



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Запишем, что $\cancel{abc} : 7^{35}$. Тогда пусть a имеет в своем разложении
на простые множители 7^{12} , а $c - 7^{27}$. Таким образом ~~все~~ условия
на кратность 7^2 и 7^{18} выполняются и в abc будет минимальная
возможная степень 7 .

Пусть a_2, b_2, c_2 - степени 2 в разлож. на простые множители \cancel{a}, \cancel{b} и
с соотв.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ c_2 + a_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 15 + 17 + 23 = 55 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 56, \text{ т.к. } a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2$ хотя бы 28. Пример: $a_2 = 11, b_2 = 5, c_2 = 12$ (*все условия выполнены*)

Очевидно, что добавлять какие-то простые числа, кроме 2 и 7, нет смысла,
т.к. на них нет условий, но они увеличивают abc

Ответ: наим. возможн. произв. $abc = 7^{35} \cdot 2^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Найдем НWD $(a+b, a^2-7ab+b^2)$ пользуясь алгоритмом Евклида:
 $(a+b, a^2-7ab+b^2) = (a+b, a^2-7ab+b^2 - (a+b)(a+b)) =$
 $= (a+b, -7ab - 2ab) = (a+b, -9ab)$

Заметим, что $a+b \nmid a$ и $a+b \nmid b$, т.к. a и b - взаимно
просты. При этом ~~9~~ $9ab$ делится на a, b и 9
 \Rightarrow наибольшее возможное $m=9$.

Пример: $a=4, b=5: \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-70+25} = \frac{9}{-49} = \frac{1}{-11}$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

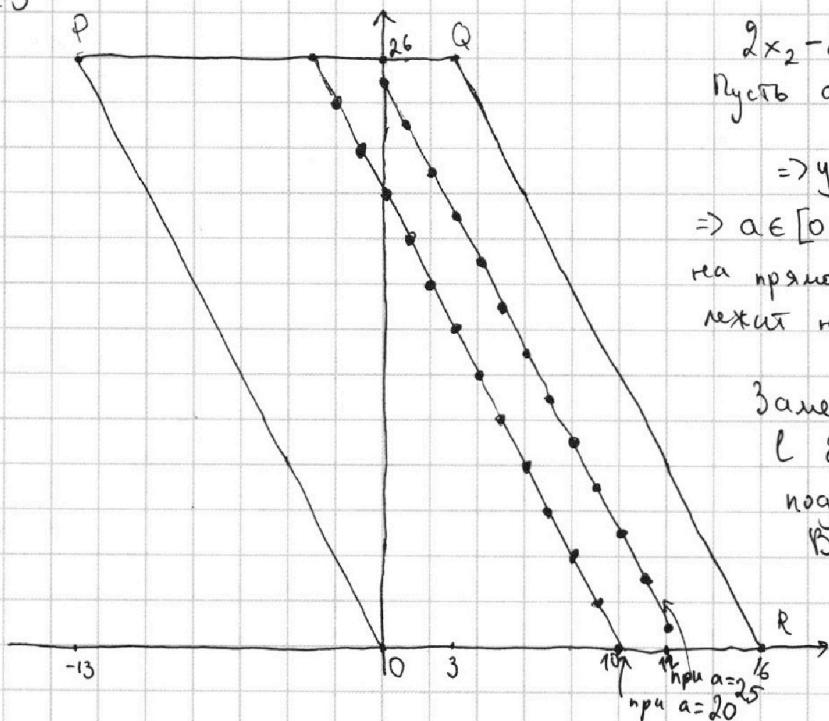
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\text{Пусть } a = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$\Rightarrow y_2 = a - 2x_2 \text{ (презек л)}$$

$\Rightarrow a \in [0; 32]$, т.к. PO лежит
на прямой $y_1 = -2x_1$, а QR
лежит на прямой $y_2 = 32 - 2x_2$.

Заметим, что при a -чет.,
 l будет пересекать 13 подходящих точек (т.е. точки
B, которые подходят в
пару с этим a). А при
 a -нечет., l будет
пересекать 13 подхо-
дящих точек.

