МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

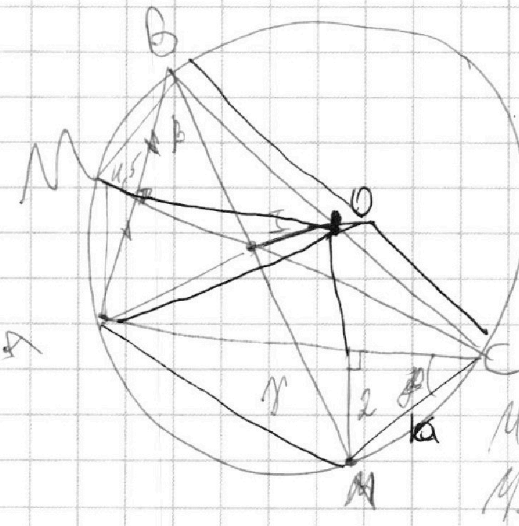
~~У a, b и c нет других делителей, кроме 2 и 7, если произведение a, b и c примерные [illegible] числа все [illegible] [illegible] Пусть a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — степени вхождения 2 и 7 в числа a, b и c. Тогда [illegible]: $a_1+b_1=14$, $c_1+b_2=13$, $a_1+c_2=20$~~

Черновик.

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin\gamma} = 2{,}25$$

$$\boxed{\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1{,}5}$$

$$2\sin^2\gamma = 4{,}5\sin^2\beta$$



$$\frac{MC}{\sin\beta} = \frac{2}{\sin^2\beta} = 2R = \frac{4{,}5}{2\sin^2\gamma}$$

$$\frac{MC}{\sin\beta} = 2R$$

$$MC\cdot\cancel{\cos\beta}\sin\beta = 2.$$

$$MB\cdot\sin\gamma = 4{,}5$$

$$\sin\beta = 1{,}5\sin\gamma$$

$$MC\cdot 1{,}5\sin\gamma = 2$$

$$MB\cdot\sin\gamma = 4{,}5$$

$$\frac{MC\cdot 1{,}5}{MB} = \frac{2}{4{,}5}$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

~~abc, $2^{14}\cdot 7^{10}$, значит каждое Пусть a~~ Заметим, что для того, чтобы abc было наименьшим, у чисел a, b и c не должно быть делителей, отличных от 2 или 7 (иначе можно поделить числа на эти делители и для них всё равно будет выполняться условие задачи. Тогда пусть для чисел, в которых произведение наименьшее $a = 2^{a_1}\cdot 7^{a_2}$, и $b = 2^{b_1}\cdot 7^{b_2}$, $c = 2^{c_1}\cdot 7^{c_2}$. Из ~~уф~~ делимости: $a_1 + b_1 \geq 14$, $c_1 + b_1 \geq 17$, $a_1 + c_1 \geq 20$. Поскольку числа a, b и c – натуральные, то a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 – целые неотрицательные.

~~$2a_1 + b_1 + c_1 \geq 34$, $2b_1 + c_1 \geq 17$, ...~~ Сложим все неравенства, тогда $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 14 + 17 + 20 = 51$ – нечетное число. Тогда

$\underbrace{2(a_1+b_1+c_1)}_{\text{чётное число}}$

верно, что $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 52$, $a_1 + b_1 + c_1 \geq 26$. Если ~~хотим~~ требуется, чтобы abc было наименьшим, нужно подобрать наименьшие подходящие значения a_1, b_1, c_1. Тогда $a_1 + b_1 + c_1 = 26$. Докажем, что существуют подходящие a_1, b_1, c_1. Если $a_1 + c_1 = 20$, то $b_1 = 26 - 20 = 6$. $a_1 + b_1 \geq 14$, $b_1 = 6$, $a_1 \geq 8$, $a_1 = 8$. $a_1 + c_1 = 20$, $a_1 = 8$, $c_1 = 20 - 8 = 12$. $c_1 + b_1 = 12 + 6 = 18 \geq 17$ – верно. Аналогично из-за делимости: $a_2 + b_2 \geq 10$, $b_2 + c_2 \geq 17$, $c_2 + a_2 \geq 37$. Тогда $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 37 + 10 + 17 = 64$, $a_2 + b_2 + c_2 \geq 32$, но ~~это~~ при этом равенство невозможно, так как $a_2 + c_2 \geq 37$, но заметим, что требуемые условия могут выполняться, например, при $b_2 = 0$, $c_2 + a_2 = 37$, $a_2 = 17$, $c_2 = 20$. (На величину abc влияют только суммы вхождения степеней 2 и 7, а не их конкретные значения для каждого числа. В решении значения степеней вхождения приводятся, чтобы доказать возможность такой ситуации). Тогда заметим, что при наименьшем значении abc, $a_1 + b_1 + c_1 = 26$, $a_2 + b_2 + c_2 = 37$, тогда, поскольку у чисел a, b и c нет других делителей, то $abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$.

