



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } ab = k_1 \cdot 2^{17} \cdot 4^{10}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 4^{17} \Rightarrow abc = \sqrt{2k_1 k_2} \cdot 2^{25} \cdot 4^{32}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 4^{37}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{k_3}} \cdot 2^5 \cdot \frac{1}{4^5}$$

$$a = \sqrt{\frac{2k_1 k_3}{k_2}} \cdot 2^8 \cdot 4^{15}$$

$$c = \sqrt{\frac{2k_2 k_3}{k_1}} \cdot 2^{11} \cdot 4^{22}$$

\Rightarrow каждое из полученных выражений - вб. числ. или др., кроме $\frac{2k_1 k_2}{k_3} \geq 4^{10}$,

такие б - ве числа и $\frac{2k_1 k_2}{k_3}$ - неч., тогда б не чвн:

$$1) \frac{2k_1 k_2}{k_3} = 2 \cdot 4^{10} \Rightarrow k_1 k_2 = k_3 \cdot 2 \cdot 4^{10}$$

$$k_1 k_2 k_3 = k_3^2 \cdot 2 \cdot 4^{10}$$

$$\frac{k_1 k_3}{k_2} = \left(\frac{k_3}{k_2}\right) \cdot 2 \cdot 4^{10} \Rightarrow \frac{2k_1 k_3}{k_2} = 2^3 \cdot 4^{10} \cdot \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 - \text{вб. числ.}$$

при $k_3 : k_2$

$$\text{значит} \quad \frac{2k_1 k_3}{k_1} = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \cdot 2^3 \cdot 4^{10}$$

\Rightarrow при $k_3 : k_2$ - вб. числа и $\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 2 \cdot 4^{10}$

При этом наше б - ве число, значит, при $k_1 = k_2 = k_3 = 2 \cdot 4^{10}$

$$b = 2^5 \cdot \frac{1}{4^5} \cdot 2 \cdot 4^5 = 2^6; a = 2^8 \cdot 4^8 \cdot 2 \cdot 4^5 \cdot \frac{4^5}{k_2}$$

$$a = \frac{2^5 \cdot 4^{10}}{k_2}; c = \frac{2^{12} \cdot 4^{24}}{k_1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предберем значение K_1, K_2, K_3 , при a, b, c - любые и $K_1, K_2, K_3 = 2 \cdot 4^{10}$.

$K_1 = 4^0, K_3 = 2, K_2 = 1$. a, b, c - любые и усе. задачи выполняются

$$\Rightarrow abc \geq \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 4^{10}} \cdot 2^{25} \cdot 4^{32} = 2^{26} \cdot 4^{37}$$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 4^{32}$

P.S.: $a = 2^3 \cdot 4^0$
 $c = 2^{12} \cdot 4^{14}$ ← при $K_1, K_2, K_3 = 2 \cdot 4^{10}$.

$b = 2^5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача а \equiv k mod m, тогда b \equiv m - k mod m, значит из

умножив a+b получим m, что противоречие k $\not\equiv$ 0 mod m,

значит $\frac{a}{b}$ оканчиваются на m

$$\begin{aligned} a^2 &\equiv k^2 \\ -6ab &= -6k(m-k) \\ b^2 &\equiv m^2 (m-k)^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} a^2 - 6ab + b^2 \geq k^2 - 6km + 6k^2 \\ \leq 8k^2 - 8mk + m^2 \leq 8k^2 \end{array} \right\} +$$

Задача $a^2 - 6ab + b^2$ должна быть сравнима с 0 по модулю m, значит

делится на m, то есть $8k^2 \equiv 0 \pmod{m}$ и $k^2 \equiv 0 \pmod{m}$,

но $k^2 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow m \leq 8$.

$$\text{Пример при } m=8: a=7, b=1: \frac{7+1}{49-49+1} = \frac{8}{8} = 1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

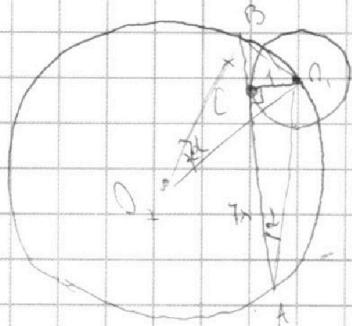
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \text{ Из } \triangle AOB \sin \angle AOB = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}; \text{ т.к. } AB \text{ кат. } \angle AOB$$

$$\angle AOB = 90^\circ; AB - \text{касательная}$$

$$2) \sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{14x}{\sqrt{49x^2+1}} = \frac{14x}{\sqrt{49x^2+1}} \quad \cancel{\frac{14x}{\sqrt{49x^2+1}}}$$

Члены делительные при x^2+1 убраны. Вместо этого, очевидно, что это не нужно

$$3) \text{ Из } \triangle AOB \sin \angle AOB = \frac{14x}{\sin 2x} = 2R = 10 \Rightarrow \sin 2x = \frac{14x}{10} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{10} = \frac{14x}{(\sqrt{49x^2+1})^2} \Rightarrow 140x = \sqrt{x^2+1} \left(\sqrt{49x^2+1} \right)^2$$
$$140^2 x^2 = (x^2+1)(49x^2+1)$$

$$x^2 = t; 140^2 t = 49t^2 + 50t + 1; 49t^2 + t(50 - 140^2) + 1 = 0$$

$$2) \text{ Из } \triangle AOB \frac{BD}{\sin \angle AOB} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 10 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{49x^2+1}} \quad \cancel{\frac{10}{\sqrt{49x^2+1}}} \quad \cancel{1^2}$$

$$t = x^2+1; t+1 = \frac{100}{49t+1} \Rightarrow 49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$t = 1 - \text{корень: } (t-1)(49t+99) = 0$$

$$2-\text{й корень } < 0 \Rightarrow \text{не корень} \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow AB = 8.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \left| \cdot \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) \right.$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = -(7x - 2) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

