МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab = n_1 2^{15} 7^{11}$ $\quad bc = 2^{17} 7^{18} \cdot n_2$ $\quad ac = 2^{23} 7^{39} n_3$

$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ Найдём $k = \min(a^2b^2c^2)$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{15}7^{11}, \vdots 2^{17}7^{18}, \vdots 2^{23}7^{39} \Rightarrow$ ~~$k = НОК(2^{17}7^{18}, 2^{15}7^{11}, 2^{23}7^{39})$~~

~~$= 2^{23}$.~~

$abc = 2^n 7^m = (2^{n_a} 7^{m_a}) \cdot (2^{n_b} 7^{m_b}) \cdot (2^{n_c} 7^{m_c}) = 2^{n_a+n_b+n_c} 7^{m_a+m_b+m_c}$

$ab = 2^{n_a+n_b} 7^{m_a+m_b}$ $\quad bc = 2^{n_b+n_c} 7^{m_b+m_c}$

$ac = 2^{n_a+n_c} 7^{m_a+m_c}$

$\Rightarrow \begin{cases} n_a+n_b \geq 15 \\ m_a+m_b \geq 11 \end{cases} \begin{cases} n_b+n_c \geq 17 \\ m_b+m_c \geq 18 \end{cases} \begin{cases} n_a+n_c \geq 23 \\ m_a+m_c \geq 39 \end{cases}$

Нужно найти $\min(n_a+n_b+n_c)$ и $\min(m_a+m_b+m_c)$

Из систем: $\begin{cases} 2n_a+2n_b+2n_c \geq 55 \\ 2m_a+2m_b+2m_c \geq 68 \end{cases}$ $\begin{cases} n_i \in \mathbb{Z} \\ m_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n_a+n_b+n_c \geq \lceil \frac{55}{2} \rceil \\ m_a+m_b+m_c \geq \lceil \frac{68}{2} \rceil \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_a+n_b+n_c \geq 28 \\ m_a+m_b+m_c \geq 34 \end{cases}$

$\Rightarrow \min(abc) = 2^{28} 7^{34}$

Ответ: $2^{28} 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-5ab}$ Если эту дробь можно сократить на m, то $a+b=mq;\ q\in\mathbb{N}$

$[(a-b)^2-5ab] = mp,\ p\in\mathbb{N}$ $\Downarrow a = mq-b$

$\Downarrow$

$(a-b)^2 \equiv 5ab \pmod m$

$\Leftrightarrow (mq-2b)^2 \equiv 5b(mq-b) \pmod m$

$\Leftrightarrow (m^2q^2-4mqb+4b^2) \equiv 5bmq-5b^2 \pmod m$

$\Leftrightarrow m(m^2q^2-4qb)+4b^2 \equiv m\cdot 5qb-5b^2 \pmod m$

$\Leftrightarrow 4b^2 \equiv -5b^2 \pmod m$

$(n_1, n_2 \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 = n_1m+k \\ -5b^2 = n_2m+k \end{cases} \Rightarrow 4b^2+5b^2 = (n_1-n_2)m$

$\Downarrow \begin{cases} n_1>0 \\ n_2<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 9b^2 = (n_1-n_2)m$

$\Rightarrow 9b^2 \vdots m \quad \Leftrightarrow (3b)^2 \vdots m \quad 3b\in\mathbb{N}$

