МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{14}7^{10}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{17}$, $ac$ делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Задача 1~~

~~У a, b и c нет других делителей, кроме 2 и 7, если произведение a, b и c натуральные ... чисел ... не ... ; пусть $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — степени вхождения 2 и 7 в числа a, b и c. Тогда из-за делимости на степени 2:~~

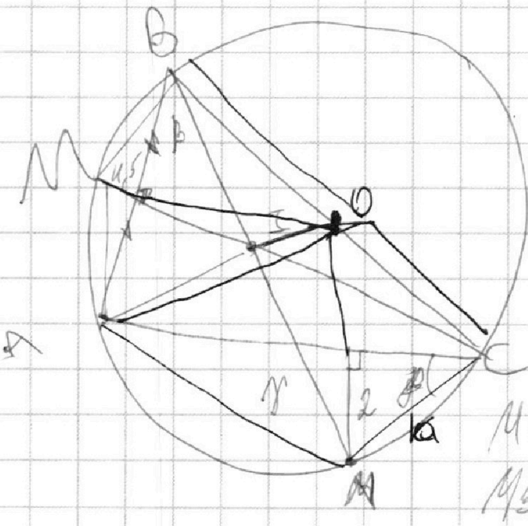
~~$a_1 + b_1 = 14$, $c_1 + b_2 = 13$, $a_1 + c_1 = 20$~~

Черновик.

$\frac{\sin^2\beta}{\sin\gamma} = 2,25$

$\boxed{\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1,5}$

$2\sin^2\gamma = 4,5\sin^2\beta$




$\frac{MC}{\sin\beta} = \frac{2}{\sin^2\beta} = 2R = \frac{4,5}{\sin\gamma}$

$\frac{MC}{\sin\beta} = 2R$

$MC\cdot\sin\beta = 2.$

$MB\cdot\sin\gamma = 4,5$

$\sin\beta = 1,5\sin\gamma$

$MC\cdot 1,5\sin\gamma = 2$

$MB\cdot\sin\beta = 4,5$

$\frac{MC\cdot 1,5}{MB} = \frac{2}{4,5}$

$\frac{MC}{MB} = \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1

~~$abc \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$ … Пусть $a$~~ Заметим, что для того, чтобы $abc$ было наименьшим, у чисел $a$, $b$ и $c$ не должно быть делителей, отличных от 2 или 7 (иначе можно поделить числа на эти делители и для них всё равно будет выполняться условие задачи. Тогда пусть для чисел, в которых произведение наименьшее $a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$, $b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$, $c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$. Из ~~of~~ делимости: $a_1 + b_1 \geq 14$, $c_1 + b_1 \geq 17$, $a_1 + c_1 \geq 20$. Поскольку числа $a$, $b$ и $c$ – натуральные, то $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$ и $c_2$ – целые неотрицательные.
~~$2a_1 + b_1 + c_1 \geq 34$, $b_1 + c_1 \geq 17$ …~~ Сложим все неравенства, тогда $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 14 + 14 + 20 = 51$ – нечетное число. Тогда
$2(a_1+b_1+c_1)$ четное число
верно, что $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 52$, $a_1 + b_1 + c_1 \geq 26$. Если ~~хочется~~ требуется, чтобы $abc$ было наименьшим, нужно подобрать наименьшие подходящие значения $a_1, b_1, c_1$. Тогда $a_1 + b_1 + c_1 = 26$. Докажем, что существуют подходящие $a_1, b_1, c_1$. Если $a_1 + c_1 = 20$, то $b_1 = 26 - 20 = 6$.
$a_1 + b_1 \geq 14$, $b_1 = 6$, $a_1 \geq 8$, $a_1 = 8$. $a_1 + c_1 = 20$, $a_1 = 8$, $c_1 = 20 - 8 = 12$, $c_1 + b_1 = 12 + 6 = 18 \geq 14$ – верно. Аналогично из-за делимости: $a_2 + b_2 \geq 10$, $b_2 + c_2 \geq 17$, $c_2 + a_2 \geq 37$. Тогда $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 37 + 10 + 17 = 64$, $a_2 + b_2 + c_2 \geq 32$, но ~~$\geq$~~ при этом равенство невозможно, так как $a_2 + c_2 \geq 37$, но заметим, что требуемые условия, когда выполняется, например, при $b_2 = 0$, $c_2 + a_2 = 37$, $a_2 = 17$, $c_2 = 20$. (На величину $abc$ влияют только суммы вхождения степеней 2 и 7, а не их конкретные значения для каждого числа. В решении значения степеней вхождения приводятся, чтобы доказать возможность такой ситуации). Тогда заметим, что при наименьшем значении $abc$, $a_1 + b_1 + c_1 = 26$, $a_2 + b_2 + c_2 = 37$, тогда, поскольку у чисел $a$, $b$ и $c$ нет других делителей, то $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2. Ответ: $m=8$.