~~-7x + 2~~

$$-(7x - 2) + (7x - 2) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = 0$$

$$\text{t: } 7x - 2 = 0$$

(1)

~~х2~~

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ р-ка } \text{множ, } \text{тако } x = \frac{2}{7}$$

$$(2) \text{ пересек. } f(x) = 2x^2 - 5x + 3; D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{-4}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

(2) Графиками членов функций $2x^2 - 5x + 3$ и $2x^2 + 2x + 1$

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$D = 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{8} = \frac{1}{8}; f(0) = 3$$

$$x_0 = -\frac{-5}{8} = \frac{5}{8}$$

$$g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$D = -4 \Rightarrow y_0 = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}, g(0) = 1$$

$$x_0 = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{при } x > 0 \quad g(x) > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)} > 1$$

$$\text{при } x < 0 \quad f(x) > 3 \Rightarrow \sqrt{f(x)} > \sqrt{3} > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)} > 1$$

при $x \neq 0$ $\sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)} > 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при $x=0$: $\sqrt{3+1} + \sqrt{1} = 1$ - неверно

\Rightarrow Чл-кие 2 не чл. квадр

$$\Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$\text{Проверка: } \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{49} + 3} = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{49} + 3} = \sqrt{3 - \frac{62}{49}} =$$

$$= \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{49} + 1} = \sqrt{\frac{8 + 49 + 28}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = 0 = 2 + \frac{2}{7} \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{чл. квадр}$$

$$\text{Решение: } x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Бесконечные изображения этого пейзажа могут быть разбиты на 2 части:

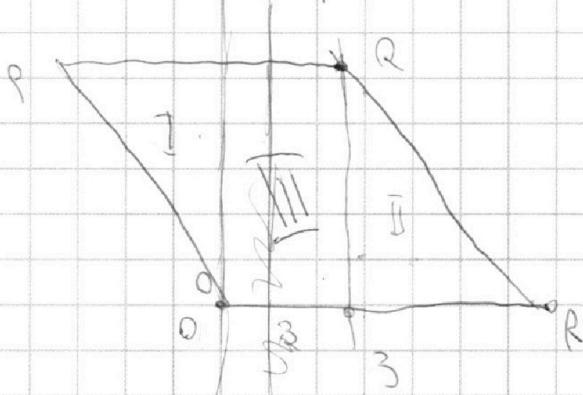
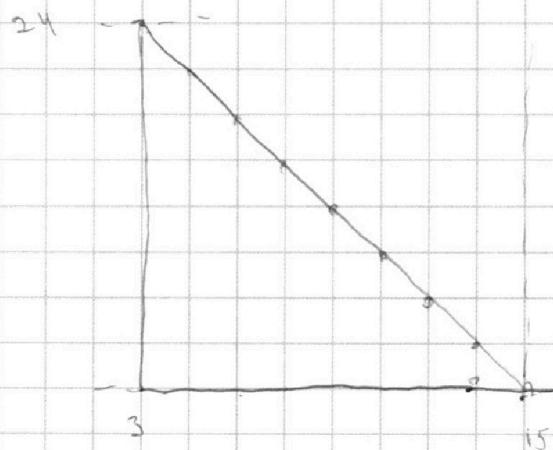


Рисунок делится на 2 части:

I и II.

Две конечные фигуры должны быть разбиты в 1 части. Известно, что б
должны совпадать - из р-ства углов и угол между б углах обеих частей -
- и т.д. Абсолютно. Тогда возможны разбики из I и II.

Будут ли совпадать оставшиеся части из 2-ой части:



Проверка, что QR и OP -

- бесконечное изображение.

$$\angle OPQ = \angle PRQ = 45^\circ$$

Изображение верно, значит

последнее изображение верно

изображение.

Второе изображение тоже верно, потому что на лево и право.

Изображение верно, потому что X и Y - это две прямые. Правило симметрии

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Генератор речи. Число из трех цифр. Каждая цифра



Значит, каждое первое число, y_1 . Как будем сажать на y_2 , y_3 ?

$$(g; 0), g \in \{0; 1\} - 2, g \in \{1; 0\}$$

или $(0; 0) - 2$; или $(1; 0) - 3$ и т.д. Яко y_2 , которые стоят +

также есть из трех, это же квадраты первых трех единиц. 1

Из которых + квадратов

$$\Rightarrow \text{на первом году } 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 \text{ квадратов}$$

на первом y_2 : $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ квадратов

на первом y_3 : $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ квадратов

⋮
⋮
⋮

на первом y_{15} : 150 квадратов

на первых 1500000 квадратах \Rightarrow квадратов в 1 году:

$$1+2+3+4+\dots+150 = 1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+150) + 150 \cdot 150 =$$

$$= 1+3+6+10+15+21+28+36+\dots+150 = 1+3+6+\dots+150 = 126 \cdot 150 = 18900 \text{ квадратов}$$

$$\Rightarrow 6 \cdot 2 - n \text{ годов } (126 \cdot 2 = 252 \text{ года})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мы должны найти все пары, н.к. число "1" - "2" и "2" - "1" являются