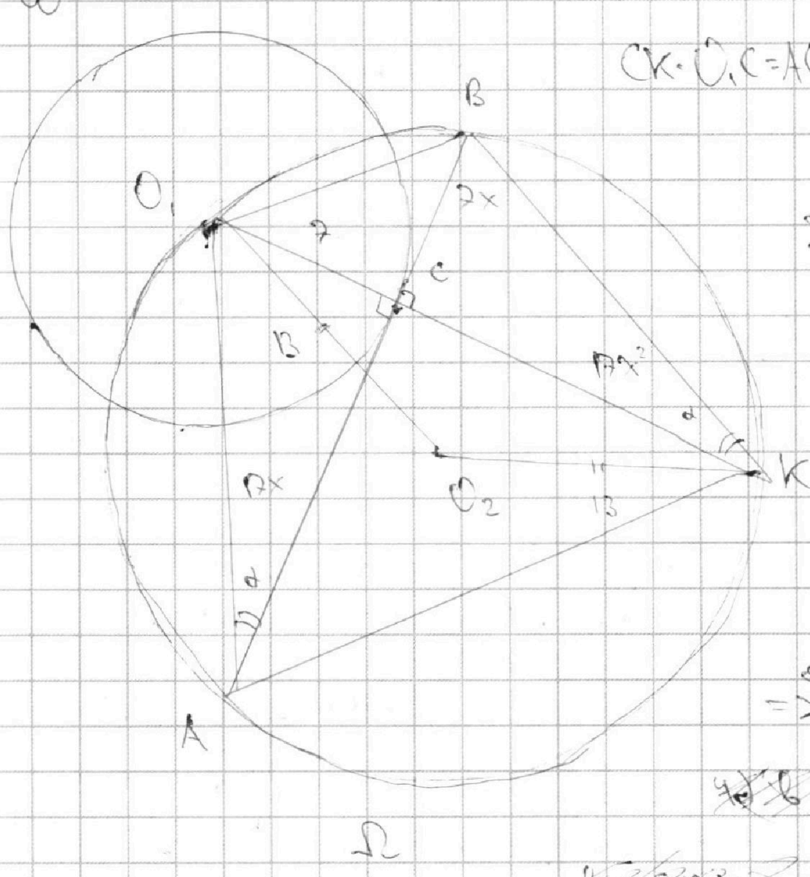
Если m неполный квадрат, то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т. $K - O_1C \cap \Omega$



1) Для хорд AB и O_1K:

$CK \cdot O_1C = AC \cdot CB$ $\cancel{\frac{O_1C}{CK} = \frac{BC}{AC}}$

$\cancel{\Leftrightarrow \frac{7}{CK} = \frac{7}{17}}$

$7CK = 119x^2 \Leftrightarrow CK = 17x^2$

$\cancel{\Rightarrow CK = 17}$

2) AB - касательная к $\omega \Rightarrow AB \perp O_1K$

3) $\angle O_1AC$ и $\angle O_1KB$ опираются на общую дугу O_1B

$\Rightarrow \angle O_1AC = \angle CKB = \alpha$

$\cancel{4) \text{ в } \triangle ACO_1 \; tg\,\alpha = \frac{O_1C}{AC} = \frac{7}{17x}}$

$\cancel{\text{в } \triangle CBK \; tg\,\alpha = \frac{BC}{BK} = \frac{7x}{17}}$

$\cancel{\Rightarrow \frac{7}{17x} = \frac{7x}{17} \Leftrightarrow 119 = 119x^2 \Leftrightarrow x = 1}$

$\cancel{\Rightarrow CB = 7,\ AC = 17 \Rightarrow AB = CB + AC}$

4) в $\triangle O_1CB$ $\quad O_1B^2 = O_1C^2 + CB^2 = 49(1+x^2)$

в $\triangle AO_1C$ $\quad \sin^2\alpha = \frac{O_1C^2}{AO_1^2} = \frac{49}{49+119x^2}$

в $\triangle AO_1B$ $\quad \frac{O_1B}{\sin\alpha} = 2O_2K \Leftrightarrow \frac{O_1B^2}{\sin^2\alpha} = 4O_2K^2 \Leftrightarrow \frac{49(1+x^2)}{49:(49+119x^2)} = 4 \cdot 169$

$\Leftrightarrow (1+x^2)(49+119x^2) = 676 \Leftrightarrow 119x^4 + 168x^2 - 627 = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{84^2+627\cdot 119} - 84}{119}} \Rightarrow AB = 24\sqrt{\frac{\sqrt{84^2+627\cdot 119} - 84}{119}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1-\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1+\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1-\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1+\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$

$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 - 2\sqrt{9x^4-9x^3-9x^2+2} = 1-18x+81x^2$