Рассмотрим, сколько раз a принимает каждое своё значение (т.е. сколько
точек A задают подгруппу).
Заметим, что $a \geq 14$, т.к. иначе прямая $y_1 = -2x_1 - 14$, где
 $b \in [1; 14]$, а такая прямая будет полностью вне PQRO, т.к.
PO является $y = -2x$. При $a = 14$ получаем 14 возможных a от 14 до 32:

$$32 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_1 = 18 - 2x_1 \Rightarrow \text{подходит } 14 \text{ точек}$$

$$a \leq 32 \text{ подходит, т.к. даже при } a = 32 : 32 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_1 = 18 - 2x_1 \text{ (подходит)}$$

$\Rightarrow a \in [14; 32]$. При этом при a -чет., подходит 14 возможных точек
A, которые задают это самое a , и для каждой такой точки A
подходит 14 точек B, т.е. $\text{пар}(A, B) = 14 \cdot 14$ для a -чет. Аналогично
для a -нечет. $\text{пар}(A, B) = 13 \cdot 13$. Всего четных $a = 10$, а нечетных
 $a = 9$.

(Заметим, что прямые "из точек B" и "из точек A" не пересекаются,
т.к. первая прямая задается как $y_2 = a - 2x_2$, а вторая как $y_1 = (a - 14) - 2x_1$. $a \neq a - 14$)

\Rightarrow ответом будет: $10 \cdot 14 \cdot 14 + 9 \cdot 13 \cdot 13 = 1960 + 1521 = 3481$

Ответ: 3481 пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

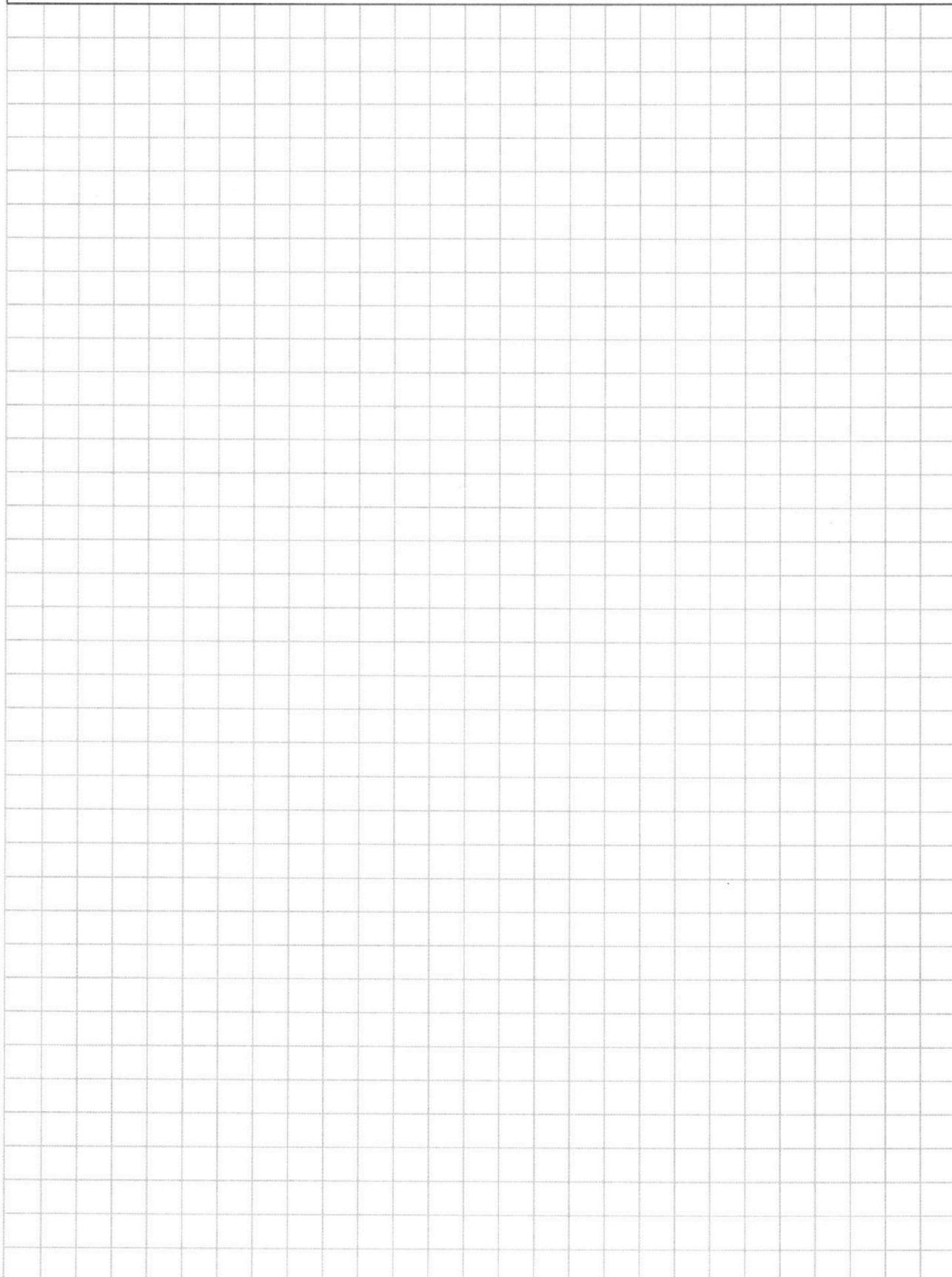
5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \text{Черновик} \\ & \begin{cases} ax + y - 8b = 0 \rightarrow y = 8b - ax \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 =$$

