



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$\left. \begin{aligned} ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &= 2^{23} \cdot 7^{33} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} ab &= k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &= p \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &= q \cdot 2^{23} \cdot 7^{33} \end{aligned}$$

$$(abc)^2 = k p q \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{k p q} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} = \min$$

$\sqrt{k p q}$ - целое число } ~~к р q~~
"min

k, p, q - целые числа т.е. $k, p, q \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \min(k p q) = 4 \quad (\text{чтобы } \sqrt{k p q} \text{ был целым)}$$

Тогда $abc = \underset{\min}{2} \cdot 2^{28} \cdot 7^{34}$

Ответ: $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



P и Q - центры окружностей

т.к. AB - касательная к $W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ACQ = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CQ^2 = AC \cdot CB$$

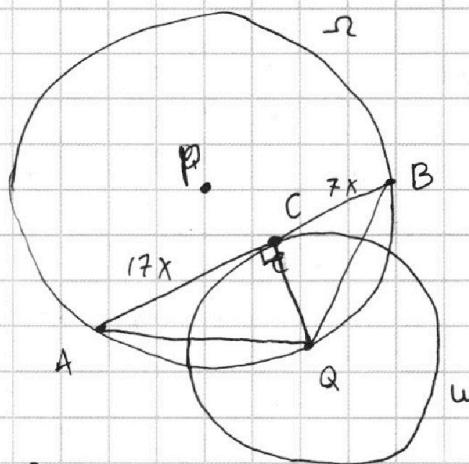
$$CQ = r = 7$$

$$49 = 17x \cdot 7x; \quad 7 = 77x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{7}{77}}$$

$$AB = 24x = \boxed{24\sqrt{\frac{7}{77}}}$$

$$\text{Ответ: } AB = 24\sqrt{\frac{7}{77}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①
$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$
$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \cdot \frac{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} =$$
$$= \frac{3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = \frac{1 - 9x}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}$$
$$\frac{1 - 9x}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = 1 - 9x \quad \left| \frac{\sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\dots}}{1 - 9x} \right.$$
$$1 - 9x = 0 \quad \text{— корни} \quad \boxed{x = \frac{1}{9}}$$

~~Сумма корней $\geq 0 \Rightarrow$ можем~~

②
$$1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Т.к. $\sqrt{\dots} \geq 0 \Rightarrow$ корни из $3x^2 - 6x + 2 \leq 1$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \leq 1; & 3x^2 - 6x + 1 \leq 0; & x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3}}{6} \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1; & x^2 + x \leq 0; & \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -1 \quad 0 \end{array} \end{cases} \rightarrow \boxed{x \in [-1; 0]} \quad \textcircled{3}$$
$$3x^2 - 6x + 1 \leq 0$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{6 \cdot 4}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{4}{6}} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Интервалы $\textcircled{3}$ и $\textcircled{4}$ не пересекаются \Rightarrow

\Rightarrow уравнение $\textcircled{2}$ не имеет корней

Проверим корни $x = \frac{1}{9}$ подстановкой. Он подходит

Ответ: $\boxed{x = \frac{1}{9}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (x_1; y_1)$$

$$B = (x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$2y_1 \geq y_2, y_2 \geq 0$$

Закрепим точку A

$$\text{Тогда } y_2 = 14 + y_1 + 2x_1 - 2x_2 = -2x_2 + \underbrace{14 + y_1 + 2x_1}_{\text{const}}$$

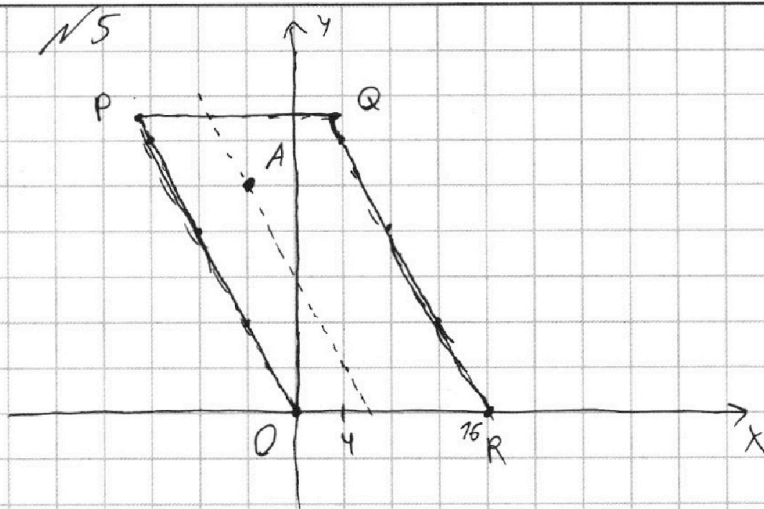
$$\text{Прямая } PO: y = -kx;$$

$$2y = -k - 13; k = 2$$

$$y = -2x \Rightarrow \text{коэф наклона для прямой,}$$

на которой может быть точка B, совпад с коэф наклона параллелограмма

$$\text{или } 14 + y_1 + 2x_1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 7.2)^2 - 76) \leq 0$$