$$\Rightarrow x_2 \geq x_1$$

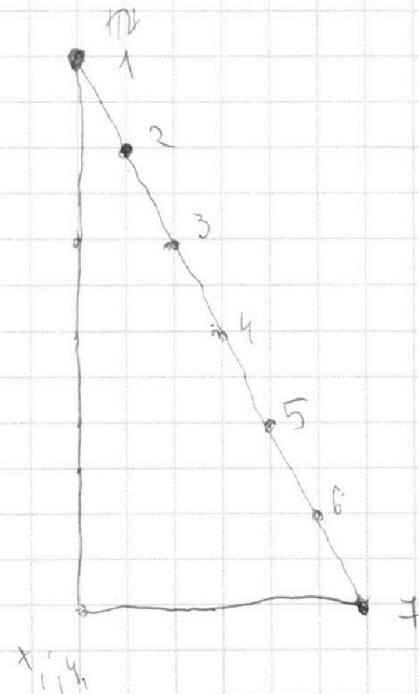
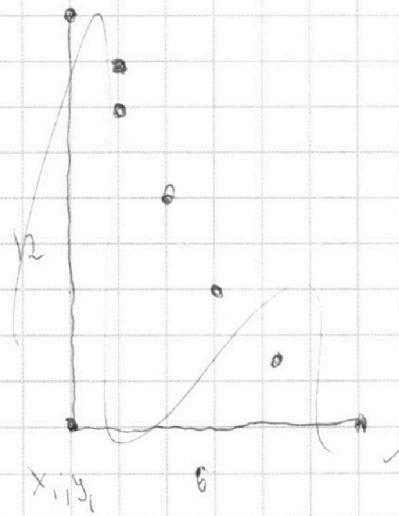
$$y_2 \geq y_1$$

При решении ур-ния $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

6 пары не могут быть: $(0; 12); (1; 10); (2; 8); (3; 6); (4; 4);$
 $(5; 2); (6; 0)$.

Три решения будут иметь по 2 пары, одна из которых

Множество всех пары уравнений.



не входит в них.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для решения используем метод Гаусса: $I - \underline{II}$, $\underline{I} - \underline{III}$, $I - \underline{III}$. И получим

из \underline{III} :

Здесь, это никакие не числа. Так же $\underline{II} - \underline{I}$ и $I + \underline{II}$ не являются правильными

Для $\underline{III} - \underline{II}$:

Для первого 12 рядов имеем: $4 \cdot 4 = 16$, и т.д. для всех.

Все нули. Для каждого ряда имеем количество единиц: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

$$4 \cdot 7 \cdot 11 + (6 + 1) = 4 \cdot 7 \cdot 11 + 21 \neq -52 \quad \text{так } \underline{III} - \underline{II}$$

$$\Rightarrow \text{зап } \underline{II} - \underline{III} + \underline{III} - \underline{I} \quad 2(324) = 648 \text{ чисел}$$

Проверим. Для $\underline{I} - \underline{II}$:

$\Delta y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$. А y имеет форму $\overbrace{\dots}^{12} \dots$ и $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

$$-1, 0, 1, 2, 3, 4$$

из \underline{I}

\Rightarrow Все нули $\underline{I} - \underline{II}$ лежат на $y = 0, y = 1, y = 2$

Комп. симб. 2

$$2x_1 + x_2 > x_1$$

$$y_2 > y_1$$

и в коэффициентах на 2.

↑

Комп. симб. 1

↑

$$23 \cdot 2 + 2 + -2$$

$$25 - 2 =$$

12

$$-23$$

$$269 - 1 = 268$$

$$\text{П.д. } (68 + 23) \cdot 2 = 91 \cdot 2 = 182$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Две окружности с центрами:

на x -оси и симметричные

$$\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x-3)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 9 \end{cases}$$

р-ка ГМТ $x=3$ и $x=-3$

круги, с

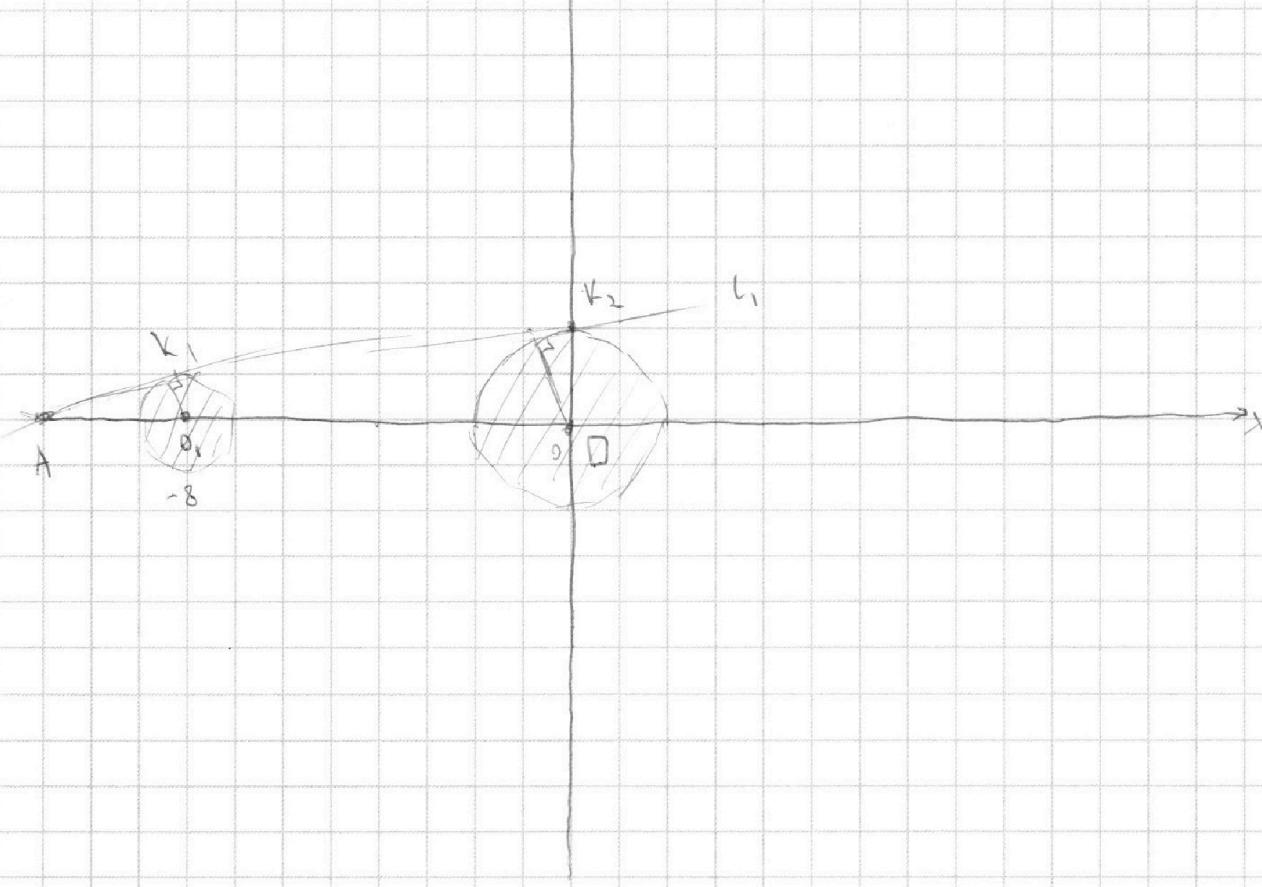
$r=2$.