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2. Ответ: $m=8$.

$\frac{a}{b}$ несократима, значит a и b взаимно простые числа. Пусть $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$, тогда заметим, что a и b взаимнопросты с m, потому что если у a и m есть делитель p, то поскольку $a+b \vdots m$, то $a+b \vdots p$, то $b \vdots p$, но a и b взаимно просты. Так же $(a+b)^2 \vdots m$, $a^2+2ab+b^2 \vdots m$. Тогда, $a^2+2ab+b^2-(a^2-6ab+b^2)$ $8ab \vdots m$. $a+b \vdots m$, $a \equiv_m -b$, тогда из $8ab \equiv_m 0$ $(8ab \vdots m) \equiv -8b^2 \equiv 0$. $-8b^2 \equiv_m 0$, тогда $8b^2 \vdots m$, аналогично $8a^2 \vdots m$. ~~Но значит $8ab$~~ m. Ранее было доказано, что a и b взаимнопросты с m, тогда можно сказать, что из $8b^2 \vdots m$, $8 \vdots m$, а значит $8 \geq m$. Тогда посмотрим может ли быть $m=8$. Да может, например при $a=3$ и $b=5$, тогда $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{9+25-6\cdot 15} = \frac{8}{34-90} = -\frac{8}{56}$, заметим что $56 \vdots 8$ и $8 \vdots 8$.

Ответ: $m=8$ - наибольшее возможное значение m.

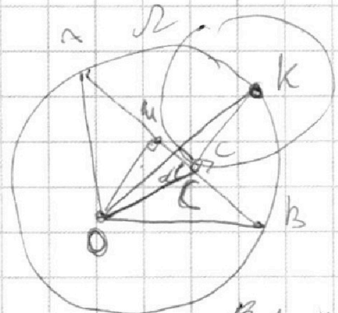
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



Пусть O – ~~середина~~ центр Ω, тогда пусть M – середина AB, тогда из $OA = OB$ (радиусы) следует $\triangle ABO$ – равнобедренный, тогда OM также и высота. $\frac{AC}{CB} = 7$, $AC = 7CB$. $AC + CB = AB$, тогда $AB = 8CB$. M – середина AB, тогда $AM = \frac{8 \cdot CB}{2} = 4CB$, $MC = \frac{8CB}{2} - CB = 3CB$. Заметим что в $\triangle$ по теореме Пифагора в $\triangle AOM$ $MO = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{25 - 16CB^2}$. В $\triangle OCM$ $OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \sqrt{25 - 16CB^2 + 9CB^2} = \sqrt{25 - 7CB^2}$

Пусть K – ~~середина~~ центр ω, тогда $KC = 1$ (радиус ω). Пусть $\angle OCA = \alpha$. Тогда $\angle OCK = \alpha + 90°$, так как $KC \perp AB$ (AB касается ω). По теореме косинусов для $\triangle OCK$: $OK^2 = OC^2 + CK^2 - 2\, OC \cdot CK \cdot \cos\angle OCK$

$OK = 5$ (радиус Ω), $CK = 1$ (радиус ω) $\cos\angle OCK = \cos(90° + \angle\alpha) = \cos(90° - \angle\alpha) = \sin\alpha$. Тогда $25 = 25 - 7CB^2 + 1 + 2\,OC \cdot \sin\angle\alpha$, заметим, что в $\triangle OCM$ $OC \cdot \sin\alpha = OM$, так как это прямоугольный $\triangle$ с углом α. Тогда $-7CB^2 + 1 + 2OM = 0$

