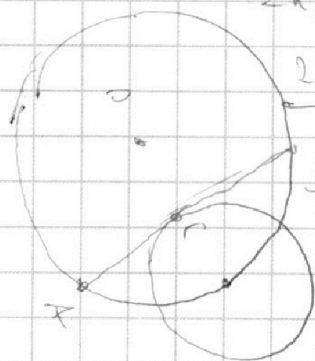
$$k_1 k_2 = k_3 \cdot 7^{10} \cdot k_3$$

$$2k_1 k_2 k_3 = k_3^2 \cdot 7^{10} \cdot 2 \cdot k_3^2$$

$$\frac{2k_1 k_3}{k_2} = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{k_3}{k_2} = 2 \cdot 7$$

$$k_3 = 2k_2$$

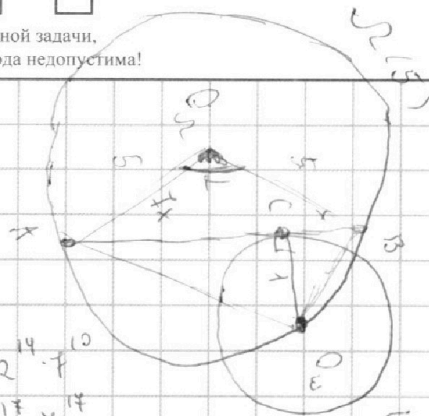
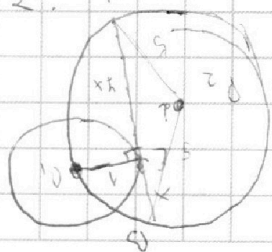


$$\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

- 1 - 10
- 2 - 9
- ...
- 11 - 10



$$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$c = \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{k_3}} \cdot 2^5 \cdot 7^7$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot b}{b^2}$$

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{8x}{\sin x} = 10$$

$$ab = 7 \cdot 2^{11} \cdot 7^{10} = 2^{14} \cdot 7^{21}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$ac = 2 \cdot 2^{21} \cdot 7^{34}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{14}$$

$$b = 2^5$$

18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

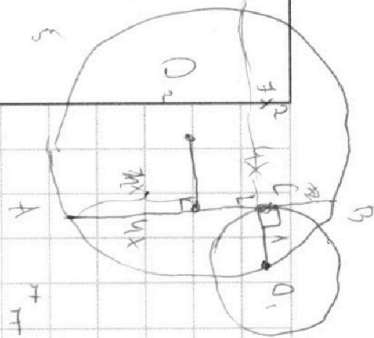
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



**МФТИ**



$$\left. \begin{aligned} ab &= k_1 \cdot 2^{11} \cdot 7^{10} \\ bc &= k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14} \\ ac &= k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{27} \end{aligned} \right\} *$$

$$\begin{aligned} 37 + 14 &= 51 \\ 27 + 20 &= 47 \end{aligned}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^7$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{27}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$c^2 = \frac{k_2 k_3}{k_1} \cdot 2^{23} \cdot 7^{44}$$

$$abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{40} \cdot 7^{32}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1 \quad \begin{aligned} ab &= 2^{11} \cdot 7^{10} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{14} \end{aligned}$$

$$\frac{k_2 k_3}{k_1} \geq 2$$

$$\frac{c}{a} = 2$$

$$\frac{c}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^7; \quad \frac{b}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^7; \quad c = a \cdot 2^3 \cdot 7^7 \cdot \frac{k_2}{k_1}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 1 \\ k_3 &= 2 \\ k_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k_3}{k_2} \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$c = a \cdot 2^3 \cdot 7^7 = 2^6 \cdot 7^{22} \cdot b$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{20} \cdot b \cdot \frac{k_3}{k_2}$$

$$b \neq a$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{15}$$

$$a = b \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$k_1 k_2 k_3 \geq 2$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 2$$

$$a = 2 \cdot 7^6 \quad b = 2 \cdot 7^{13}$$

$$\begin{aligned} ac &= 2^{21} \cdot 7^{37} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{44} \\ ab &= 2^{14} \cdot 7^{10} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{c} = 7^1$$

$$\frac{c}{b} = 2 \cdot 7^{27} \cdot bc$$

$$\frac{c}{b} = \frac{k_3}{k_1} \cdot 2^6 \cdot 7^{27} \cdot bc$$

$$c^2 = \frac{k_3 k_2}{k_1}$$

$$b = \frac{k_2 \cdot 2^{14} \cdot 7^{14}}{c}$$

$$a =$$

$$\frac{k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{a}$$

$$b = \frac{2^{11} \cdot 7^{10}}{a} \Rightarrow ac = 2^2$$

$$\frac{k_2 \cdot 2^{14} \cdot 7^{14}}{c} = \frac{k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-7x + 2 = (2 - 7x) S.$$

$$-(7x - 2)$$

$$-(7x - 2) + (7x - 2)$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$x \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\frac{8}{49} - \frac{10}{7} = \frac{-62}{49} + 3 =$$

