



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = n_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot n_2 \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot n_3$$

$$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \quad \text{Найдем } k = \min(a^2 b^2 c^2)$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{15 \cdot 2} \cdot 7^{11 \cdot 2} \cdot 2^{17 \cdot 2} \cdot 7^{18 \cdot 2} \cdot 2^{23 \cdot 2} \cdot 7^{39 \cdot 2} = 2^{22} \cdot 7^{154}$$

$$\Rightarrow k = \text{НОК}(2^{15}, 2^{17}, 2^{23}, 7^{11}, 7^{18}, 7^{39})$$

$$= 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{h_a m_a} = (2^{h_b m_b}) \cdot (2^{h_c m_c}) = 2^{h_a + h_b + h_c} \cdot 2^{m_a + m_b + m_c}$$

$$ab = 2^{h_a + h_b} \cdot 2^{m_a + m_b} \quad bc = 2^{h_b + h_c} \cdot 2^{m_b + m_c}$$

$$ac = 2^{h_a + h_c} \cdot 2^{m_a + m_c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_a + h_b \geq 15 \\ m_a + m_b \geq 11 \end{cases} \quad \begin{cases} h_b + h_c \geq 17 \\ m_b + m_c \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} h_a + h_c \geq 23 \\ m_a + m_c \geq 39 \end{cases}$$

Найдем минимум $\min(h_a + h_b + h_c)$ и $\min(m_a + m_b + m_c)$

$$a_1 \text{ условие: } \begin{cases} 2h_a + 2h_b + 2h_c \geq 55 \\ 2m_a + 2m_b + 2m_c \geq 66 \end{cases} \quad \begin{cases} h_i \in \mathbb{Z} \\ m_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_a + h_b + h_c \geq \lceil \frac{55}{2} \rceil \\ m_a + m_b + m_c \geq \lceil \frac{66}{2} \rceil \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_a + h_b + h_c \geq 28 \\ m_a + m_b + m_c \geq 34 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{34}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-5ab}$$

Если эту дробь
можно сократить на m , то $a+b = mq, q \in \mathbb{N}$

$$[(a-b)^2-5ab] = mp, p \in \mathbb{N}$$
$$\Downarrow (a-b)^2 \equiv 5ab \pmod{m}$$
$$\Leftrightarrow (mq-2b)^2 \equiv 5b(mq-b) \pmod{m}$$
$$\Leftrightarrow (m^2q^2 - 4mqb + 4b^2) \equiv 5bmq - 5b^2 \pmod{m}$$
$$\Leftrightarrow m(m^2q^2 - 4qb) + 4b^2 \equiv m - 5qb - 5b^2 \pmod{m}$$
$$\Leftrightarrow 4b^2 \equiv -5b^2 \pmod{m}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 = h_1 m + k \\ -5b^2 = h_2 m + k \end{cases} \Rightarrow 4b^2 + 5b^2 = (h_1 + h_2)m$$
$$\Leftrightarrow 9b^2 = (h_1 + h_2)m \quad \begin{cases} h_1 > 0 \\ h_2 < 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 9b^2 : m \quad \Leftrightarrow (3b)^2 : m \quad \exists b \in \mathbb{N}$$

Если m не полный квадрат, то

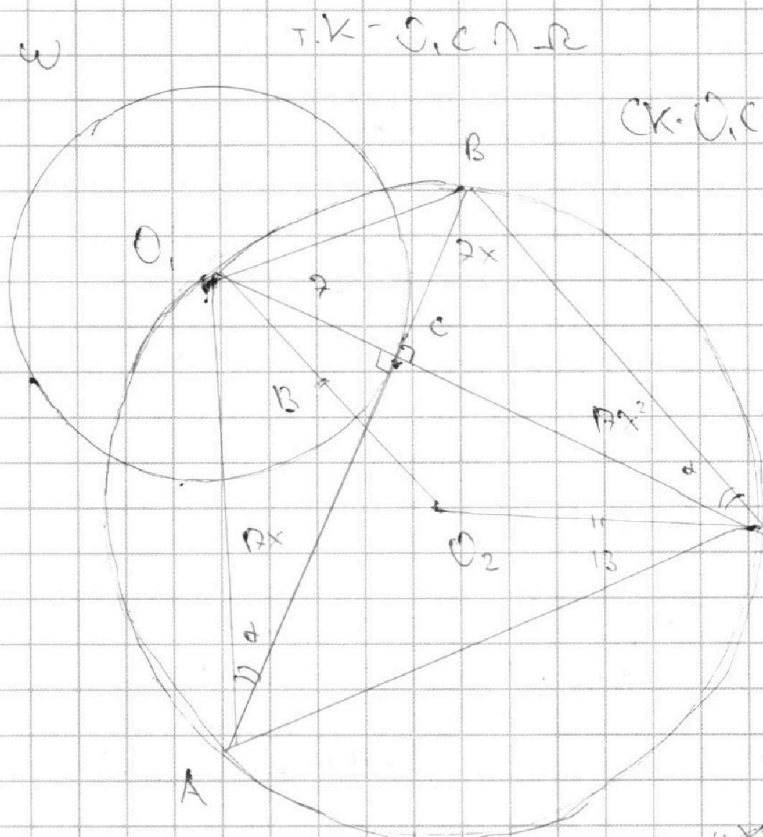
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Для хорд AB и OK:

$$CK \cdot O_1C = AC \cdot CB$$

$$\frac{O_1C}{CK} = \frac{AC}{CB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{CK} = \frac{19}{19x}$$

$$2CK = 19x \Leftrightarrow CK = 19x$$

2) AB - касательная к дуге AK $\Rightarrow AB \perp O_1K$

3) $\angle O_1AC \sim \angle O_1KB$ опираются на одну дугу OB $\Rightarrow \angle O_1AC = \angle O_1KB = \alpha$

~~$\triangle AEC \sim \triangle BDK$~~

~~$\frac{CE}{AE} = \frac{DK}{BK}$~~

~~$\frac{2}{19x} = \frac{2}{19}$~~

~~$\frac{2}{19x} = \frac{2}{19} \Leftrightarrow 19 = 19x \Leftrightarrow x = 1$~~

~~$\Rightarrow CB = 19, AC = 19 \Rightarrow AB = CB + AC$~~

4) $B \perp O_1CB \Rightarrow O_1B^2 = O_1C^2 + CB^2 = 49(1+x^2)$

$B \perp AOC \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{O_1C^2}{AO^2} = \frac{49}{49+19x^2}$

$\triangle AOB \Rightarrow \frac{O_1B}{\sin \alpha} = 2R = OK \Leftrightarrow \frac{O_1B^2}{\sin^2 \alpha} = 4R^2 \Leftrightarrow \frac{49(1+x^2)}{\frac{49}{49+19x^2}} = 4 \cdot 169$

$\Leftrightarrow (1+x^2)(49+19x^2) = 676 \Leftrightarrow 19x^4 + 168x^2 - 627 = 0$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{84^2 + 627 \cdot 19} - 84}{19}} \Rightarrow AB = 24 \sqrt{\frac{\sqrt{84^2 + 627 \cdot 19} - 84}{19}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 2x + 1} = 1 - 9x$$

$$OДЗ: \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$3x^2 - 6x + 2 \neq 3x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{3x^4 - 9x^2 - 9x^2 + 2} = 1 - 18x + 8(x^2$$

$$2\sqrt{3x^4 - 9x^2 - 9x^2 + 2} = -95x^2 + 15x + 2$$

$$36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = \dots$$

Можно заметить, что если к подкоренному выражению $3x^2 + 2x + 1$ прибавить $1 - 9x$, то получится подкоренное выражение $3x^2 - 6x + 2$

$$3x^2 + 2x + 1 = a, \quad 1 - 9x = b \Rightarrow \sqrt{a+b} \mp \sqrt{a} = b$$

$$\Rightarrow a+b + a - 2\sqrt{a^2+ab} = b^2 \Rightarrow b^4 + b(4\sqrt{a^2+ab} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow b^2(b^2 + 4\sqrt{a^2+ab} - 1) = 0$$

$$1) b^2 = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \quad x = 1/9$$

$$2) \sqrt{a^2+ab} = 1 - b^2 \quad 16(a^2+ab) = 1 - 2b^2 + b^4$$

$$16a^2 + 16ba + (2b^2 - b^4 - 1) = 0 \quad D_1 = 64b^2 - 32b^2 + 16b^4 + 16 =$$

$$= 16b^4 + 32b^2 + 16 = 16(b^2 + 1)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{-8b \pm 4(b+1)}{16} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/4 - 1/4b & (i) \\ a = -1/4 - 3/4b & (ii) \end{cases}$$

$$(i) 12x^2 + 12x + 4 = 1 - 1 + 9x \quad \Rightarrow 12x^2 + 3x = 0 \quad D < 0$$

$$(ii) 12x^2 + 12x + 4 = -1 - 3 + 27x \quad \Rightarrow 12x^2 - 15x + 8 = 0 \quad D < 0$$