$\frac{a}{b}$ несократима, значит $a$ и $b$ взаимно простые числа.
Пусть $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$, тогда заметим, что $a$ и $b$ взаимнопросты с $m$, потому что если у $a$ и $m$, есть делитель $p$, то поскольку $a+b \vdots m$, то $a+b \vdots p$, то $b \vdots p$, но $a$ и $b$ взаимно просты. Так же $(a+b)^2 \vdots m$, $a^2+2ab+b^2 \vdots m$. Тогда, $a^2+2ab+b^2-a^2-6ab+b^2$, $8ab \vdots m$. $a+b \vdots m$, $a \equiv_m -b$, тогда из $8ab \equiv_m 0$ $(8ab \vdots m) \equiv -8b^2 \equiv 0$. $-8b^2 \equiv_m 0$, тогда $8b^2 \vdots m$, аналогично $8a^2 \vdots m$. ~~Но~~ $m$.
Ранее было доказано, что $a$ и $b$ взаимнопросты с $m$, тогда можно сказать, что из $8b^2 \vdots m$, $8 \vdots m$, а значит $8 \geq m$. Тогда посмотрим может ли быть $m=8$. Да может, например при $a=3$ и $b=5$, тогда $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{9+25-6\cdot15} = \frac{8}{34-90} = -\frac{8}{56}$, заметим что $56 \vdots 8$ и $8 \vdots 8$.

Ответ: $m=8$ - наибольшее возможное значение $m$.

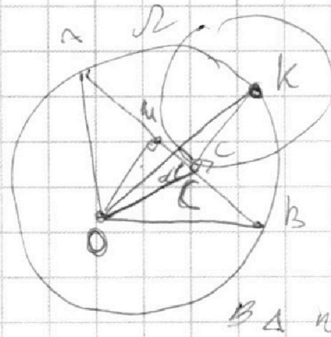
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3




Пусть O - ~~середина~~ центр Ω, тогда пусть M - середина AB, тогда из OA = OB (радиусы) следует △ABO - равнобедренный, тогда OM также и высота. $\frac{AC}{CB} = 7$, $AC = 7CB$. $AC + CB = AB$, тогда $AB = 8CB$. M - середина AB, тогда $AM = \frac{8 \cdot CB}{2} = 4CB$, $MC = \frac{8CB}{2} - CB = 3CB$. Заметим что тогда в △ по теореме Пифагора в △AOM $MO = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{25 - 16CB^2}$. В △OCM $OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \sqrt{25 - 16CB^2 + 9CB^2} = \sqrt{25 - 7CB^2}$

Пусть K - ~~середина~~ центр ω, тогда $KC = 1$ (радиус ω). Пусть $\angle OCA = \alpha$. Тогда $\angle OCK = \alpha + 90°$, так как $KC \perp AB$ (AB касается ω). По теореме косинусов для △OCK: $OK^2 = OC^2 + CK^2 - 2\,OC \cdot CK \cdot \cos\angle OCK$