Изображены на координатной плоскости:

x y

р-ка ГМТ $1 - \text{внешн. с}$

$r=1$



Гл.к. касательная к первой окружности с центром V_1 , сектр, сектр V_2 .

Пусть общая нормаль $ax - y + b = 0$ — касательная к окружности;

точка касания A . Всего 2 -е окружности имеют точку V_1 касательную.

2 внешние и 2 внутренние.

Две окружности с центром V_1 внешние. — b ,

таким же образом $a \neq 0$ и A . Тогда $\frac{AO_1}{AO} = \frac{V_1}{r_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow AO_1 + 3 = AO$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

значит, $AO = 16$; $AO_1 = 8 \Rightarrow m(-16; 0) \in$ центр

$$-16a + 0 - 0 + 10b = 0$$

$$10b = 16a \Rightarrow 5b = 8a$$

$$\text{Но } i. \text{ Точка } A: AV_1 = \sqrt{64^2 - 1^2} = 3\sqrt{71} \Rightarrow \text{tg } V_1AO = \frac{1}{3\sqrt{71}} = \frac{O_2K_2}{16} \Rightarrow OK_2 = \frac{16}{3\sqrt{71}}$$

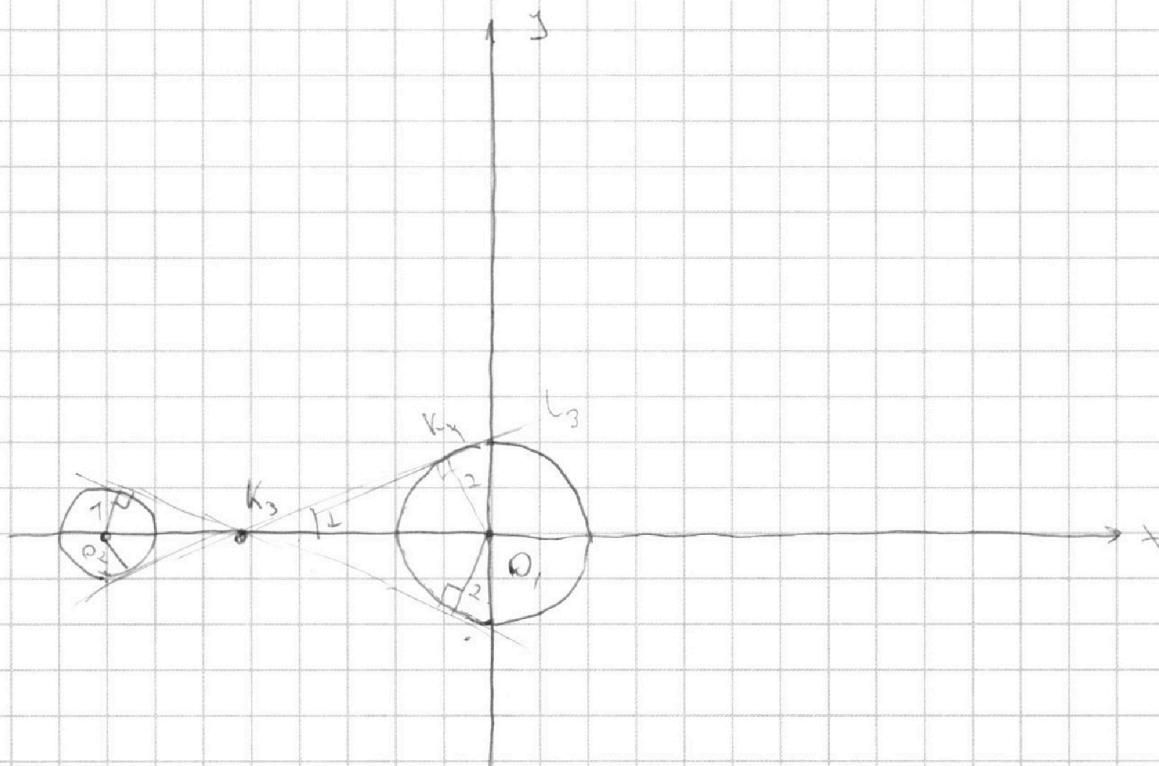
$$\Rightarrow a = (0) - \frac{16}{3\sqrt{71}} + 10b = 0$$

$$10b = \frac{16}{3\sqrt{71}}$$

$$b = \frac{16}{30\sqrt{71}} = \frac{8}{15\sqrt{71}} \Rightarrow a = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{15\sqrt{71}} = \frac{1}{3\sqrt{71}}$$

Такие корни и "крупнейший" венец. $\text{всег.} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{3\sqrt{71}}$.

