



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

N1

$$\begin{aligned} ab &= ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc = p \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac = q \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \end{array} \right.$$

$$(abc)^2 = kpq \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{kpq} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} = \min$$

\sqrt{kpq} - целое число
"min" ~~делится~~

k, p, q - целые числа т.е. $k, p, q \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \min(kpq) = 4 \quad (\text{чтобы } \sqrt{kpq} \text{ было целым})$$

Тогда
$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Ответ: $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$P \cup Q$ - четырьмя окр - мей

$\sqrt{3}$

T, K, AB - касательная к $W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CAQ = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CQ^2 = AC \cdot CB$$

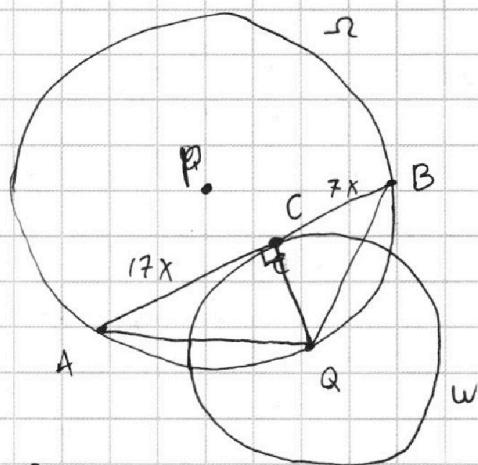
$$CQ = r = 7$$

$$49 = 7x \cdot 7x; 7 = 7x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{7}{77}}$$

$$AB = 24x = \boxed{24 \sqrt{\frac{7}{77}}}$$

$$\text{Ответ: } AB = 24 \sqrt{\frac{7}{77}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

$\sqrt{4}$

(1) $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \cdot \frac{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{\sqrt{...} + \sqrt{...}} =$$
$$= \frac{3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = \frac{1 - 9x}{\sqrt{...} + \sqrt{...}}$$
$$\frac{1 - 9x}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = 1 - 9x \quad | \frac{\sqrt{...} - \sqrt{...}}{1 - 9x}$$
$$1 - 9x = 0 \quad -\text{корень}$$
$$x = \frac{1}{9}$$

Судима корней 1 из 2

(2) $1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

Т.к. $\sqrt{...} \geq 0 \Rightarrow$ корни из корней ≤ 1

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \leq 1; & 3x^2 - 6x + 1 \leq 0; \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1; & x^2 + x \leq 0; \end{cases} \quad | \begin{array}{c} + - + \\ -1 \quad 0 \end{array} \quad x \in [-1; 0] \quad (3)$$
$$3x^2 - 6x + 1 \leq 0$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{6 \cdot 4}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{4}{6}} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Интервалы (3) и (4) не пересекаются \Rightarrow

$$(4) \quad x \in [1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}]$$

\Rightarrow уравнение (2) не имеет корней

Проверим корень $x = \frac{1}{9}$ подстановкой. Он подходит

Ответ: $x = \frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (x_1; y_1)$$
$$B = (x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

~~Угол при > 0~~

$$26 \geq y_1, y_2 \geq 0$$

Закрепим точку A

Тогда $y_2 = 14 + y_1 + 2x_1 - 2x_2 = -2x_2 + \underbrace{\text{const}}_{14+y_1+2x_1}$