$OK = 5$ (радиус Ω), $CK = 1$ (радиус ω) $\cos\angle OCK = \cos(90° + \angle\alpha) = \cos(90° - \angle\alpha) = \sin\alpha$. Тогда $25 = 25 - 7CB^2 + 1 + 2\,OC \cdot \sin\angle\alpha$, заметим, что в △OCM $OC \cdot \sin\alpha = OM$, так как это прямоугольный △ с углом α. Тогда $-7CB^2 + 1 + 2OM = 0$

$-7CB^2 + 1 + 2 \cdot \sqrt{25 - 16CB^2} = 0$. $2\sqrt{25 - 16CB^2} = 7CB^2 - 1$, возведём обе части в квадрат

$4(25 - 16CB^2) = 49CB^4 - 14CB^2 + 1$

$49CB^4 + \cancel{\ldots} + 50CB^2 - 99 = 0$ - квадратное уравнение относительно $CB^2$. $D = 50^2 + 99 \cdot 4 \cdot 49 = 2500 + 19404 = 21904 = 148^2$

Тогда $CB^2 = \frac{-50 + 148}{49 \cdot 2} = \frac{98}{98} = 1$, другой корень меньше нуля, не подходит, тогда $CB^2 = 1$, $CB = 1$, так как $CB > 0$.

$AB = 8CB = 8$.

Ответ: $AB = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

Ограничения: $2x^2-5x+3\geq0$, тк находится под корнем. Найдём недопустимые значения x, решив $2x^2-5x+3=0$.
$D=25-4\cdot2\cdot3=1$. $x_1=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{5-1}{4}=1$, Тогда, $x\notin(1;\frac{3}{2})$. Аналогично $2x^2+2x+1\geq0$. $D=4-2\cdot4\cdot1=-4$, $D<0$, значит $2x^2+2x+1$ всегда $>0$.

Возведём обе части в квадрат:

$(2x^2-5x+3)+(2x^2+2x+1)-2\sqrt{(2x^2-5x+3)\cdot(2x^2+2x+1)}=49x^2-28x+4$.

$4x^2-3x+4-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=49x^2-28x+4$, сократим подобные и возведём в квадрат:

$\left(-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}\right)^2=(45x^2-25x)^2$

$4(4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3)=45^2x^4-2\cdot45\cdot25x^3+25^2x^2$

$2009x^4-2226x^3$

Пусть $2x^2-5x+3=a$, $7x-2=b$, тогда исходное неравенство переписывается в виде

$\sqrt{a}-\sqrt{a+b}=-b$, возведём обе части в квадрат:

$a+a+b-2\sqrt{a^2+ab}=b^2$, $2a+b-b^2=2\sqrt{a^2+ab}$;

$4a^2+b^2+b^4+4ab-4ab^2-2b^3=4a^2+4ab$. $b^2+b^4-4ab^2-2b^3=0$.

$a=\frac{b^2+b^4-2b^3}{4b^2}=\frac{1+b^2-2b}{4}=\frac{(b-1)^2}{4}$, подставим исходные значения:

$2x^2-5x+3=\frac{(7x-3)^2}{4}$ $8x^2-20x+12=49x^2-42x+9$

$41x^2-22x-3=0$.

$D=22^2+3\cdot4\cdot41=484+492=976=(4\sqrt{61})^2$

$x_1=\frac{22+4\sqrt{61}}{82}=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}<1$, $x_2=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}<1$, оба

$\sqrt{61}<8$

корня удовлетворяют ограничениям

Ответ: $x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$, $x=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$.

$45^2$: 45, 225, 180, 2025; $25^2$: 25, 125, 50, 625; 25, 90, 2250

22², 22, 44, 44, 484; 41, 12, 82, 41, 492; 976 | 4, 244, 61

Задача 5.