Построим график 2-го неравенства

(это два круга)

$$y = 8b - ax \text{ - прямая.}$$

Если система имеет 2 решения, значит

$$y = 8b - ax \text{ - касательная к обеим окружностям} \Rightarrow$$

внешн' внутр'

\Rightarrow всего будет 4 варианта

Формула расстояния от точки до прямой: $Ax + By + C = 0$ - прямая
($x_0; y_0$)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$A = a$ Если прямая касается

$B = 1$ окр-ти, то $d = r$

$$C = -8b$$

Для маленькой окр-ти: $d = 1 = \frac{|a \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$

$$\sqrt{a^2 + 1} = |-8b| ; 8b = \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

$$64b^2 = a^2 + 1$$

Для большой окр-ти:

$$d = 4 = \frac{|a \cdot 0 + 1 \cdot 7.2 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} ; 4\sqrt{a^2 + 1} = |7.2 - 8b|$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = |3 - 2b| ; a^2 + 1 = (3 - 2b)^2$$

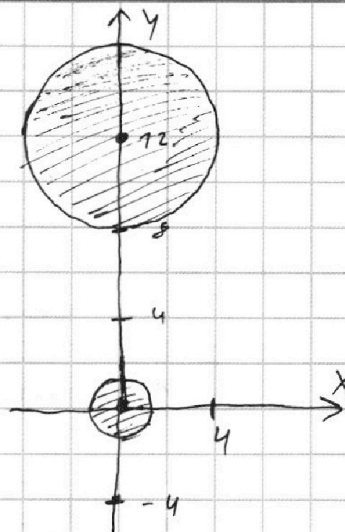
$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \\ a^2 + 1 = (3 - 2b)^2 \end{cases} \quad 64b^2 - (3 - 2b)^2 = 0 ; (8b - 3 + 2b)(8b + 3 - 2b) = 0$$

$$\begin{cases} b = -0.5 \\ b = 0.3 \end{cases}$$

$$a^2 + 1 = 64b^2 = 64 \cdot 0.25 = 16$$

$$a^2 = \frac{15}{\frac{179}{25}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a = \pm \sqrt{\frac{15 \cdot 25}{179}} = \pm \sqrt{\frac{375}{179}}$$

Ответ: $a = \begin{cases} \pm \sqrt{15} \\ \pm \sqrt{\frac{179}{5}} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

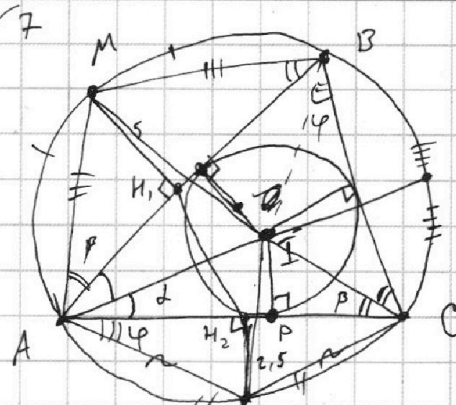


I - центр впис. окр-ти

1) Т.к. M середина дуги \Rightarrow

$\Rightarrow AM = MB$; $\angle AMH_1B = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AMH_1 = \triangle MH_1B$



Аналогично $\triangle AH_2N = \triangle NH_2C \Rightarrow N$

$\Rightarrow AH_1 = H_1B$ и $AH_2 = H_2C$

Заметим, что точки C, I, M лежат на одной

прямой т.к. I \in биссектрисе и M \in биссектрисе

Из вписанных углов; $\angle BCI = \angle MBH_1$, и другие аналогично

~~Из п/у $\triangle ANC$ т.к. $\angle ANH_2 = 90^\circ \Rightarrow NH_2^2 = AH_2 \cdot H_2C = AH_2^2 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow AH_2 = 2,5 = H_2C$~~

~~Аналогично $AH_1 = H_1B = 5$~~

~~$\sin(\varphi) = \frac{2,5}{5} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$~~