$-7CB^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16CB^2} = 0$. $2\sqrt{25 - 16CB^2} = 7CB^2 - 1$, возведём обе части в квадрат

$4(25 - 16CB^2) = 49CB^4 - 14CB^2 + 1$

$49CB^4 + 50CB^2 - 99 = 0$ – квадратное уравнение относительно CB^2. $D = 50^2 + 99 \cdot 4 \cdot 49 = 2500 + 19404 = 21904 = 148^2$

Тогда $CB^2 = \frac{-50 + 148}{49 \cdot 2} = \frac{98}{98} = 1$, другой корень меньше нуля, не подходит, тогда $CB^2 = 1$, $CB = 1$, так как $CB > 0$.

$AB = 8CB = 8$.

Ответ: $AB = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-4x$

Ограничения: $2x^2-5x+3\geq 0$, так находится под корнем. Найдём недопустимые значения x, решив $2x^2-5x+3=0$.
$D=25-4\cdot 2\cdot 3=1$. $x_1=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{5-1}{4}=1$, тогда $x\notin\left(1;\frac{3}{2}\right)$. Аналогично $2x^2+2x+1\geq 0$. $D=4-2\cdot 4\cdot 1=-4$, $D<0$, значит $2x^2+2x+1$ всегда >0.

~~Возведём обе части в квадрат:~~
~~$(2x^2-5x+3)+(2x^2+2x+1)-2\sqrt{(2x^2-5x+3)\cdot(2x^2+2x+1)}=49x^2-28x+4$.~~
~~$4x^2-3x+4-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=49x^2-28x+4$, сократим подобные и возведём в квадрат:~~
~~$\left(-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}\right)^2=(45x^2-25x)^2$~~
~~$4(4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3)=45^2x^4-2\cdot 45\cdot 25x^3+25^2x^2$~~
~~$2009x^4-2226x^3$~~

Пусть $2x^2-5x+3=a$, $4x-2=b$, тогда исходное неравенство переписывается в виде
$\sqrt{a}-\sqrt{a+b}=-b$, возведём обе части в квадрат:
$a+a+b-2\sqrt{a^2+ab}=b^2$, $2a+b-b^2=2\sqrt{a^2+ab}$;
$4a^2+b^2+b^4+4ab-4ab^2-2b^3=4a^2+4ab$. $b^2+b^4-4ab^2-2b^3=0$.
$a=\frac{b^2+b^4-2b^3}{4b^2}=\frac{1+b^2-2b}{4}=\frac{(b-1)^2}{4}$, подставим исходные значения:

$2x^2-5x+3=\frac{(4x-3)^2}{4}$ $\quad 8x^2-20x+12=49x^2-42x+9$
$41x^2-22x-3=0$.

$D=22^2+3\cdot 4\cdot 41=484+492=976=(4\sqrt{61})^2$
$x_1=\frac{22+4\sqrt{61}}{82}=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}<1$, $x_2=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}<1$, оба

$\sqrt{61}<8$.

корни удовлетворяют ~~от~~ ограничениям

Ответ: $x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$, $x=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5.

Заметим, что данный параллелограмм образуется пересечениями прямых $y=24$ (там точки P и Q), $y=-2x$ (P и O), $y=-2x+30$ (R и Q), $y=0$ (R и O). Тогда если точка лежит внутри параллелограмма, то про неё верно, что если x и y её координаты, то $24\ge y\ge 0$, $y\ge -2x$, $y\le -2x+30$, $y+2x\ge 0$, и $y+2x\le 30$.

~~Заметим, что если точка лежит [illegible] внутри параллелограмма и у неё целые координаты, то она лежит на прямой параллельно [illegible]~~

Заметим, что через любую точку, лежащую внутри параллелограмма, можно провести прямую, параллельную сторонам этого параллелограмма. Тогда для простоты можно считать, что можно провести внутри параллелограмма лишь 29 прямых вида $y=-2x+a$, где $a\in[1, 29]$ и a - целое, на которых будут ~~[illegible]~~ [illegible] Всего получается 29 [illegible] прямых, которые лежат внутри [illegible] параллелограмма или на его границах. [illegible] $y\in[0, 24]$, то заметим, что [illegible] на границах параллелограмма будет $\frac{24}{2}+1=13$ целых точек. [illegible] Заметим, что при этом не были посчитаны точки с координатами, лежащие [illegible] эти целые точки внутри или на границах параллелограмма.