Заметим, что данный параллелограмм образуется пересечениями прямых $y=24$ (там точки P и Q), $y=-2x$ (P и O), $y=-2x+30$ (R и Q), $y=0$ (R и O). Тогда если точка лежит внутри параллелограмма, ~~(это)~~ про неё верно, что если x и y её координаты, то $24 \geq y \geq 0$, $y \geq -2x$, $y \leq -2x+30$. $y+2x \geq 0$, но $y+2x \leq 30$.

~~Заметим, что если точка лежит внутри параллелограмма и у неё целые координаты, то она лежит на прямой параллельной~~

Заметим, что через любую точку, лежащую внутри параллелограмма, можно провести прямую, параллельную стороне этого параллелограмма. Тогда для простоты можно считать, что можно провести внутри параллелограмма лишь 29 прямых вида $y=-2x+a$, где $a \in [1, 29]$ и $a$ - целое, на которых будут ~~лежать целые точки~~. ~~Всего получается 24 точки~~ [illegible] которые лежат внутри [illegible] параллелограмма или на его границах. ~~Поскольку~~ $y \in [0, 24]$, то заметим, что внутри и на границах параллелограмма будет $\frac{24}{2}+1=13$ целых точек. [illegible] ~~точек, если прямая [illegible]~~ Заметим, что при этом не были посчитаны точки с координатами, лежащими эти целые точки внутри или на границах параллелограмма.

Заметим, что у 16 этих прямых есть по две целые точки на границах параллелограмма, поскольку $0 \leq y \leq 24$, то на них будет $\frac{24}{2}+1=13$ целых точек, а на оставшихся 15 прямых будет 12 целых точек. Если точка лежит на прямой $2x+y=a$, то ~~[illegible]~~ ей взаимно однозначно сопоставить все точки, лежащие на прямой $2x+y=a \pm 12$, если такая лежит внутри параллелограмма. ~~[illegible]~~ У $a$ и $a \pm 12$ одинаковая чётность, поэтому на этих прямых будет лежать одинаковое количество точек (если $a$ - чётное, то 13, если $a$ - нечётное - то 12.

Тогда заметим, что если точка лежит на прямой $y+2x=a$ и $a \in [12; 18]$, то ей ~~[illegible]~~ можно сопоставить две прямые, чтобы их разность коэффициентов равнялась 12. Если $a \in [0; 12)$ или $(18; 30)$, то для них однозначно подбирается прямая, коэффициент и у которой $a \in [12; 18]$, тогда остаётся лишь посчитать ~~[illegible]~~ кол-во ~~чётных и нечётных прямых~~ прямых с чётным и нечётным коэффициентом $a$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (продолжение)

от 12 до 18 и четыре числа и три нечетных. Тогда для каждых 13 точек с 4 прямых с чётным коэффициентом $a$ будет по 2 прямых, ~~для которой~~ с которых можно взять 100 - 13 точек, чтобы получилась пара, удовлетворяющая условию (так как прямой вида $2x+y=a$, то ~~разность~~ если $2x_1+y_1=a_1$ и $2x_2+y_2=a_2$, разность $2x_1+y_1-2x_2-y_2=a_1-a_2$), тогда будет

$4\cdot13\cdot2\cdot13=169\cdot8$ пар, и для прямых с нечётными коэфф. $a$ аналогично будет $4\cdot2\cdot12^2=144\cdot8$ пар.