$\sin(\varphi) = \frac{2,5}{0,5AC} = \frac{5}{AC}$

$\sin \varphi = \frac{5}{AC}$ $AB = \frac{10}{\sin \beta}$

$\sin(\beta) = \frac{5/MH_1}{\frac{1}{2}AB} = \frac{10}{AB}$

$\sin(\beta) = \frac{r}{CP}$; $CP = \frac{r}{\sin \beta}$

$\sin(\alpha) = \frac{r}{AP}$; $AP = \frac{r}{\sin \alpha}$

$AP + CP = AC = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \frac{5}{\sin \varphi}$

Аналогично $AB = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \varphi} \right)$ $BC = r \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$

$\frac{10}{\sin \beta} = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \varphi} \right)$

$\frac{5}{\sin \varphi} = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$

Тогда $\sin: \frac{AC}{\sin(2\varphi)} = \frac{AB}{\sin(2\beta)}$

$\frac{5}{2\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)} = \frac{10}{2\sin^2(\beta)\cos(\beta)}$

$\sin^3(\varphi)\cos(\varphi) = 2\sin^2(\beta)\cos(\beta)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

График

$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = 8b - ax$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (8b - ax)^2 = 1; \quad x^2 + 64b^2 + a^2x^2 - 16abx = 1$$

Имеет только 1 решение $\Rightarrow D = 0$

$$(16ab)^2 - 4(1+a^2)64b^2 = 0$$

$$2^8 a^2 b^2 - 2^8 (1+a^2)b^2 = 0;$$

$$a^2 b^2 - 1 - a^2 = 0$$

$$a^2(b^2 - 1) - 1 = 0$$

$$x^2 + (4 \pm 8b - ax - 12)^2 = 16$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)(8b - ax - 12) = x^2 + 64b^2 - 8abx - 96b - 8abx + a^2x^2 + 12ax - 96b + 72ax + 144$$

$$= x^2 + 64b^2 + 144 + a^2x^2 - 16abx + 24ax - 2 \cdot 96b = 0$$

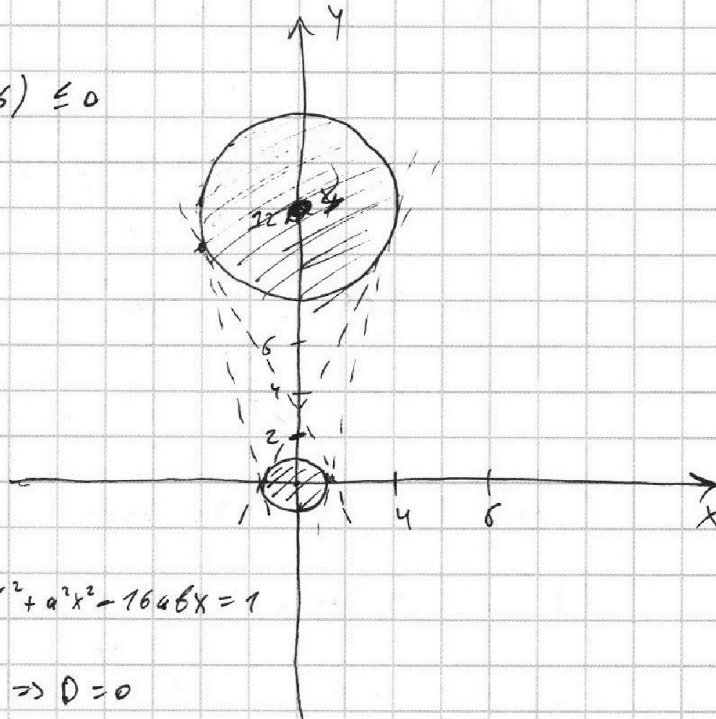
$$x^2(1+a^2) - x(16ab - 24a) + 64b^2 - 2 \cdot 96b + 144 = 0$$

$$96 = 8 \cdot 12 = 4 \cdot 8 \cdot 3 = 2^5$$

$$D = 0; \quad 8^2 a^2 (2b - 3a)^2 - 4(a^2 + 1) \cdot (64b^2 - 2 \cdot 96b + 728) = 0 \quad | \cdot \frac{1}{64}$$

$$8^2 a^2 (2b - 3a)^2 - (a^2 + 1) 2^2 (2b^2 - 3 \cdot 2^6 b + 2^7) = 0$$

$$a^2 (2b - 3a)^2 - 4(a^2 + 1)(b^2 - 3b + 2) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МОТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 7 - 9x$$