$2\sqrt{9x^4-9x^3-9x^2+2} = -75x^2+15x+2$

$36x^4-36x^3-36x^2+8 = \ldots$

Можно заметить, что если к подкоренному выражению $3x^2+3x+1$ добавить $1-9x$, то получится подкоренное выражение $3x^2-6x+2$

$3x^2+3x+1 = a$, $1-9x = b \Rightarrow \sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$

$\Rightarrow a+b+a-2\sqrt{a^2+ab} = b^2 \Rightarrow b^4 + b^2(4\sqrt{a^2+ab}-1) = 0$

$\Leftrightarrow b^2(b^2+4\sqrt{a^2+ab}-1) = 0$

1) $b^2 = 0 \Rightarrow 1-9x = 0 \quad x = 1/9$

2) $4\sqrt{a^2+ab} = 1-b^2 \quad 16(a^2+ab) = 1-2b^2+b^4$

$16a^2+16ba+(2b^2-b^4-1) = 0 \quad D/4 = 64b^2-32b^2+16b^4+16 =$

$= 16b^4+32b^2+16 = 16(b^2+1)^2$

$\Rightarrow a = (-8b \pm 4(b+1)):16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1/4 - 1/4\, b \quad (i) \\ a = -1/4 - 3/4\, b \quad (ii) \end{array}\right.$

(i) $12x^2+12x+4 = 1-1+9x \qquad 12x^2+3x+4 = 0 \quad D<0$

(ii) $12x^2+12x+4 = -1-3+27x \qquad 12x^2-15x+8 = 0 \quad D<0$

Ответ: $x \in \{1/9\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

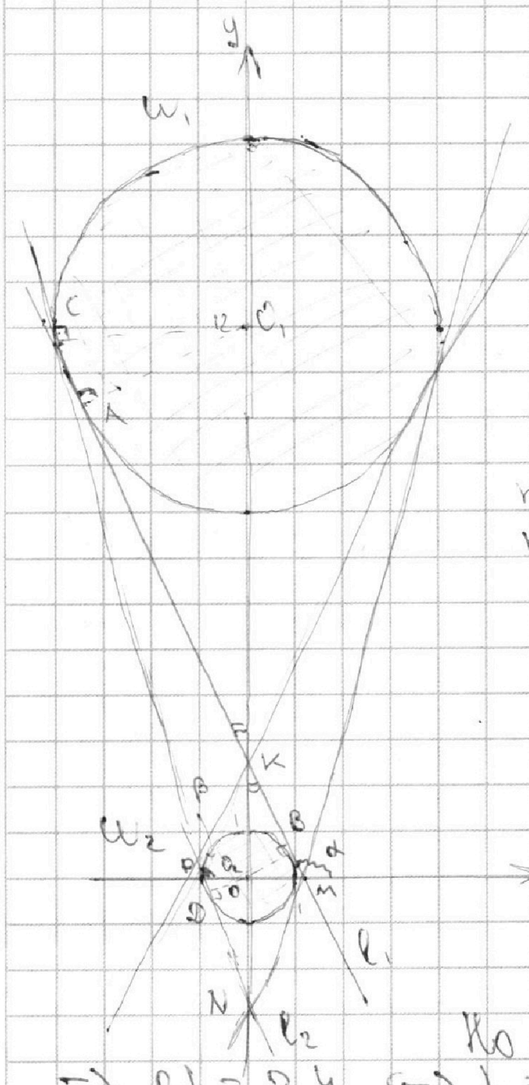
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \quad (i) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \quad (ii) \end{cases}$$

(i) $y=-ax+8b$ — прямая, tg угла наклона $-a$, т.$(0;8b)$

(ii) 1) $\begin{cases} x^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases}$ — область внутри окр. с центром в т.$(0;0)$ и радиусом 1, но снаружи окр. с центром в т.$(0;12)$ и радиуса 4

2) $\begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases}$ область внутри окр. с центром в т.$(0;12)$ и радиуса 4, но снаружи окр. с центром в т.$(0;0)$ радиуса 1



2 решения возникают только при одновременном касании прямой двух окружностей (4 случая)

Касательные можно разделить на 2 типа:
- внешние (не пересекающие O_y между окр.)
- внутренние (пересекающие O_y между окр.)