Случай с "выходом" венца из...



$$\text{Угол между } \frac{O_2V_3}{O_1K_3} = \frac{1}{2}; O_2V_3 + O_1K_3 = 8 \Rightarrow O_1K_3 = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow m \cdot \left(-\frac{16}{3}, 0\right) \in \text{некий. } l_3$$

$$a \cdot \left(-\frac{16}{3}\right) - 0 + 10b = 0$$

$$10b = \frac{16a}{3} \Leftrightarrow 5b = \frac{8a}{3}$$

$$\text{Т.о.7. Гипотр. } K_3 X_4 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{16^2 - 12}{9}} = \sqrt{\frac{161}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{161} \Rightarrow t_{y2} = \frac{3}{\sqrt{161}} = \alpha.$$

Значит и наклоны сим. прямых совм. $y=0 \Rightarrow a = \pm \frac{3}{\sqrt{161}}$

$$\text{Отвем: } a = \pm \frac{3}{\sqrt{161}}, \quad a = \pm \frac{1}{3\sqrt{161}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

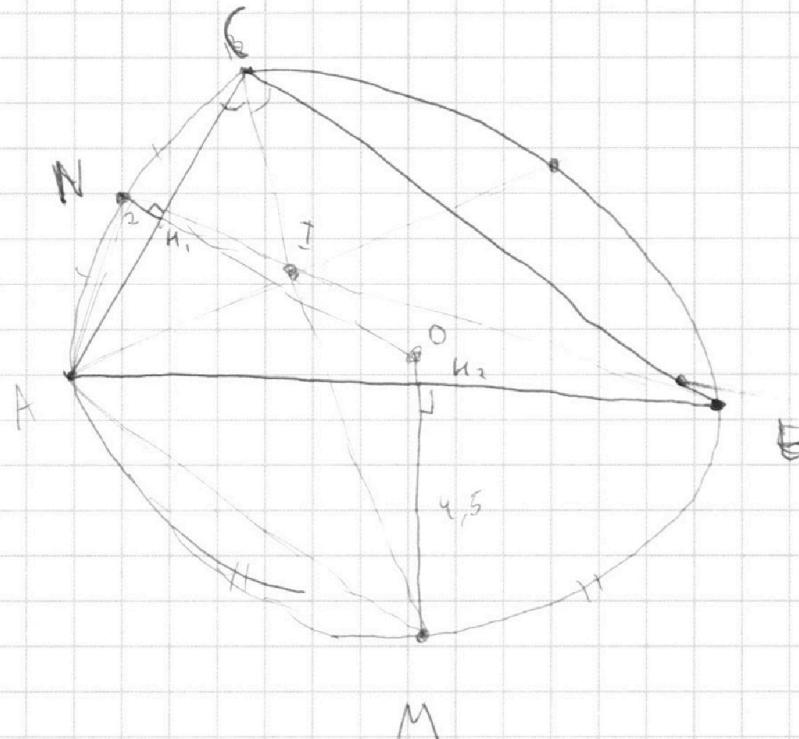
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $BN \text{ и } CM$ пересекаются в ч. высшем вершине, т.к.

$BN \text{ и } CM$ -две-ко: на равн. верх падают чутка

2) по чутке \triangle треугольник: $AN=NI$ и $AM=MI$.

(3) $AN=NC \Rightarrow NH_1 - \text{ср.пер} \times AC$

аналогично $MH_2 - \text{ср.пер.} \times AB \Rightarrow$ они пересекутся в чутке

чутке. Из условия $ABC \Rightarrow OH_1 = OH_2 + 2,5$, т.к. $OH = OH$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

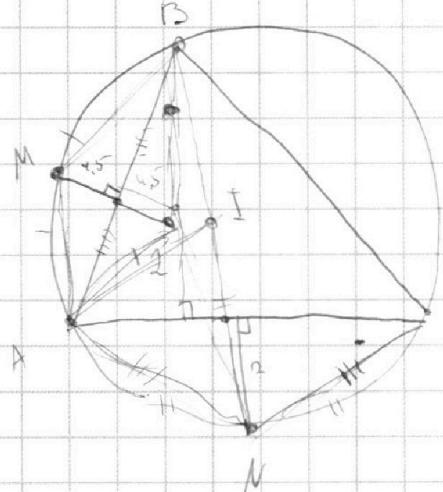


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$



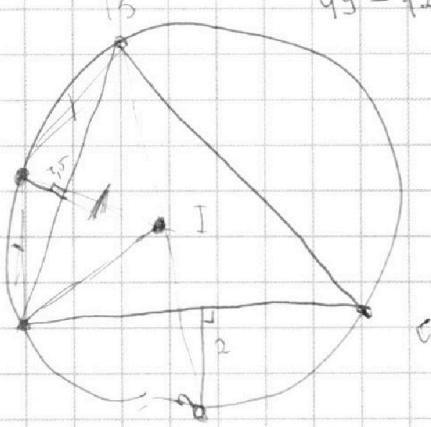
BI - ?