Ответ: $x \in \{1/9\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+y-bb=0 & (i) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (ii) \end{cases}$$

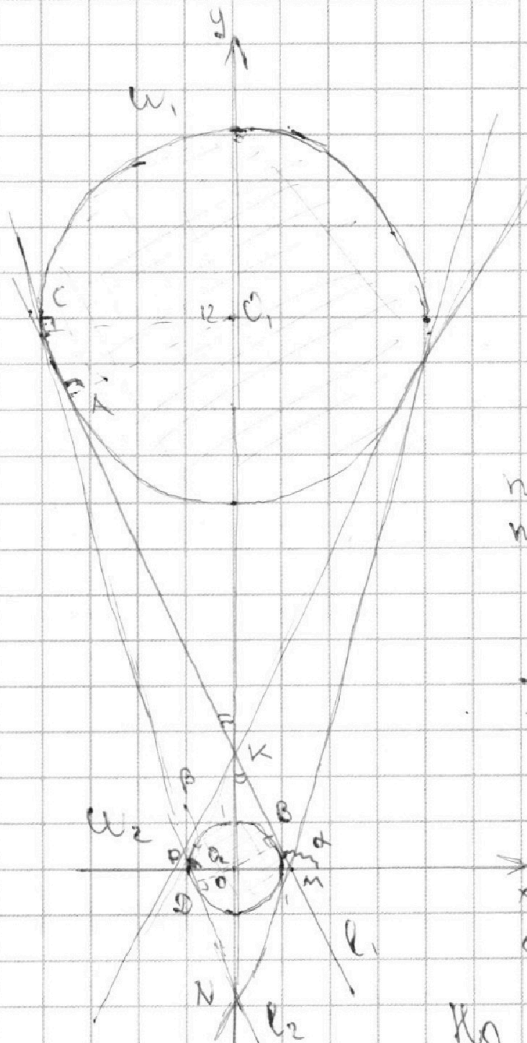
(i) $y = -ax + bb$ - прямая, θ угла наклона $-a$, т. $(0; bb)$

(ii) 1) $\begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$ -

область внутри окр. с центром в т. $(0; 0)$ и радиусом 1,
но снаружи окр. с центром в т. $(0; 12)$ и радиуса 4

2) $\begin{cases} x^2+y^2 > 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$ -

область внутри окр. с центром в т. $(0; 12)$ и радиуса 4,
но снаружи окр. с центром в т. $(0; 0)$ радиуса 1



2 решения возникают только
при одновременном касании
прямой обеих окружностей
(4 случая)

Касательные можно раз-
делить на 2 типа:
- внешние (не пересекающие Oy)
- внутренние (пересекающие Oy
между окр.)

Для каждого типа пара
прямых имеет одну точку
пересечения с Oy (одно значение bb),
а θ угла наклона с противоположными
знаками.

I) Внутренние касательные
(см. рис)

Прямые $l_1 \cap W_1 - т. A$, $l_2 \cap W_2 - т. B$

$\Rightarrow O_1A \perp l_1$, $O_2B \perp l_2$

$\Rightarrow \Delta AOK \sim \Delta BOK$ $\frac{OK}{O_1K} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{1}{4}$
 $(т. K - пр. $l_1 \cap Oy$) \Rightarrow \frac{OK}{O_2K} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{1}{1}$

Но $O_1K + KO_2 = O_1O_2 = R \Rightarrow т. K (0; 2,4)$

$\Rightarrow bb = 2,4 \Leftrightarrow b = 0,2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ΔO_2KB $\operatorname{tg} KO_2B = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - BKO_2) = \operatorname{ctg} BKO_2 = \frac{KB}{KO_2}$

ΔKBO_2 $\cos KO_2B = \frac{OB}{O_2K} = \frac{1}{2,4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos^2 KO_2B = \frac{25}{144}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 KO_2B = \frac{144}{25} - 1 = \frac{144 - 25}{25} = \frac{119}{25} \Leftrightarrow \operatorname{tg} KO_2B = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} KMX = -\operatorname{tg} KMO_2 = -\operatorname{tg} KO_2B = -\frac{\sqrt{119}}{5} = -a$

$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{119}}{5} \Rightarrow \text{Логарифм } (a;b) : (\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3), (-\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3)$

II) Внешние касательные

Пусть $l_1 \cap W_1 = T, C$ $l_2 \cap W_2 = T, D \Rightarrow O_1C \perp l_2, O_2D \perp l_1$