Заметим, что у 16 этих прямых есть по две целые точки на границах параллелограмма, поскольку $0\le y\le 24$, то на них будет $\frac{24}{2}+1=13$ целых точек, а на оставшихся 15 прямых будет 12 целых точек. Если точка лежит на прямой $2x+y=a$, то ей ~~[illegible]~~ взаимно однозначно сопоставить все точки, лежащие на прямой $2x+y=a\pm12$, если такая лежит внутри параллелограмма. ~~[illegible]~~ У a и $a\pm12$ одинаковая чётность, поэтому на этих прямых будет лежать одинаковое количество (если a - чётное, то 13, если a - нечётное - то 12).

Тогда заметим, что если точка лежит на прямой $y+2x=a$ и $a\in[12; 18]$, то ей ~~[illegible]~~ можно однозначно сопоставить две прямые, чтобы их разность коэффициентов равнялась 12. Если $a\in[0; 12)$ или $(18; 30]$, то для них однозначно подбирается прямая, коэффициент которой $a\in[12; 18]$, тогда остаётся лишь посчитать ~~[illegible]~~ кол-во ~~чётных и нечётных прямых~~ прямых с чётным и нечётным коэффициентом a.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5 (продолжение)

от 12 до 18 и четыре числа и три нечетных. Тогда для каждых 13 точек с 4 прямых с чётным коэффициентом a будет по 2 прямых, ~~для которых~~ с которых можно взять по 13 точек, чтобы получилась пара, удовлетворяющая условию (так как прямая вида $2x+y=a$, то ~~разность~~ если $2x_1+y_1=a_1$ и $2x_2+y_2=a_2$, разность $2x_1+y_1-2x_2-y_2=a_1-a_2$), тогда будет

$4\cdot13\cdot2\cdot13=169\cdot8$ пар, и для прямых с нечётными коэффициентами a аналогично будет $4\cdot2\cdot12^2=144\cdot8$ пар.

Тогда всего $169\cdot8+144\cdot8=8(169+144)=8\cdot313=$

$=2504$

Ответ: 2504 пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Выразим y.

$y = 10b + ax$

$((x+8)^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1)(x^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 4) \leq 0$

$x^2 + 16x + 64$

$\cancel{x^2 + 16x + 64 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1}$

$(x^2 + y^2 + 63 + 16x)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0.$

~~Обе~~ эти выражения отличаются на $63 + 16x$. ~~Если $x^2 + y^2 - 4 > 0$ то при $63 + 16x$ ... бесконечно ... в ... положительных и $x^2 + y^2 + 63 + 16x$ будет больше нуля, если ...~~

$(x^2 + 63 + 16x + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx)(x^2 - 4 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx) \leq 0.$

Это справедливо, если одно выражение больше нуля, а другое меньше нуля. При достаточно больших a что ... оба выражения больше нуля. Значит не все значения подходят.

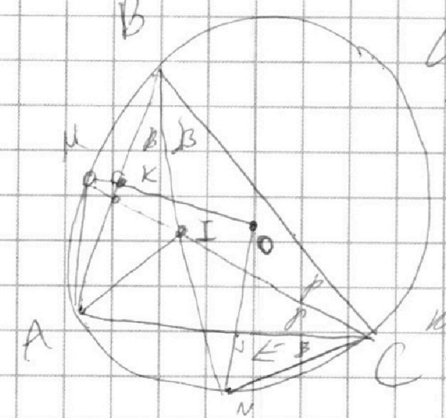
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7