Для каждого типа пара прямых имеет общую точку пересечения с O_y (одно значение $8b$), а tg угла наклона с противоположными знаками.

I) Внутренние касательные (см. рис)

Пусть $l_1 \cap \omega_1$ — т. A, $l_2 \cap \omega_2$ — т. B
$\Rightarrow O_1A \perp l_1$, $O_2B \perp l_1$
$\Rightarrow \triangle AO_1K \sim \triangle BO_2K$ $\quad \frac{O_1K}{O_2K}=\frac{O_1A}{O_2B}=\frac{4}{1}$
(т.K — пр $l_1 \cap O_y$) $\Rightarrow$

Но $O_1K+KO_2=O_1O_2=12 \Rightarrow$ т.$K(0;2,4)$
$\Rightarrow 8b=2,4 \Leftrightarrow b=0,3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

в $\triangle O_2KB$ $\quad tg\, KO_2B = tg\left(\frac{\pi}{2} - BKO_2\right) = ctg\, BKO_2 = \cancel{\frac{O_2B}{}}\ \frac{KB}{KO_2}$

в $\triangle KBO_2$ $\quad \cos KO_2B = \frac{O_2B}{O_2K} = \frac{1}{2,4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos^2 KO_2B = \frac{25}{144}$

$\Rightarrow tg^2\, KO_2B = \frac{144}{25} - 1 = \frac{144-25}{25} = \frac{119}{25} \Leftrightarrow tg\, KO_2B = \frac{\sqrt{119}}{5}$

угол наклона l_1

$\Rightarrow tg\,\alpha = tg\, KMX = -tg\, KMO_2 = -tg\, KO_2B = -\frac{\sqrt{119}}{5} = -a$

$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{119}}{5} \Rightarrow$ Подходит $(a;b)$: $\left(\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3\right), \left(-\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3\right)$

II) Внешние касательные

Пусть $l_2 \cap \omega_1$ – т. C $\quad l_2 \cap \omega_2$ – т. D $\Rightarrow O_1C \perp l_2,\ O_2D \perp l_2$

$\Rightarrow \triangle O_1CN \sim \triangle O_2DN$ $\quad$ (т. N – $l_2 \cap Oy$) $\Rightarrow \frac{O_1N}{O_2N} = \frac{O_1C}{O_2D} = \frac{4}{1}$

Но $O_1N - O_2N = O_1O_2 = 12$

$\Rightarrow$ т. $N(0;4) \Rightarrow 8b = -4 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$

в $\triangle O_2DN$ $\quad \cos NO_2D = \frac{O_2D}{NO_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow tg\, NO_2D = \sqrt{15}$

угол наклона l_2

$\Rightarrow tg\,\beta = tg\, CPX = -tg\, O_2PD = -tg\, DO_2N = -\sqrt{15} = -a$

$\Rightarrow a = \sqrt{15} \Rightarrow$ Подходят $(a;b)$: $\left(\sqrt{15}; -\frac{1}{2}\right), \left(-\sqrt{15}; -\frac{1}{2}\right)$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3\right), \left(-\frac{\sqrt{119}}{5}; 0,3\right), \left(\sqrt{15}; -\frac{1}{2}\right), \left(-\sqrt{15}; -\frac{1}{2}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

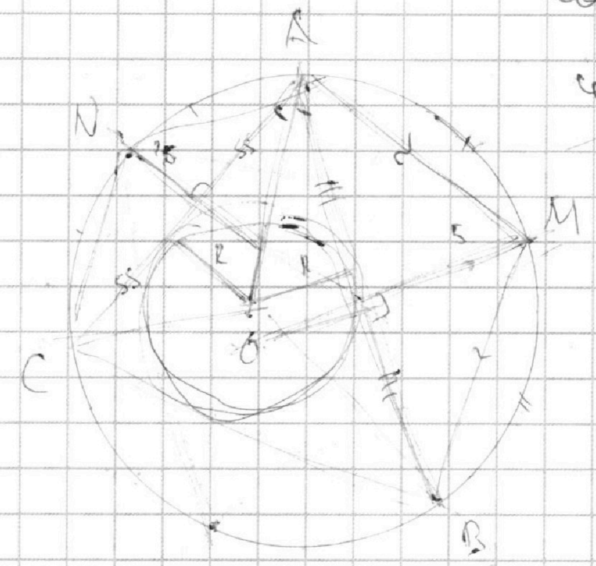
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2a+b-2\sqrt{a^2+ab}=b^2$