$\Rightarrow \Delta O_1CN \sim \Delta O_2DN$ ($T, N - l_2 \cap O_1O_2$) $\Rightarrow \frac{O_1N}{O_2N} = \frac{O_1C}{O_2D} = \frac{4}{1}$

Но $O_1N - O_2N = O_1O_2 = 12$

$\Rightarrow T, N(0; 4) \Rightarrow 8b = -4 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$

ΔO_2DN $\cos NO_2D = \frac{O_2D}{NO_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} NO_2D = \sqrt{15}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} CPX = -\operatorname{tg} O_2PD = -\operatorname{tg} DO_2N = -\sqrt{15} = -a$

$\Rightarrow a = \sqrt{15} \Rightarrow \text{Логарифм } (a;b) : (\sqrt{15}; -\frac{1}{2}), (-\sqrt{15}; -\frac{1}{2})$

Ответ: $(\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3), (-\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3), (\sqrt{15}; -\frac{1}{2}), (-\sqrt{15}; -\frac{1}{2})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2a+b - 2\sqrt{a^2+ab} = b^2$$

$$2a+b = b^2 + 2\sqrt{a^2+ab}$$

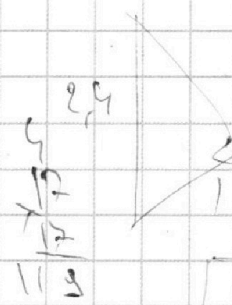
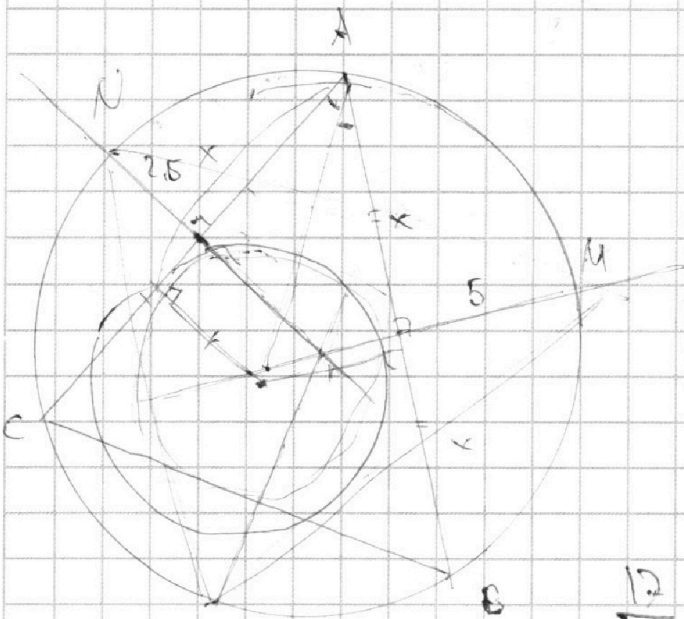
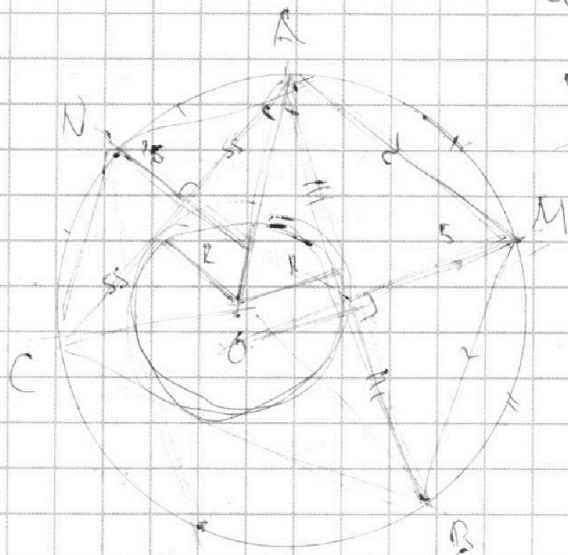
$$4a^2 + 4ab + b^2 = b^4 + 4b^2\sqrt{a^2+ab} + 4(a^2+ab)$$

$$16(b^4 + 2b^2 + 16) =$$

$$\frac{-8b + 4b + 4}{b^6} = \frac{4-4b}{b^6} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{b^5}$$

$$\frac{2}{b} = \sqrt{9}$$

$$b = 225$$



$$\sqrt{\frac{14}{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{199}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