M и N - середины дуг AB и AC, значит BN и CM - биссектрисы, тогда пусть их пересечение - I. Также заметим, что биссектрисы пересекаются с серединным перпендикуляром хорды, которую стягивают дугу, делящую эту биссектрисой пополам на описанной окружности. Тогда ~~...~~ OM и ON - серединные перпендикуляры к AB и AC, где O - центр описанной окружности $\triangle ABC$. Пусть K и E - середины AB и AC, тогда по условию $MK = 4{,}5$, $EN = 2$. Пусть $\angle B = 2\angle\beta$, а $\angle C = 2\angle\gamma$. Тогда в $\triangle NEC$ $NE = CN\cdot\sin\angle\beta$, $2 = CN\cdot\sin\beta$. По теореме синусов $\frac{NC}{\sin\angle\beta} = 2R$, где R - радиус описанной окружности $\triangle ABC$. Так же $\frac{AM}{\sin\angle\gamma}$ (AM биссектриса) $= 2R$. Тогда $\frac{NC}{\sin\angle\beta} = \frac{AM}{\sin\angle\gamma}$, $NC = \frac{2}{\sin\angle\beta}$, $AM = \frac{4{,}5}{\sin\angle\gamma}$, так как $\triangle AKM$ прямоугольный с углом γ. Тогда $\frac{2}{\sin^2\angle\beta} = \frac{4{,}5}{\sin^2\angle\gamma}$ $= \frac{\sin^2\angle\gamma}{\sin^2\angle\beta} = \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$; $\angle\gamma$ и $\angle\beta < 90^\circ$, так как это углы в половинные, тогда $\sin\angle\gamma > 0$, $\sin\angle\beta > 0$, $\frac{\sin\angle\gamma}{\sin\angle\beta} = 1{,}5$. $\sin\angle\gamma = 1{,}5\sin\angle\beta$. $CN = \frac{2}{\sin\angle\beta}$,
$AM = \frac{4{,}5}{\sin\angle\gamma} = \frac{3}{\sin\angle\beta}$, тогда $\frac{AM}{CN} = \frac{3}{2}$, $AM = 1{,}5\,CN$.
По лемме о трезубце $IN = AN = CN$, $AM = MI = MB$. $\triangle MIB$ - равнобедренный, ~~Тогда~~ также $\angle BNA = \angle BAC$, опираются на одну дугу. Тогда, по теореме косинусов для

$\triangle NIA$. $AI^2 = NI^2 + AN^2 - 2AN\cdot NI\cdot \cos 2\angle\gamma$

~~$AN = NI = CN$, $\cos 2\angle\gamma = 2\sin^2\angle\beta$... $1 - 2\sin^2\gamma$. $NC = \frac{2}{\sin\angle\beta}$~~

~~$AI^2 = 2CN^2 + 2CN^2 - 4CN^2\cdot\sin^2\gamma$, $\frac{8}{\sin^2\beta} + \frac{8}{\sin^2\beta} - \frac{16}{\sin^2\beta}\cdot 1{,}5^2\sin^2\beta$~~

~~$= \frac{16}{\sin^2\beta}$ ... $AI = 1{,}5\sin\angle\beta$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

$1 - 2\sin^2\gamma$

$AI^2 = 2CN^2 - 2CN^2(\cancel{2\sin^2 2\gamma - 1}) = \cancel{4CN^2} + 4CN^2 \cdot \sin^2 2\gamma =$

$CN = \frac{2}{\sin 2\beta}$ $\qquad \sin^2\gamma = 2{,}25\sin^2\beta$

$= \cancel{\frac{16}{\sin^2 2\beta}}\ 4 \cdot \frac{4}{\sin^2 2\beta} \cdot \cancel{16}\ 2{,}25 \cdot \sin^2\beta = \cancel{\frac{16}{\sin^2\beta}} = 36.$

~~Попробуем найти sin 2β. Заметим что возведя sin²β = 2,25 sin² β в квадрат~~

$\cos^2\gamma = 1 - \cancel{\sin^2} 2{,}25 \sin^2\beta, \ \cancel{\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta}.$

$AI^2 = 36, \quad AI = 6.$

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6

$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\leq 0 \end{cases}$ $ax=y-10b$ $x=\frac{y-10b}{a}$