$$= x^2 + y^2 - 24y + 128$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 24 \\ \times 8 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$(x^2 + (8b - ax)^2 - 1) \left(x^2 + (8b - ax)^2 - 24y + 128 \right) \leq 0$$

$$x^2 + 8b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 \leq 0$$

$$\begin{aligned} & x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 192b^2 + 24ax + 128 = \\ & = (a^2 + 1)x^2 + (6ab + 24a)x + (64b^2 - 192b^2 + 128) \end{aligned}$$

$$(2+1)x^2 - 16abx + (64b^2 - 1) \leq 0$$

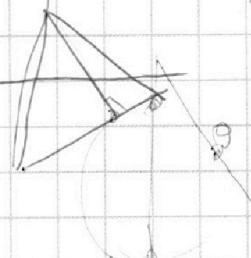
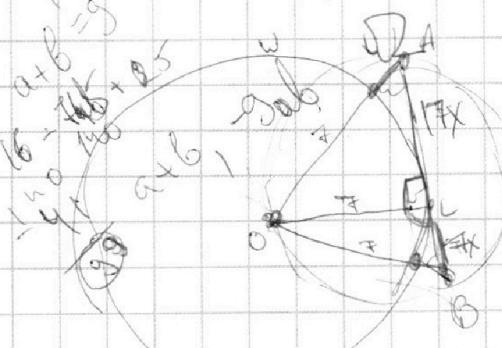
$$\Delta = 256ab^2 + 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 4a^2 - 256b^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = \frac{(8ab + \sqrt{\Delta})}{a^2 + 1} \left(\frac{8ab - \sqrt{\Delta}}{a^2 + 1} \right) \leq 0$$

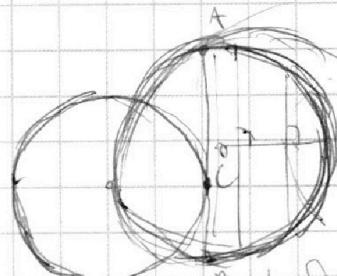
$$x = \frac{16ab + 2\sqrt{a^2 - 64b^2 + 1}}{2(a^2 + 1)}$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$$b^2 =$$



$$\begin{array}{r} 10 \\ 17 \\ + 17 \\ \hline 27 \\ 12 \\ \hline 27 \end{array}$$



$$17x + 7x = 24x$$

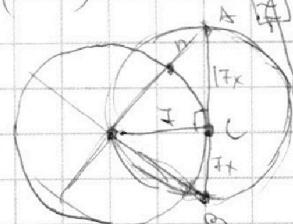
$$\begin{aligned} 289x^2 + 49 &= 49 + 14m + m^2 \\ 289x^2 + 49 &= 49 + 14m + m^2 \end{aligned}$$

$$\Delta = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\begin{aligned} (17x)^2 + 7^2 &= (1+m)^2 \\ (17x)^2 + 7^2 &= (1+m)^2 \end{aligned}$$