$$\frac{5 \cdot 17}{49} = \frac{\sqrt{151}}{7} =$$

$$3 \cdot 49 - 62 =$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4$$

$$= \frac{85}{49}$$

$$y_0 = -\frac{-4}{4} = 1$$

$$(50 - 1) \cdot 3 =$$

$$y_8 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$= 150 - 3 =$$

$$= 147 - 62 =$$

$$= 85$$

$$28$$

$$\frac{46}{2} = 23$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1.$$

$$y_8 = -$$

$$2 \frac{1}{4}$$

$$2 \frac{\sqrt{21}}{4}$$

$$147 - 62 =$$

$$= 85$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^2 + 3}$$

$$y_8 = \frac{1}{2}$$

$$y_8 = \frac{1}{2}$$

$$13 \text{ (years)}$$

$$y^2 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 - 5x + 3 =$$

$$= (2x + 1)(x + 3) =$$

$$(2x + 3)(x + 1) = 0$$

$$= 2x^2 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$2x^2 - 2x - 3x + 3$$

$$x = -\frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{5}{2} + \frac{8}{35}$$

$$101 =$$

$$4y = 0; 1, 2, 3$$

$$\frac{28}{21} = \frac{80}{32} = \frac{29}{329}$$

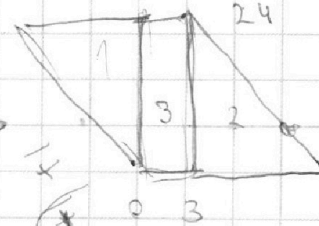
$$24$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{4} = -1$$

$$x = -3$$

$$24$$

$$253$$



$$17$$



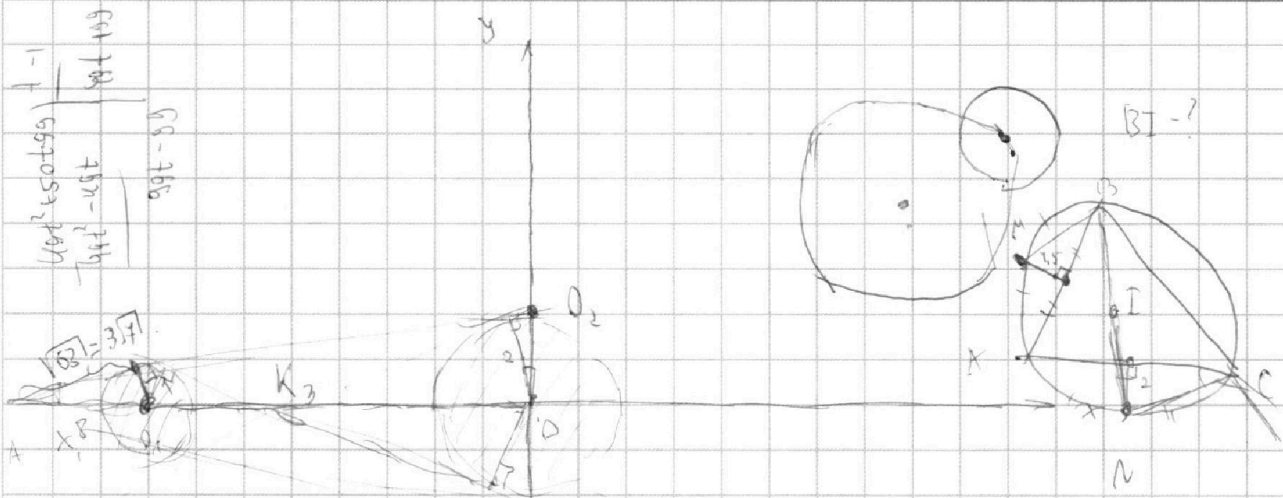
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AO_1 = 8$

$\frac{1}{2} = \frac{AO_1}{AO} \Rightarrow AO_1 = AO \cdot \frac{1}{2}$

$AO_1 + 8 = AO$

$\frac{1}{2} AO + 8 = AO \Rightarrow AO = 16$

$2 \cdot 122 = 244$

2 решения

$\Rightarrow ax - y + 10 = \dots$

1)  $(x+3)^2 + y^2 \leq 1$

линия окружности

$x^2 + y^2 \geq 4$

$266 - 12 = 254$   
 $\frac{254}{9}$

$x^2 + y^2 - 4 = ax - y + 10$

$\sin \alpha = \dots$   
 $\cos \alpha = \dots$

$x^2 - ax + y^2 + y - 14 = 0$

$\tan \alpha = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{AO_2}{16}$

$AO_1 = \frac{1}{2} \cdot AO$

$AO_2 = \frac{16}{3\sqrt{7}}$



$\frac{1}{2}$

$AO = 16$

$AO_1 = 8$

$y = \frac{1}{3\sqrt{7}}x + \frac{20}{3\sqrt{7}}$

$\frac{1}{3\sqrt{7}}(x+6) = x^2 + y^2 - 4$

$\frac{16}{3} : \frac{8}{3}$

Vertical text on the left side of the page, possibly a page number or reference.