$M \leq 8$.

$$a = ? \quad b = 1$$

$$\frac{8}{}$$

$$49 - y_2 + 1$$



$$0,0^3 \quad 15,0$$

БНД?

как M \rightarrow \text{шснр.}

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$\sqrt{m^2 + b^2}$$

$$2+3$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(a-b)^2 - 3ab$$

Б 2M

$$a \equiv k$$

$$b \equiv m-k \pmod{m}$$

$$a \equiv b$$

$$a^2 \equiv k^2$$

$$= k^2 + 6k(m-k) + (m-k)^2 =$$

$$6ab \equiv 6k(m-k)$$

$$= k^2 + 6km - 6k^2 + m^2 - 2mk + k^2 =$$

$$b^2 \equiv (m-k)^2$$

$$= m^2 + 4mk - 8k^2 \equiv$$

$$k \not\equiv 0 \pmod{m}$$

$$l \equiv 0 \pmod{m}$$

$$8k^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$k \not\equiv 0 \pmod{m}$$

$$= 8k^2 \pmod{m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

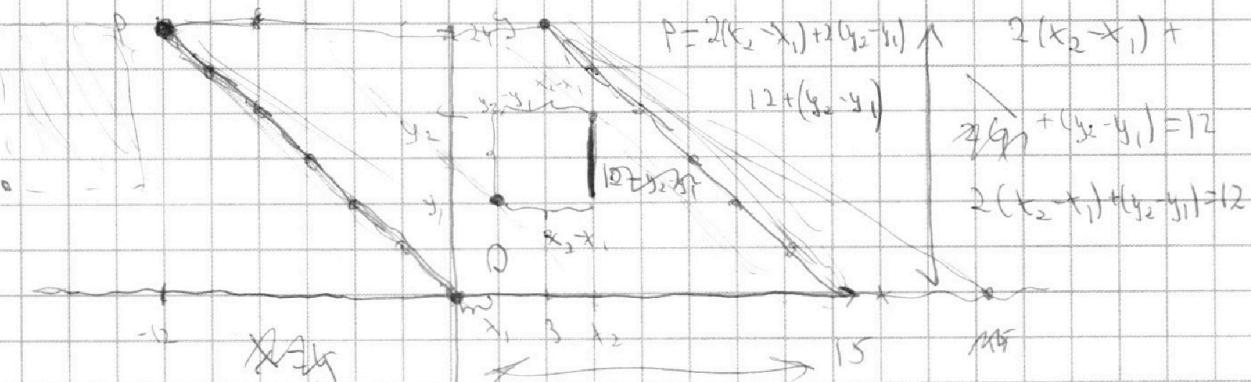
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \quad x_1 > x_2, x_1 > x_3, x_1 = y_1$$

$$y_1 > y_2$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$x_2 - x_1 = 6$$

$$y_2 - y_1 = 0$$

$$6 \neq 0$$

l₁

l₂

$$y_2 < y_1, \text{ therefore } 0 < 0.24$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12.$$

$$\sqrt{45x^2 + 1}, \sqrt{x^2 + 1}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$2(8x)$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 3x$$

$$(0, 0) \quad (4, 8) \quad (0, 12)$$

$$(5, 2) \quad (3, 6) \quad (1, 10)$$

$$x_1 > 0$$

$$y_1 > 0$$

$$x_2 > x_1 \\ y_2 > y_1$$

$$8x \\ \frac{8x}{\sin \alpha} = 10$$

$$8x = 5 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{4x}{5}$$

$$2n + k = 12, \text{ but } n \in \mathbb{N}$$

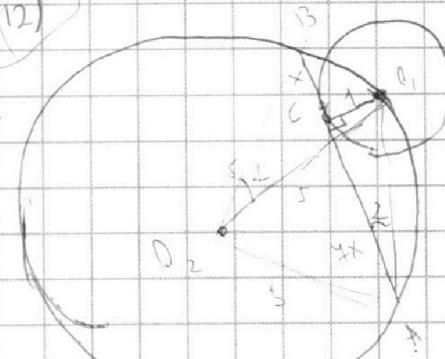
$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{10}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sin \alpha} = 10$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{10}$$

$$n = \frac{12 - k}{2} = 6 - \frac{k}{2}$$

$$K=0, \quad n=6 \\ K=2, \quad n=5 \\ K=4, \quad n=4 \\ K=6, \quad n=3$$



$$40^\circ \text{ max}$$

$$180^\circ \text{ max}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } ab = k, \quad 2^{\frac{14}{10}} \cdot 4^{\frac{10}{10}}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{\frac{17}{14}} \cdot 4^{\frac{14}{14}} \quad (abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{\frac{62}{10}} \cdot 4^{\frac{64}{10}}$$

$$ac = 2^{\frac{20}{10}} \cdot 4^{\frac{34}{10}} \quad \Rightarrow abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{\frac{25}{10}} \cdot 4^{\frac{32}{10}}$$