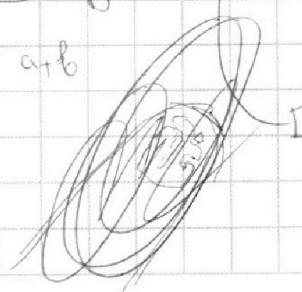
$$\Rightarrow 94 \quad \text{НДП}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = ?$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} \quad (a+b, -3ab)$$



$$74m = 49x^2$$

$$14m = \sqrt{49x^2 - 289x^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \text{Черновик}$$
$$9x^2 - 36x + 4 = 9x^2 + 6x + 1 \quad a+b=9, ab=4$$
$$-42x = 5 \quad \frac{9}{5}$$
$$D = 9 - 43$$

$$D = 36 - 24 = 12$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$9x + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$
$$81x^2 + 81x^2 - 108x + 4 + 18x\sqrt{ } = 1 + 3x^2 + 9x + 1 + 2$$

$$(6+3)x =$$
$$15 \\ 12 \\ 2 \cancel{3}$$

$$81x^2 - 81x^2 - 108x + 4 + 18x\sqrt{ } = 1 + 3x^2 + 9x + 1 + 2$$
$$-108x + 4 + 18x\sqrt{ } = 1 + 3x^2 + 9x + 1 + 2$$
$$(9x - 1)^2 - 1 = (a+1)b + a(b+1)$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \neq \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$(3x + \sqrt{2})^2 = (6 - 2\sqrt{6})x$$
$$6 - 2$$



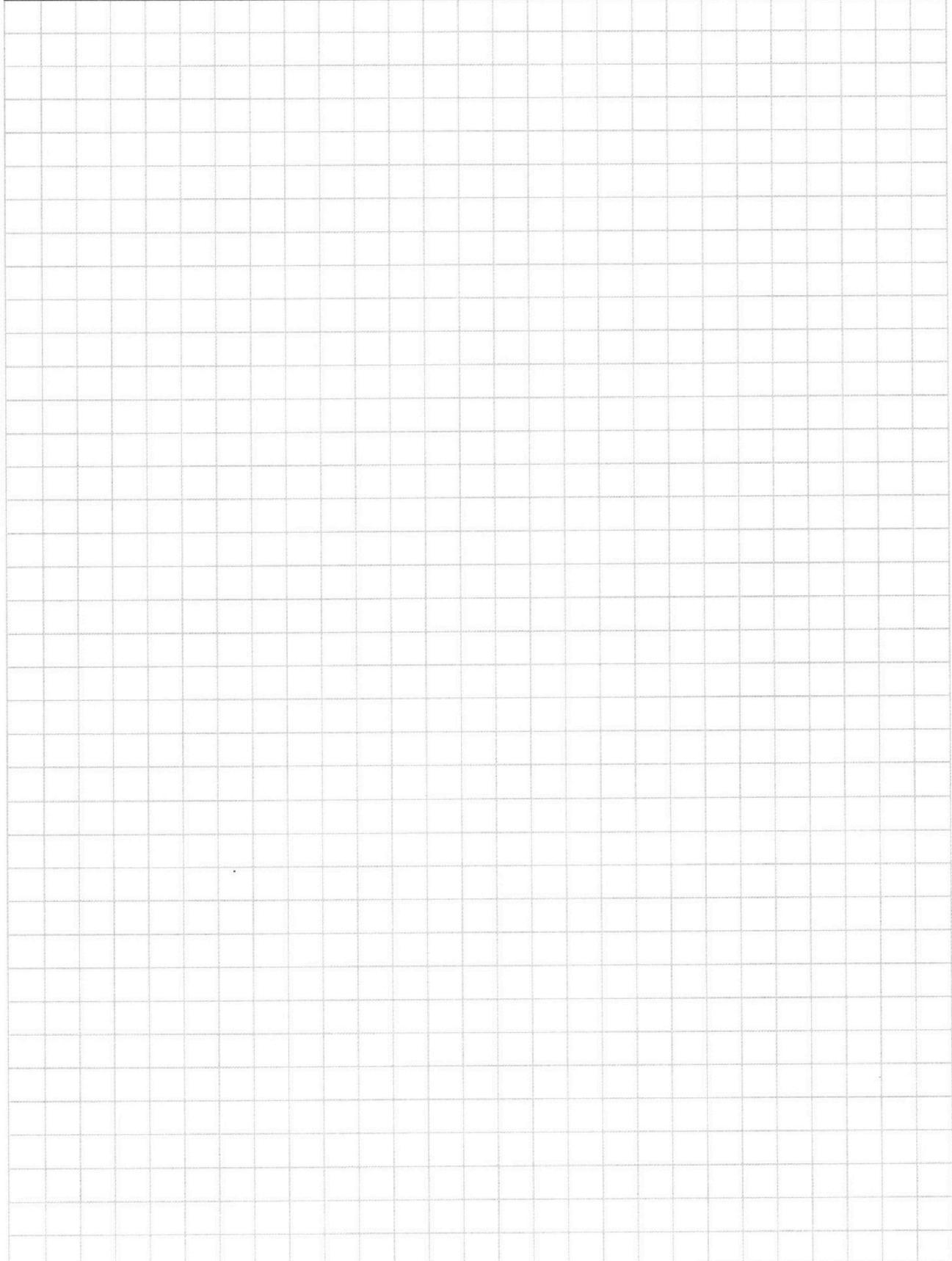
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