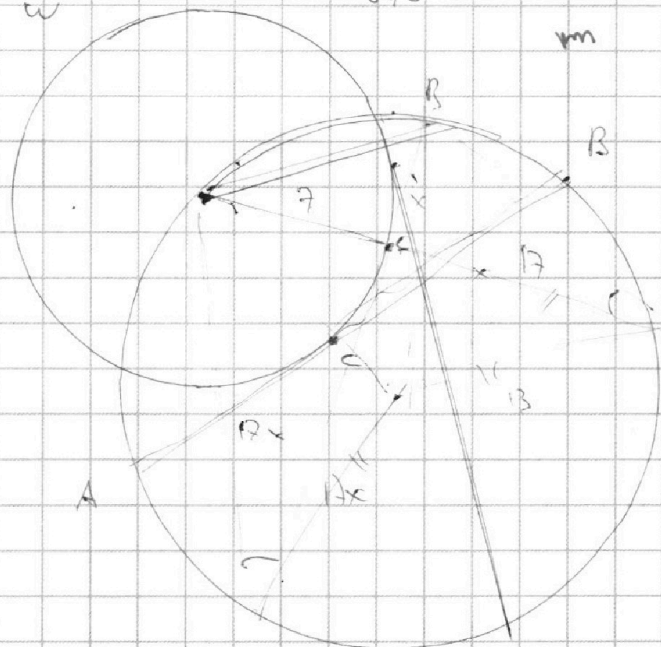
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ω (7)



$$1+x^2 = 6 \cdot 6(49 + 19x^2)$$

$$(1+x^2)(49 + 19x^2) = 6 \cdot 6$$

$$12, 12, 24$$

$$\frac{12}{12x} = \frac{1}{12}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{49 + 6}}{2}$$

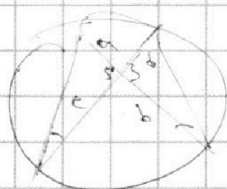
$$= 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{55}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha - 1}$$

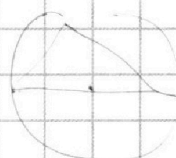
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{55}}{2}$$

A 2 (13)



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$ab = cd$$



$$ab = h_1 \cdot 2 \cdot r$$

$$bc = 2 \cdot r \cdot h_2$$

$$ca = 2 \cdot r \cdot h_3$$

$$a^2 b^2 c^2$$

НОК

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$-1 - 3x + 3x^2 + 3x + 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 = h$$

$$= 1 - 3x + 3x^2 + 12x$$

$$\frac{49 + 49x^2}{49(49 + 19x^2)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cancel{9x^4} + \cancel{8x^3} + \cancel{8x^2} + \cancel{9x^3}$$

$$abc = 2^{23} \cdot 2^3$$

$$\cancel{9x^4} - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 6x^2 + 6x$$

$$b = 1$$

$$c = 2^{23} \cdot 2^3$$

$$9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 6x^2 + 6x =$$

$$abc = 2$$

$$= 9x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 12x$$

$$\begin{array}{r} 626 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$abc = 2 \cdot 7$$

$$49 + 119x^2 + 49x^2 + 119x^4 = 626$$

$$ab =$$

$$119x^4 + 168x^2 - 626 = 0$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \hline \end{array}$$

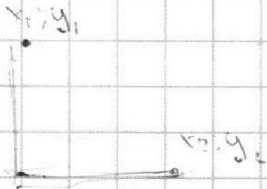
$$x = \frac{-84 \pm \sqrt{84^2 + 119 \cdot 626}}{119}$$

$$\begin{array}{r} 626 \cdot 2 \\ 328 \cdot 2 \\ 169 \cdot 2 \\ 13 \cdot 77 \end{array}$$

$$4 \cdot 13^2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 13$$

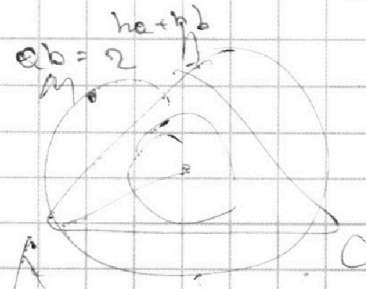
$$626 =$$



g

$$abc = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$



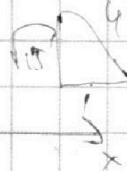
$$(mq - 2b) \equiv 5b(mq - b) \pmod{m}$$

$$-2b \equiv -5b^2 \pmod{m}$$

$$4b^2 = hm + k$$

$$5b^2 = h_2m + k$$

$$9b^2 = gm$$



$$\frac{10}{1} = 1 \cdot 10$$

25