$\Rightarrow 2k_1 k_2 k_3$ — квадрат нам. числа, иначе abc — не целое, т.к. бывшее ac можно

$$1) k_1 k_2 k_3 = 2 : \quad (abc) = 2^{\frac{26}{10}} \cdot 4^{\frac{32}{10}} \quad b = 2^{\frac{6}{10}} \cdot 4^{\frac{-5}{10}} - \text{не целое}$$

$$2) k_1 k_2 k_3 = 8 : \quad (abc) = 2^{\frac{27}{10}} \cdot 4^{\frac{32}{10}} \quad b - \text{не целое}$$

$$3) \text{Значит, } k_1 k_2 k_3 \text{ оканч. } 4, \text{ иначе } b - \text{не целое: } k_1 k_2 k_3 = 4^2 \cdot 2$$

$$\text{Пусть: } \begin{cases} abc = 2^{\frac{26}{10}} \cdot 4^{\frac{33}{10}} \\ ac = 2^{\frac{20}{10}} \cdot 4^{\frac{37}{10}} \end{cases} \quad b - \text{не целое}$$

$$\Rightarrow k_1 k_2 k_3 \geq 4^2, \text{ иначе } b - \text{не целое}$$

$$6) k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 4^2 : \quad \begin{cases} abc = 2^{\frac{26}{10}} \cdot 4^{\frac{37}{10}} \\ ac = 2^{\frac{20}{10}} \cdot 4^{\frac{37}{10}} \end{cases} \quad b = 2^{\frac{6}{10}} \cdot 4^{\frac{2}{10}}$$

$$abc = 2^{\frac{26}{10}} \cdot 4^{\frac{37}{10}}$$

$$ab =$$

$$k_1 k_2 k_3 \geq 2 \cdot 4^2$$

$$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 4^2$$

$$a = \frac{2^{\frac{5}{10}} \cdot 4^{\frac{20}{10}}}{k_2}$$

$$k_1 k_2 k_3 =$$

$$2k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot k_3 \cdot 4^2$$

$$k = 2 \cdot 4^{\frac{10}{10}}$$

$$2k = 2^2 \cdot 4^{\frac{10}{10}}$$

$$k_3 \neq 1$$

$$k_1 k_2 k_3 = k_3 \cdot 2 \cdot 4^2$$

$$b = \frac{2^6}{k_3}$$

$$ab = k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 4^2$$

$$\begin{cases} abc = 2^{\frac{26}{10}} \cdot 4^{\frac{37}{10}} \\ ab = 2^{\frac{26}{10}} \cdot 4^{\frac{37}{10}} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

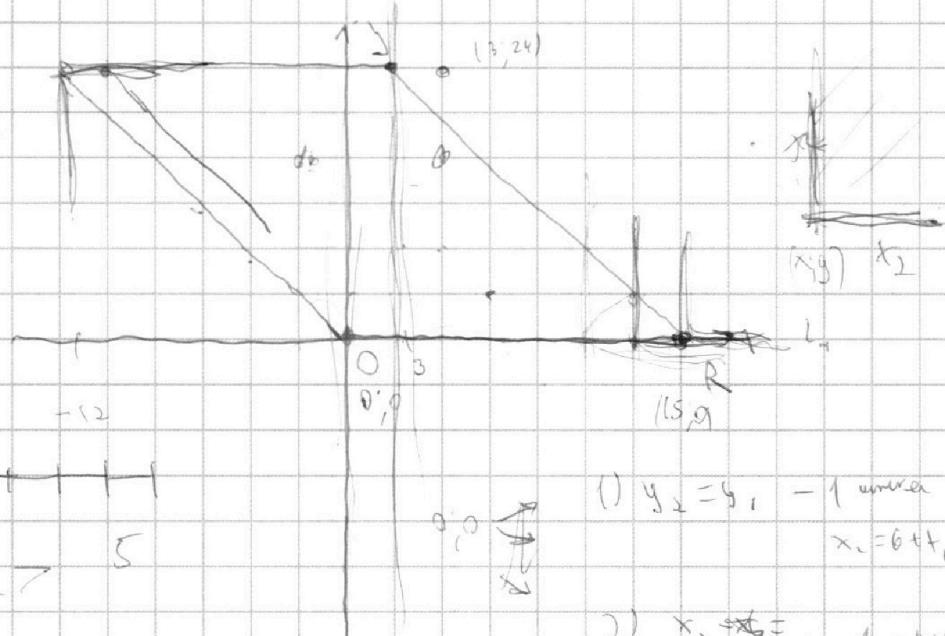
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) y_2 = y_1 - 1 \text{ между}$$

$$x_2 = 6 + t_1.$$

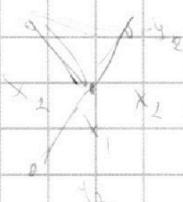
$$2) x_2 = x_1 - 1 - \text{ между}.$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$y_2 > y_1$$

$$x_2 > x_1 - 1 \text{ между } 5 \text{ между}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$



$$1) x_2 > x_1 : \quad P$$

$$c_1$$

$$x_2 > x_1$$

$$c_2$$

$$x_1 < x_2$$

$$c_3$$

$$c_4$$

$$c_5$$

$$c_6$$

$$c_7$$

$$c_8$$

$$c_9$$

$$c_{10}$$

$$c_{11}$$

$$c_{12}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$(y_2 - y_1) = 12 + 2(x_1 - x_2)$$