$2a+b=b^2+2\sqrt{a^2+ab}$

$4a^2+4ab+b^2=b^4+4b^2\sqrt{a^2+ab}+$
$+4(a^2+ab)$



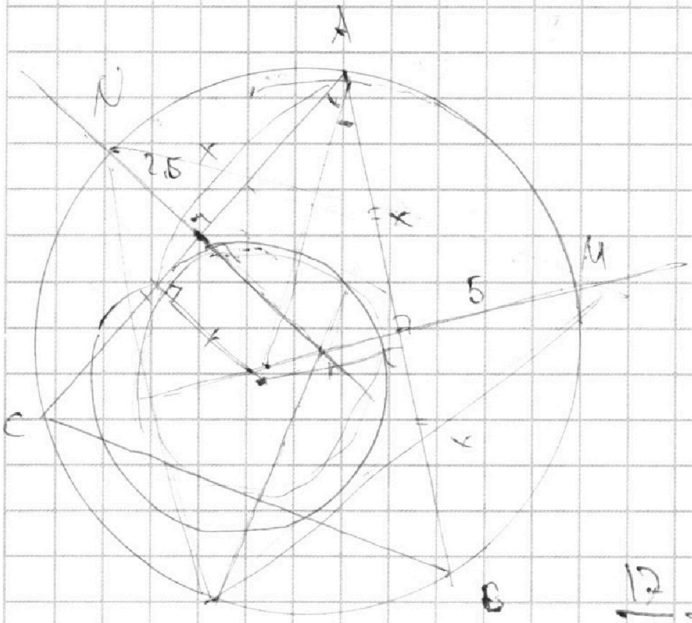
$16(b^4+2b^2+16)=$

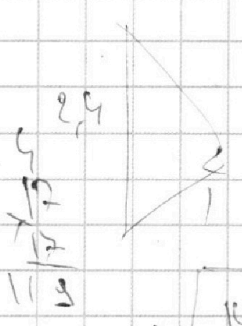
$=$

$\frac{-8b+4b+4}{} = \frac{4-4b}{16} = 1/4 - 1/4b$

$-3 \pm \sqrt{9}$

$D = 225 -$

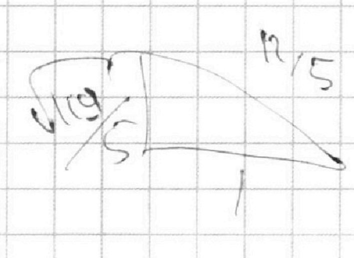




$\sqrt{\frac{144}{25} - \frac{1}{1}} =$

$\frac{12}{5} + \frac{1}{1} =$

$\sqrt{119}$



$=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$49+119x^2+49x^2+119x^4=676$