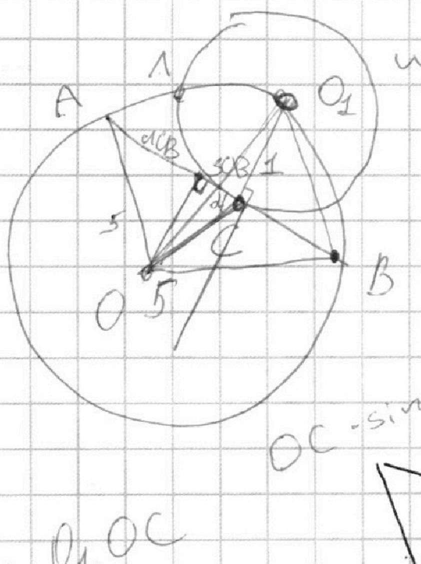
Второе неравенство верно при $(x+8)^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2=4$ или $x^2+y^2<4$, $(x+8)^2+y^2>1$ и $x^2+y^2>4$ и $(x+8)^2+y^2<1$

$x^2+y^2+64+16x$ $x^2+y^2+16x-63$

Пусть $(x+8)^2+y^2-1=0$, тогда подставим $x=\frac{y-10b}{a}$,

$\frac{(y-10b)^2}{a^2}+\frac{16y-160b}{a}+64+y^2-1=0$

Черновик



~~$AB=8$~~ ?

Тогда $AB=$ ... $AC=CB$

$\frac{AC}{CB}=4$

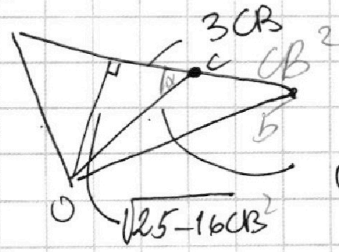
$AC=4CB$

$AB=8CB$

$\sqrt{25-16CB^2}$

$OC^2=25-4CB^2$

$OC\cdot\sin\alpha=\sqrt{25-16CB^2}$



В $\triangle O_1OC$

$25=1+OC^2-2OC\cos(\alpha+90°)$

$1+OC^2+2OC\sin\alpha$

$OC^2=25-16CB^2+9CB^2=$
$=25-4CB^2$

$OC\cos\alpha=3CB$

$OC^2+CB^2+2OC\cdot CB\cos\alpha=5=$

$25=1+25-4CB^2+2\sqrt{25-16CB^2}$

$25-4CB^2+CB^2+6CB^2=5$

$1-4CB^2+2\sqrt{25-16CB^2}=0$

$25-12CB^2=5$

$CB^2=\frac{20}{12}$,

$\boxed{CB=\frac{5}{3}}$

$100-64CB^2=49CB^4-14CB^2+1$

$49CB^4+50CB^2-99=0$

$CB^2=a$ $2500+99\cdot4\cdot49$

$AB=8$

152·152 = 23104; 148·148 = 21904; 448·448 = 200704; 99·49 = 4851; 19404+2500 = 21904; 130·130

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

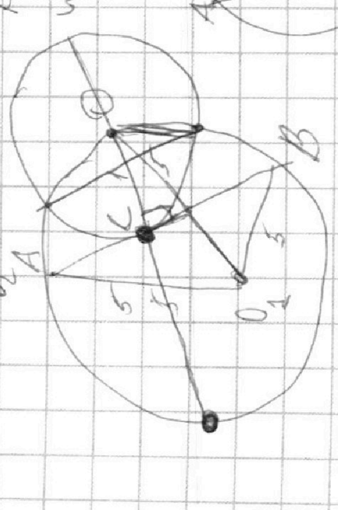
МФТИ

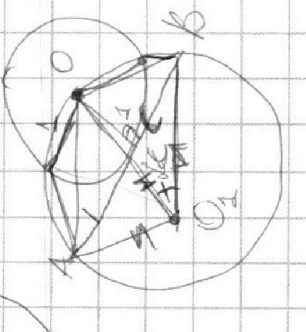
Черновик

$AC = 4CB$

$AC \cdot CB = 4CB^2$

$\frac{AC}{CB} = 4$





$y = -2x + 15$

$y = -2x$

$y \geq 0$

$y \leq 15$

$2x + y \leq 15$

$12^2 + 24^2 = 720$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$a^2+2ab+b^2 \vdots m^2$

$8ab \vdots m$

$a+b \vdots m$

$a+b=mk$ $8ab=mn$

$a=mk-b$ $8bmk-8b^2=mn$

$8b^2 \vdots m$ $8a^2 \vdots m$

$8ab \vdots m$, a и b взаимнопросты

$8b(a-b) \vdots m$

Если $b \vdots m$, то $a \vdots m$, тогда $8 \vdots m$.