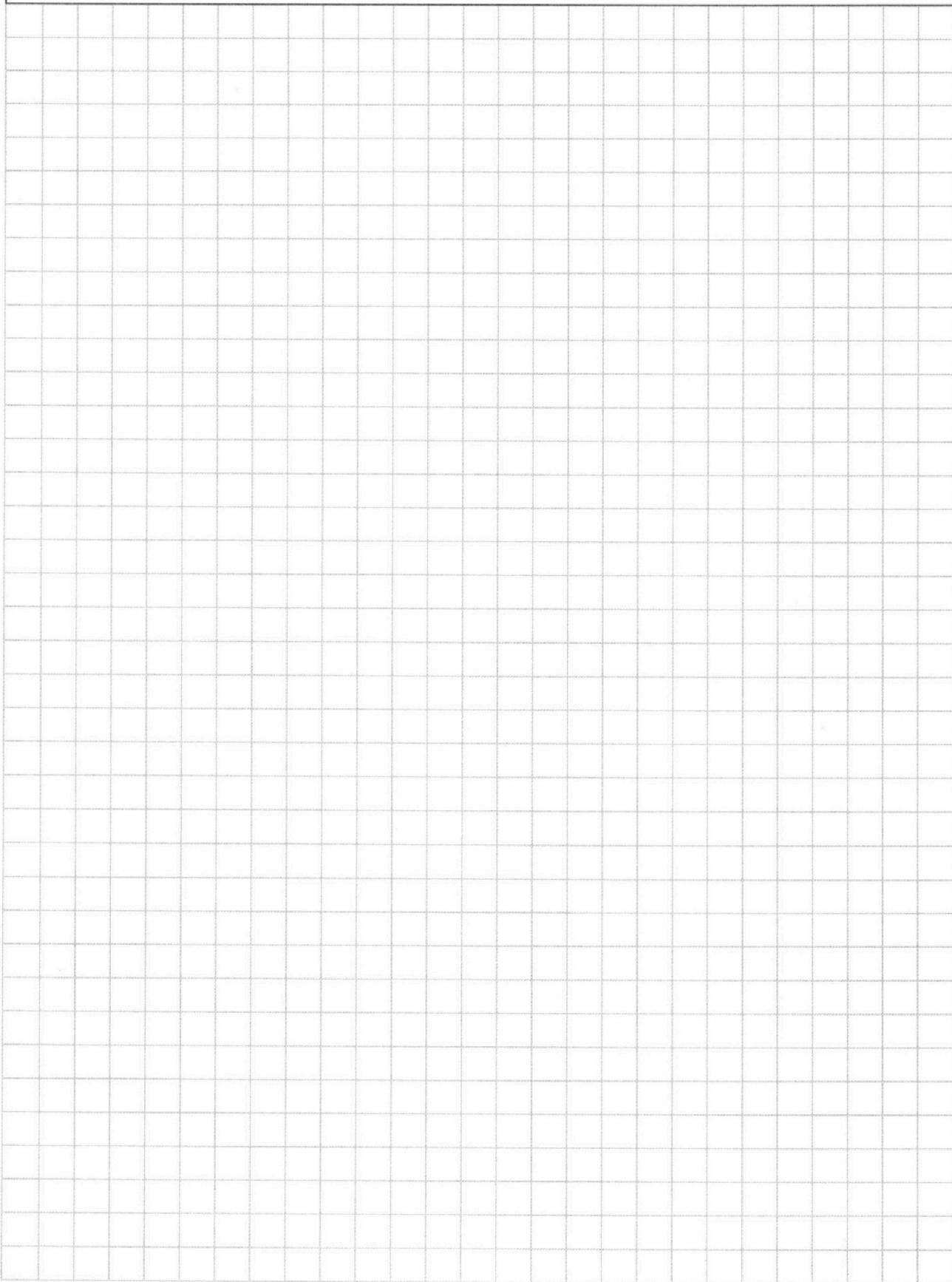
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

 МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

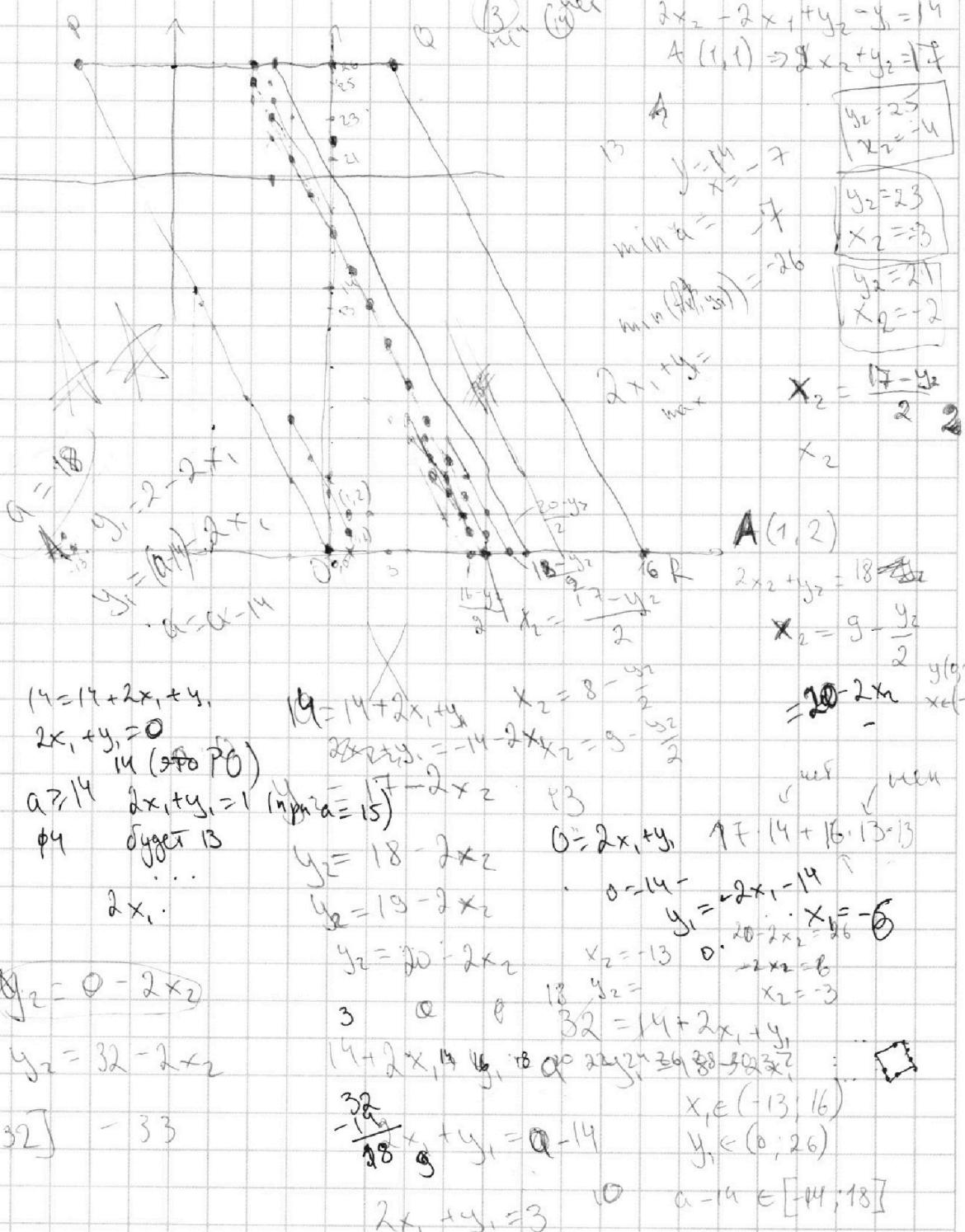
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_1 = 3 - 2x_1$$

$$x_1 = \frac{3 - y_1}{2}$$

$$13^2 = 1680 - 16y_1$$

$$\frac{1680}{16} - \frac{16y_1}{16}$$

$$105 - y_1$$

$$y_1 = 105 - 13^2$$