Тогда всего $169\cdot8+144\cdot8=8(169+144)=8\cdot313=$

$=2504$

Ответ: 2504 пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Выразим $y$.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \qquad y = 10b + ax$$

$((x+8)^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1)(x^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 4) \leq 0$

$x^2 + 16x + 64$

~~$x^2 + 16x + 64 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1$~~

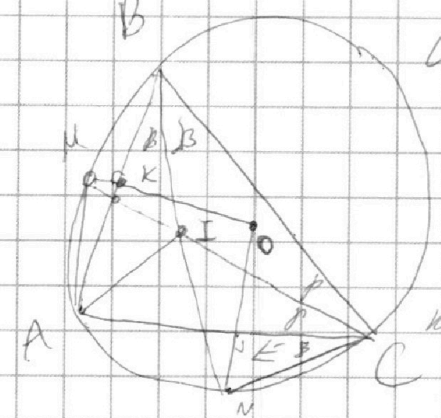
$(x^2 + y^2 + 63 + 16x)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0.$

~~Эти круги отличаются на $63 + 16x$. Если $x^2 + y^2 - 4 > 0$ то при $63 + 16x$ при бесконечно [illegible] [illegible] [illegible] $x^2 + y^2 + 63 + 16x$ будет больше нуля, если [illegible]~~

$(x^2 + 63 + 16x + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx)(x^2 - 4 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx) \leq 0.$

Это произведение, если одно выражение больше нуля, а другое меньше нуля. При достаточно больших $a$ что ~~[illegible]~~ оба выражения больше нуля. Значит не все значения подходят.

Задача 7




$M$ и $N$ - середины дуг $AB$ и $AC$, значит $BN$ и $CM$ - биссектрисы, тогда пусть их пересечение - $I$. Также заметим, что биссектриса пересекается с серединным перпендикуляром хорды, которую стягивает дуга, делящую эту биссектрису пополам на описанной окружности. Тогда ~~это~~ $OM$ и $ON$ - серединные перпендикуляры к $AB$ и $AC$, где $O$ - центр описанной окружности $\triangle ABC$. Пусть $K$ и $E$ - середины $AB$ и $AC$, тогда по условию $MK = 4{,}5$, $EN = 2$. Пусть $\angle B = 2\angle\beta$, а $\angle C = 2\angle\gamma$. Тогда в $\triangle NEC$ $NE = CN \cdot \sin\angle\beta$. $2 = CN \cdot \sin\beta$. По теореме синусов $\frac{NC}{\sin\angle\beta} = 2R$, где $R$ - радиус ~~од~~ описанной окружности $\triangle ABC$. Так же $\frac{AM}{\sin\angle\gamma}$ ($AM$ биссектриса) $= 2R$. Тогда $\frac{NC}{\sin\angle\beta} = \frac{AM}{\sin\angle\gamma}$, $NC = \frac{2}{\sin\angle\beta}$, $AM = \frac{4{,}5}{\sin\angle\gamma}$ так как $\triangle AKM$ - прямоугольный с углом $\gamma$. Тогда $\frac{2}{\sin^2\angle\beta} = \frac{4{,}5}{\sin^2\angle\gamma} = \frac{\sin^2\angle\gamma}{\sin^2\angle\beta} = \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$; $\angle\gamma$ и $\angle\beta < 90^\circ$, так как это углы в различных половинах, тогда $\sin\angle\gamma > 0$, $\sin\angle\beta > 0$, $\frac{\sin\angle\gamma}{\sin\angle\beta} = 1{,}5$. $\sin\angle\gamma = 1{,}5\sin\angle\beta$. $CN = \frac{2}{\sin\angle\beta}$,

$AM = \frac{4{,}5}{\sin\angle\gamma} = \frac{3}{\sin\angle\beta}$, тогда $\frac{AM}{CN} = \frac{3}{2}$, $AM = 1{,}5\, CN$.