Если a: делится m, а b не делится ... a и b взаимнопросты

c m, тогда $m \le 8$. Пример 3 и 5?

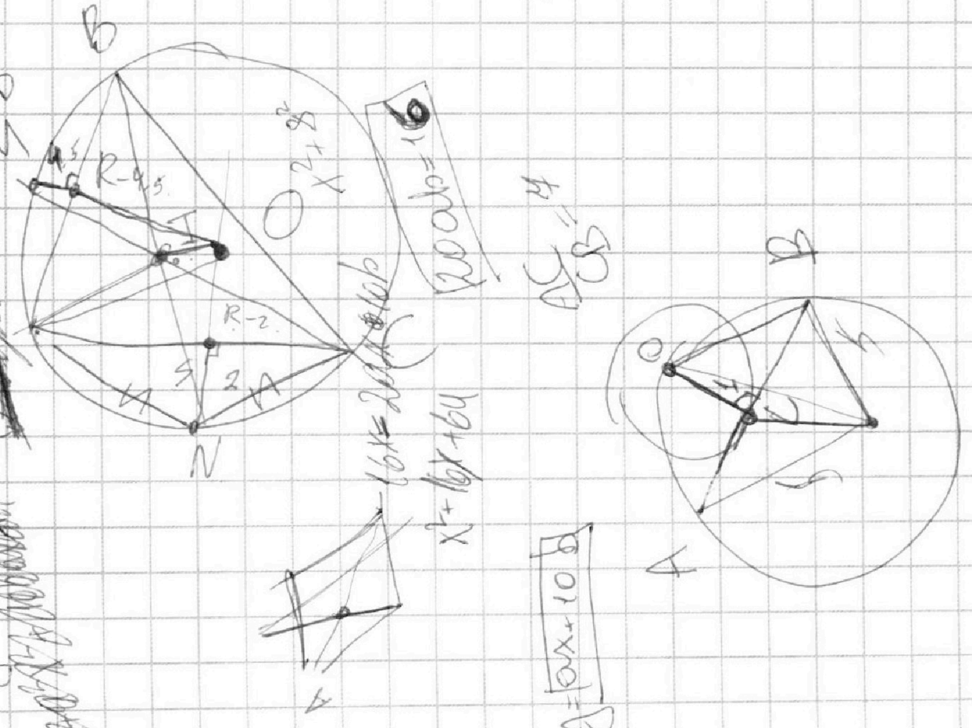
$9+25-6\cdot 15=$

$34-90=56 \vdots 8$

$1{,}5=2$

$\sin\angle\beta = 1{,}5\sin\angle\beta$

Для любого a?



$200b=16$

$y=ax+10b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

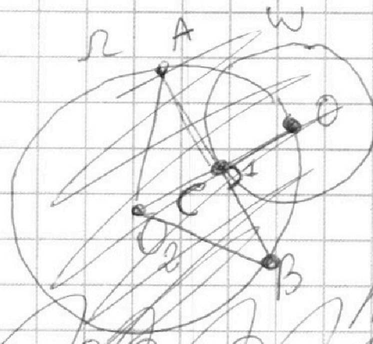
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 3~~ Черновик

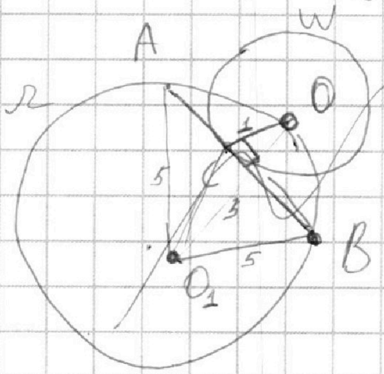
Дано: ω, Ω - окружности, центр ω лежит на Ω. AB принадлежит Ω и касается ω в точке C. $\frac{AC}{CB} = 7$

Радиусы ω и Ω 1 и 5.

AB - ?



~~Пусть O - центр ω, O_2 - центр Ω. OC и O_2O - радиусы этих окружностей, соответ...~~



O_1 и O - центры Ω и ω соответственно. OC ⊥ AB, так как AB касается ω. $AO_1 = O_1B = O_1O$ (радиусы) $= 5$. $OC = 1$ (радиус ω).