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$$

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1$$

ОДЗ: $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 \pm \frac{\sqrt{6 \cdot 2}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad x \in \left[1 - \frac{2}{\sqrt{6}}; 1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \right]$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty \right)$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 81x^2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 - 9x + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 7 - 9x$$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = 7 - 9x$$

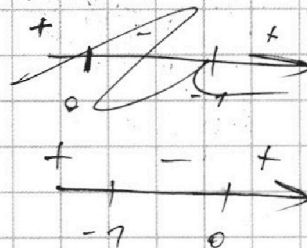
$$(7 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 7 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \leq 1; \quad 3x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1; \quad 3x^2 + 3x \leq 0; \quad x^2 + x \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6}; \quad x \in \left[1 - \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \right]$$





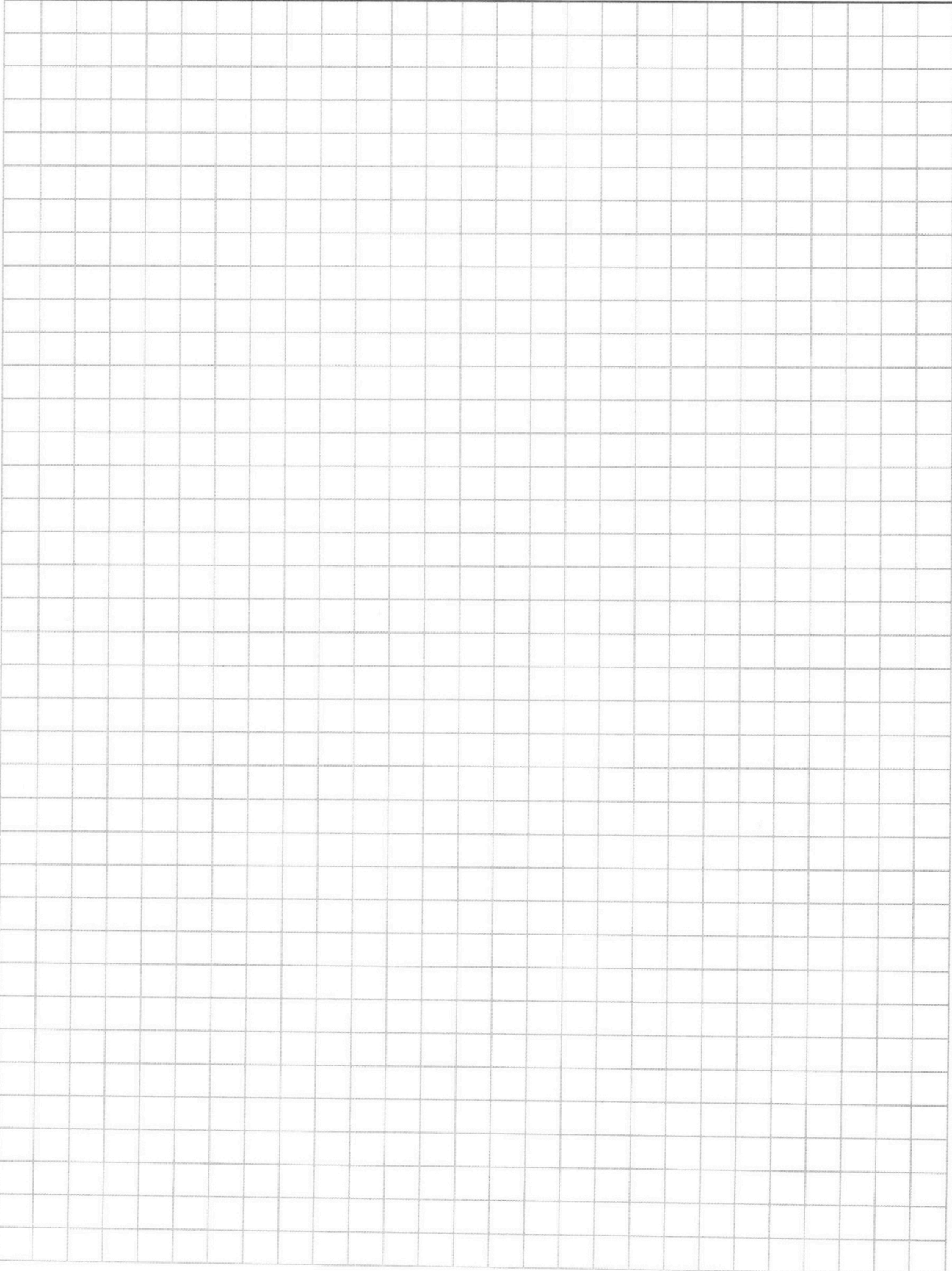
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