По лемме о трезубце $IN = AN = CN$, $AM = MI = MB$. $\triangle MIB$ - равнобедренный, ~~Тогда~~ также $\angle BNA = \angle BAC$, опирающиеся на одну дугу. Тогда, по теореме косинусов для

$\triangle NIA$. $AI^2 = NI^2 + AN^2 - 2AN \cdot NI \cdot \cancel{\cos 2\angle\gamma}$ $\cos 2\angle\gamma$ =

~~$AN = NI = CN$, $\cos 2\angle\gamma = 2\sin^2\angle\beta$~~ $= 1 - 2\sin^2\gamma$. $NC = \frac{2}{\sin\angle\beta}$

~~$AI^2 = 2CN^2 + 2CN^2 - 4CN^2 \cdot \sin^2\angle\gamma \cdot \frac{8}{\sin^2\angle\beta} + \frac{8}{\sin^2\angle\beta} - \frac{16}{\sin^2\angle\beta} \cdot 1{,}5\sin^2\angle\beta$~~

~~$= \frac{16}{\sin^2\angle\beta}(1 - 1{,}5\sin^2\angle\beta) =$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7

$$1 - 2\sin^2\gamma$$

$$AI^2 = 2CN^2 - 2CN^2(\cancel{2\sin^2 2\gamma - 1}) = \cancel{4CN^2} + 4CN^2 \cdot \sin^2 2\gamma =$$

$CN = \frac{2}{\sin 2\beta}$ $\qquad \sin^2\gamma = 2{,}25\sin^2\beta$

$$= \cancel{\frac{16}{\sin^2 2\beta}}\ 4 \cdot \frac{4}{\sin^2 2\beta} \cdot 2{,}25 \cdot \sin^2\beta = \cancel{\frac{16}{\sin^2\beta}} = 36.$$

~~Потребуется найти $\sin 2\beta$. Заметим, что $\sin^2\gamma = 2{,}25\sin^2\beta$, тогда $\cos^2\gamma = 1 - 2{,}25\sin^2\beta$, $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$.~~

$AI^2 = 36$, $AI = 6$.

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6

$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\leq 0 \end{cases}$ $ax=y-10b$ $x=\frac{y-10b}{a}$

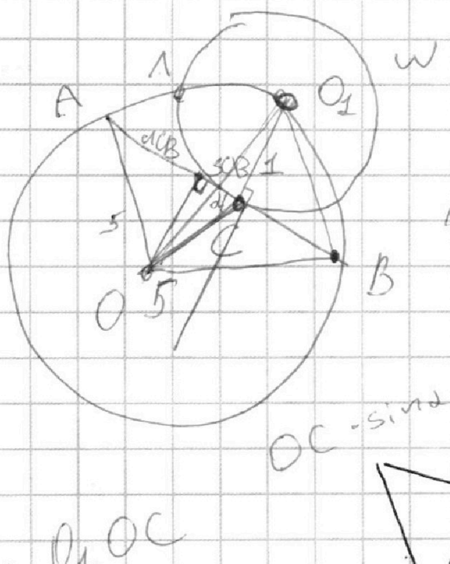
Второе неравенство верно при $(x+8)^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2=4$ или $x^2+y^2<4$, $(x+8)^2+y^2>1$ и $x^2+y^2>4$ и $(x+8)^2+y^2<1$

$x^2+y^2+64+16x$ $x^2+y^2+16x<-63$

Пусть $(x+8)^2+y^2-1=0$, тогда подставим $x=\frac{y-10b}{a}$,

$\frac{(y-10b)^2}{a^2}+\frac{16y-160b}{a}+64+y^2-1=0$

Черновик



?