ст



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, сумма:

$$452 + 658 + 182 = 260 + 380 + 660 - 2 = 440 + 660 - 2 = 1100 - 2 = 1098 \text{ рублей}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ac = 8 \cdot 2^{12} \cdot 7^{12}, \quad bc = 2^{13} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{a}{c} = 2^{32} \cdot 7^{24}$$

$$\frac{c}{a} = 2^4 \cdot 7^7$$

$$c^2 = 2^{24} \cdot 7^{44}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{22}$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{15}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^6$$

$$\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 7^{10} \cdot 2$$

$$\frac{k_1 k_2}{k_3} = 7^{10}$$

$$k_1 k_2 = k_3 \cdot 7^{10} \cdot 1 \cdot k_3$$

$$2k_1 k_2 k_3 = k_3^2 \cdot 7^{10} \cdot 2 \mid k_3^2$$

$$\frac{2k_1 k_3}{k_2} = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{k_3}{k_2} = 2$$

$$k_3 = 2k_2$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{14}$$

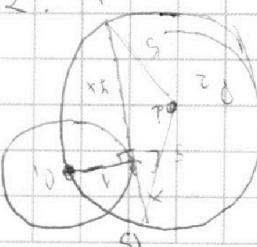
$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$\frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \quad \frac{7 \cdot 8}{2} = 28 \quad \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$1 - 10 \\ 2 - 9 \\ \vdots \\ 11 - 10$$

$$b = 2^5$$

28



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

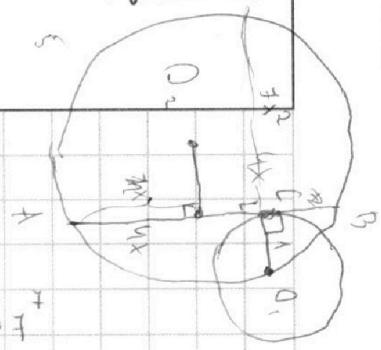
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.



$$\left. \begin{array}{l} ab = k_1 \cdot 2^{11} \cdot 7^{10} \\ bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14} \\ ac = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{34} \end{array} \right\} *$$

$$37 + 14 = 51$$

$$24 + 17 = 41$$

$$\frac{c}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^7$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{27}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$c^2 = \frac{k_2 k_3}{k_1} \cdot 2^{23} \cdot 7^{44}$$

$$abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{40} \cdot 7^{32}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

$$ab = 2^{11} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{14}$$

$$\frac{k_2 k_3}{k_1} \geq 2$$

$$\frac{c}{a} = \frac{k_2}{k_1} \quad \frac{c}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^7; \quad c = a \cdot 2^3 \cdot 7^7 \cdot \frac{k_2}{k_1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k_3}{k_2} \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$c = a \cdot 2^3 \cdot 7^7 = 2^6 \cdot 7^{22} \cdot b$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{20} \cdot b \cdot \frac{k_3}{k_2}$$

$$b \neq 1$$

$$k_1 k_2 k_3 \geq 2$$

$$k_1 k_2 k_3 \neq 2$$

$$a = 2 \cdot 7^{12} \quad b = 2^3 \cdot 7^9$$

$$ac = 2^{11} \cdot 7^{10}$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{15}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{14}$$

$$\frac{b}{c} \neq 1$$

$$\frac{c}{b} = 2^7 \cdot 7^7 \quad | \cdot bc$$

$$\frac{c}{b} = \frac{k_3}{k_1} \cdot 2^6 \cdot 7^{27} \quad | \cdot bc$$

$$c^2 = \frac{17 \cdot 7^{17}}{2^{11} \cdot 7^{10}}$$

$$c^2 = \frac{k_3 k_2}{k_1} \cdot 2^{12} \cdot 7^{52}$$

$$b = \frac{2^{14} \cdot 7^{10}}{a} \Rightarrow ac = 2^6$$

$$b = \frac{k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}{c}$$

$$\frac{k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}{a}$$

$$\frac{k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}{c} = \frac{2^6 \cdot 7^6}{a}$$

$$b = \frac{2^6 \cdot 7^6}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-7x + 2 = (2 - 7x) S.$$

$$-(4x - 2)$$

$$-(7x - 2) + (7x - 2)$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$x^2 \in \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\min$$

$$\frac{8}{49} - \frac{17}{49} = \frac{-62}{49} + 3 =$$

$$\sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5 \cdot 17}{49} - \frac{\sqrt{15}}{49} =$$

$$3 \cdot 49 - 62 =$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 = \frac{85}{49}$$

$$y_0 = -\frac{4}{4} = 1. (50 - 1) + 3 =$$

$$x_0 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = 150 - 3 =$$

$$= 147 - 62 =$$

$$= 85$$

$$y_0 = -$$

$$2\sqrt{\frac{1}{4}}$$

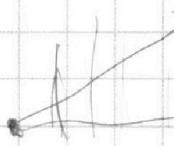
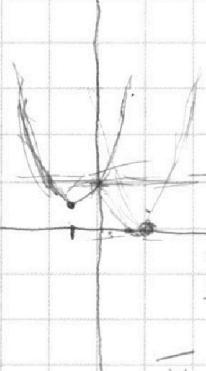
$$\frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$147 - 62 =$$

$$= 85$$

$$2\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{5}{2} + 3$$

$$x_0 =$$



$$y^2 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 - 5x + 3 =$$

$$= (2x+1)(x-3) =$$

$$= -2x^2 - 6$$

$$D = 25 - 4 \cdot 4 = 1$$

$$(2x+1)(x-3) = 0$$

$$2x^2 - 2x - 3x + 3 =$$

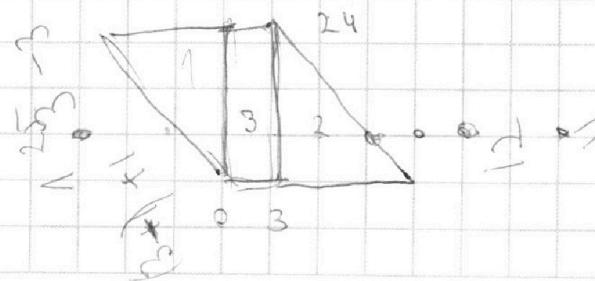
$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$$

$$y_1 = 1, y_2 = 3$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}, \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y_1 = 1, y_2 = 3$$

$$24 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