$168x^2+119x^4-627=0$

$119k^2+168k-627=0$

$k=\frac{-84\pm\sqrt{84^2+627\cdot119}}{119}$

$3x^2-6x+2$

$3x^2+3x+1$

$(3x^2-6x+1)+1$

$(a^2-2ab+b^2)=593$

$(a-b)^2=593$

$a+b=mq$

$a-b=mp \quad 5-2p$

$84\cdot84=7056$

$676-49=627$

$627\cdot119=74613$

$74613+7056=81669$

$117\cdot117=13689$

$317\cdot317=100489$

80000

$8\cdot10000$

$283\cdot283=80089$

$197\cdot197=38809$

$293\cdot293=85849$

200

$267\cdot267=71289$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

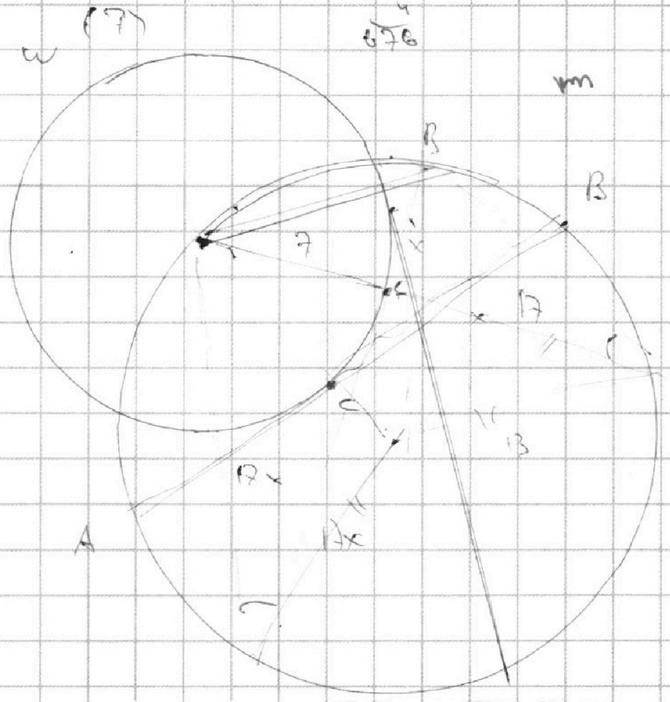
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\times 169$, 4, 676

$1+x^2 = 676(49+119x^2)$

$(1+x^2)(49+119x^2) = 676$



$13, 13, 24$

$\frac{7}{17x} = \frac{x}{17}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} =$

$= 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3} =$

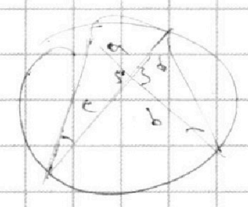
$tg^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \ \ = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

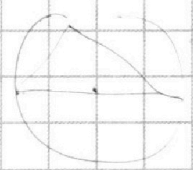
$= \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$

$\Omega(13)$

$\frac{a}{d} = \frac{c}{b} \quad ab = cd$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-}}{}$





$ab = n_1 2^{16} 7^{11}$ $\quad bc = 2^{13} 7^{12} n_2$ $\quad ac = 2^{22} 7^{39} n_3$

$a^2b^2c^2$ $\quad$ НОК $\quad 2^{16} 7^{11}$

$17 \cdot 17$, 119, 17, 289, 338

$\frac{a^2}{\sin^2\alpha} = R^2$

$49 + 289 = 338$

$3x^2 - 6x + 2 =$

$= 1 - 3x + 3x^2 + 3x + 1$

$\cancel{7+49}$ $\quad 49 + 49x^2 =$

$3x^2 + 3x + 1 =$

$\frac{49+49x^2}{49:(49+119x^2)} =$

$= 1 - 3x + 3x^2 + 12x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{9x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 9x^3}$

$abc = 2^{23} 7^{33}$

$\cancel{9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 6x^2 + 6x}$

$b = 1$

$c = 2^{17} 7^{18}$

$9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 3x^2 - 6x + 2 =$

$a = 2$

$= 9x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 2$

$676 - 49 = 627$

$abc = 2^k 7^h$

$49 + 119x^2 + 49x^2 + 119x^4 = 676$

$ab =$

$119x^4 + 168x^2 - 627 = 0$

168

$x_1 k = \frac{-84 \pm \sqrt{84^2 + 119 \cdot 627}}{119}$

676	2
338	2
169	2
13	13

$4 \cdot 13^2$

$676 =$

$2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 13$

y

$x_1; y_1$

$x_2; y_2$

$abc = 2^{h_a} 7^{m_a} 2^{h_b} 7^{m_b} 2^{h_c} 7^{m_c}$

$ab = 2^{h_a + h_b}$

M

A C

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$(mq - 2b) \equiv 5b(mq - b) \, (\mathrm{mod}\, m)$

$-2b \equiv -5b^2 \, (\mathrm{mod}$

140

$4b^2 = h_1 m + k$

$\frac{16}{1} - 1 \cdot 16$

$-5b = h_2 m + k$

$9b^2 = gm$