~~$AB=8$~~

Тогда $AB=$

$AC=CB$

$\frac{AC}{CB}=4$

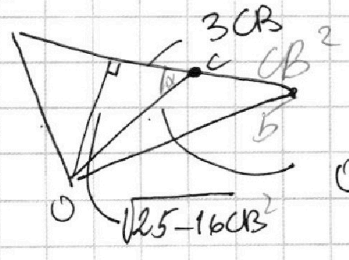
$AC=4CB$

$AB=8CB$

$\sqrt{25-16CB^2}$

$OC\cdot\sin\alpha=\sqrt{25-16CB^2}$

$OC^2=25-4CB^2$



В $\triangle O_1OC$

$25=1+OC^2-2OC\cos(\alpha+90°)$

$1+OC^2+2OC\sin\alpha$

$OC^2=25-16CB^2+9CB^2=$
$=25-4CB^2$

$OC\cdot\cos\alpha=3CB$

$OC^2+CB^2+2OC\cdot CB\cos\alpha=5=$

$25=1+25-4CB^2+2\sqrt{25-16CB^2}$

$25-4CB^2+CB^2+6CB^2=5$

$1-4CB^2+2\sqrt{25-16CB^2}=0$

$25-12CB^2=5$

$CB^2=\frac{20}{12}$,

$\boxed{CB=\frac{5}{3}}$

$100-64CB^2=49CB^4-14CB^2+1$

$49CB^4+50CB^2-99=0$

$CB^2=a$ $2500+99\cdot4\cdot49$

$AB=8$

152
152
304
760
23104

160000

148
148
1184
592
148
21904

448
448
3584
1792
1792
200704

99
49
891
396
4851

19404
2500
21904

21904 | 41

130
130
1290
14490

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

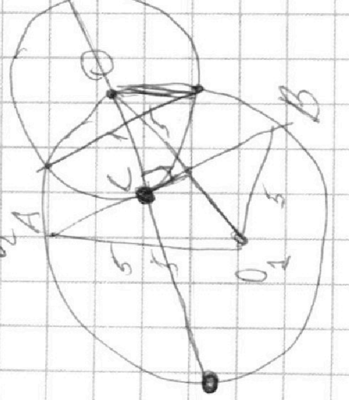
Черновик

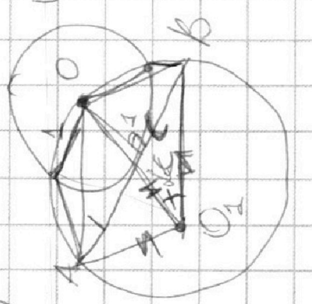
$AC = 4CB$

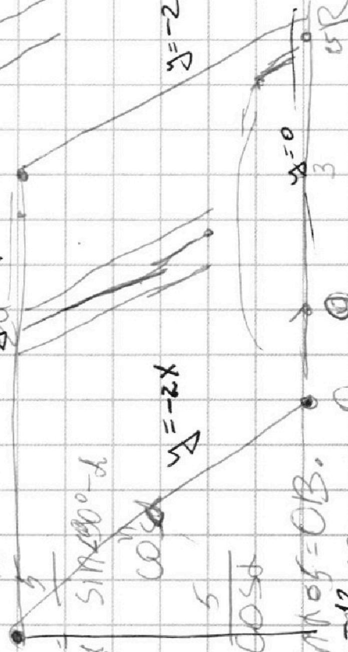
$AC \cdot CB = 4CB^2$

$\frac{AC}{CB} = 4$

$AC = 4CB$







$y \geq 0$

$y \leq 15$

$y \leq -2x + 15$

$2x + y \leq 15$

$y = -2x + 15$

$y = 15$

$y = -2x$

$\frac{OB}{\sin 2\alpha}$

$\frac{OB}{\sin\alpha} = 10$

$12^2 + 24^2 = 720$

$y = kx + b$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha - \cos 2\alpha(1 - \sin^2\alpha) =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$a^2+2ab+b^2 \vdots m^2$

$8ab \vdots m$

$a+b \vdots m$

$a+b=mk$ $8ab=mn$

$a=mk-b$ $8bmk-8b^2=mn$

$8b^2 \vdots m$ $\boxed{8a^2 \vdots m}$

$8ab \vdots m$, $a$ и $b$ взаимнопросты

$8b(a-b) \vdots m$

Если $b \vdots m$, то $a \vdots m$, тогда $8 \vdots m$.

Если $a$ делится на $m$, а $b$ не делится, ... $a$ и $b$ взаимнопросты с $m$, тогда $m \leq 8$. Пример 3 и 5?

$9+25-6\cdot 15=$

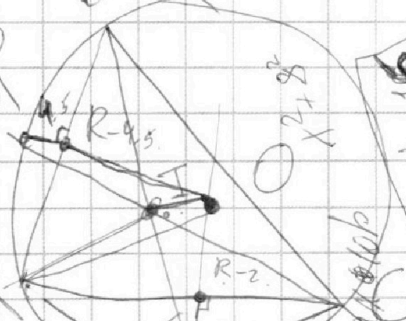
$34-90=56 \vdots 8$

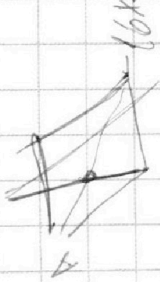
$\boxed{\sin\angle\beta=1{,}5\sin\angle\beta}$

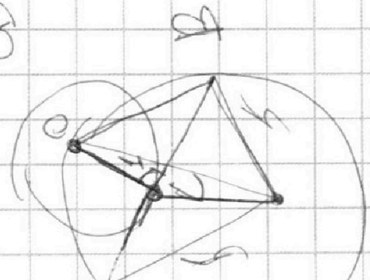
$4{,}5=2$

$\sin\angle\beta=$

Для любого $a$?







$\boxed{200ab=16}$

$x^2+8^2$

$\frac{AC}{OS}=4$

$y=\boxed{ax+10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 ☒ 4 ☒ 5 6 7

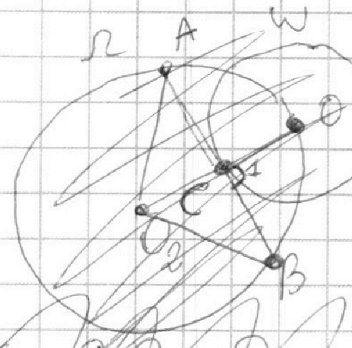
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

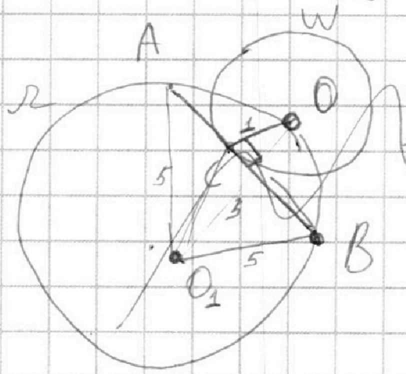
~~Задача 3~~ Черновик

Дано: $\omega$, $\Omega$ - окружности, центр $\omega$ лежит на $\Omega$. AB принадлежит $\Omega$ и касается $\omega$ в точке C. $\frac{AC}{CB}=4$
Радиусы $\omega$ и $\Omega$ 1 и 5.

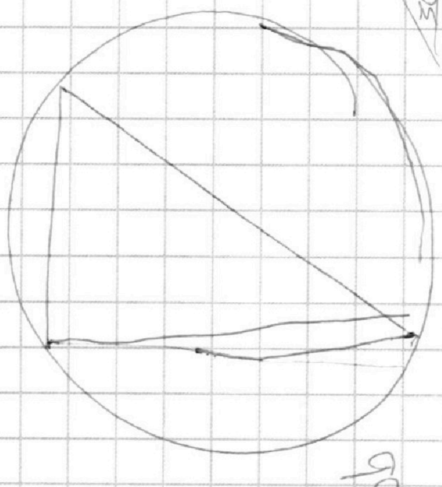
AB - ?




~~Пусть O - центр ω, O₂ - центр Ω. OC и O₂O - радиусы этих окружностей, соответств~~




$O_1$ и $O$ - центры $\Omega$ и $\omega$ соответственно. $OC \perp AB$, так как AB касается $\omega$. $AO_1 = O_1B = O_1O$ (радиусы) $= 5$. $OC = 1$ (радиус $\omega$).



$\sin\gamma = 1{,}5 \sin\beta$

Задача 4