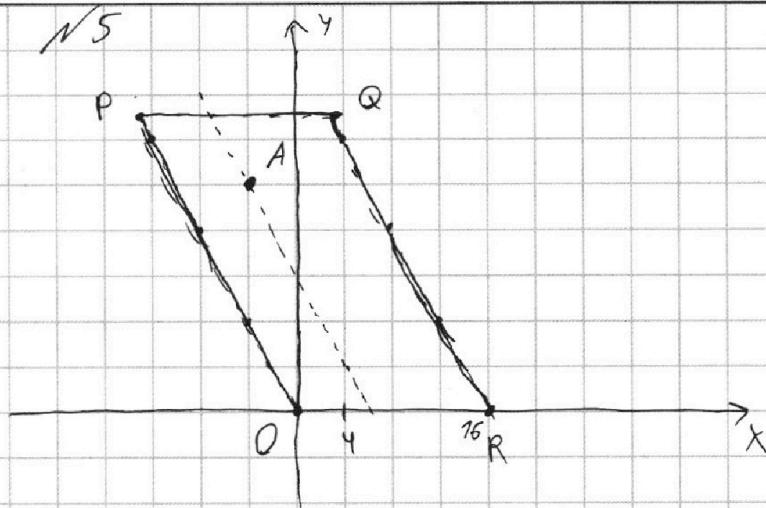
Прямая PO: $y = -kx$; ~~уравнение~~

$$26 = -k \cdot 13; k = 2$$

$y = -2x$ \Rightarrow Кодек находит для прямой,

на которой могут лежать точки B, сдвиг с кодеками
параллелограмма

При $14+y_1+2x_1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6

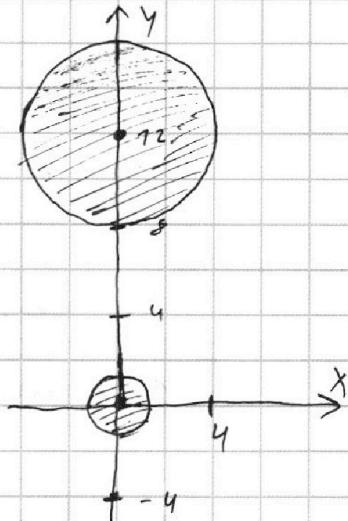
$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - r_2)^2 - 76) \leq 0$$

Построим график 2-го неравенства

(это два круга)

$$y = 8b - ax - \text{прямая.}$$



Если система имеет 2 решения, значит

$y = 8b - ax$ - касательная к обеим окружностям \Rightarrow

внеш \cap внутр \Rightarrow всего будет 4 варианта

Формула расстояния от точки до прямой: $Ax + By + C = 0$ - прямая
($x_0; y_0$)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$A = a$ Если прямая касается

$B = 1$ окр-ми, то $d = r$

$$C = -8b$$

$$\text{Для маленькой окр-ми: } d = r = \frac{|a \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = |-8b| ; 8b = \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

$$64b^2 = a^2 + 1$$

Для большей окр-ми:

$$d = 4 = \frac{|a \cdot 0 + 1 \cdot r_2 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} ; 4\sqrt{a^2 + 1} = |r_2 - 8b|$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = |3 - 2b| ; a^2 + 1 = (3 - 2b)^2$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \\ a^2 + 1 = (3 - 2b)^2 \end{cases} \quad 64b^2 - (3 - 2b) = 0; (8b - 3 + 2b)(8b + 3 - 2b) = 0$$

$$\begin{cases} b = -0,5 \\ b = 0,3 \end{cases}$$

$$a^2 + 1 = 64b^2 = 64 \cdot 0,25 = 16$$

$$64 \cdot \frac{9}{100} = \frac{y \cdot 16}{25} = \frac{744}{25}$$

$$a^2 = \frac{15}{25}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{15} \\ a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a = \pm \sqrt{15} \\ a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

I - четврт Єдиниці окн-ми

1) T.k. M coryneum gynn =>

$$\Rightarrow AM = MB ; \angle MAB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta AMH_1 = \Delta MH_1B$$

$\Delta H_{\text{rxn}} \approx \Delta H_2 N = \Delta N H_2 C \Rightarrow$

$$\Rightarrow AH_1 = k_1 B \quad \text{and} \quad AH_2 = k_2 C$$

Замечание, что точки С и М лежат на одной

Прямои ТК. ТЕ бисектируе $\angle M$ и бисектируе

Углы высотных углов ; $\angle BCI = \angle MBH$, и другие

$$\Rightarrow \text{N}K_2 = 2,5 = K_2 C \quad | \quad \underline{5} \quad AB = \frac{10}{\sin B}$$

Anadostylopsis $AH_1 = H_2 B = 5$

$$\sin(40^\circ) = \frac{2.5}{5} = 0.5$$

$$\sin(\phi) = \frac{2.5}{0.5 AC} = \frac{5}{AC}$$

$$AP + CP = AC = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \frac{5}{\sin \varphi}$$

$$\text{Answering } AB = r \left(\frac{7}{\sin \alpha} + \frac{7}{\sin \beta} \right) \quad BC = r \left(\frac{7}{\sin \beta} + \frac{7}{\sin \alpha} \right)$$

$$\frac{10}{\sin \beta} = r \left(\frac{7}{\sin k} + \frac{7}{\sin u} \right)$$

$$\frac{5}{\sin C} = r \left(\frac{7}{\sin A} + \frac{7}{\sin B} \right)$$

$$\text{Th sin: } \frac{AC}{\sin(2\varphi)} = \frac{AB}{\sin(2\beta)}$$

$$\frac{5}{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{7}{2 \sin(\beta) \cos(\beta)}$$

$$\sin^2(\varphi) \cos(\varphi) = 2 \sin^2(\beta) \cos(\beta)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$ax + y - 8b = 0$$

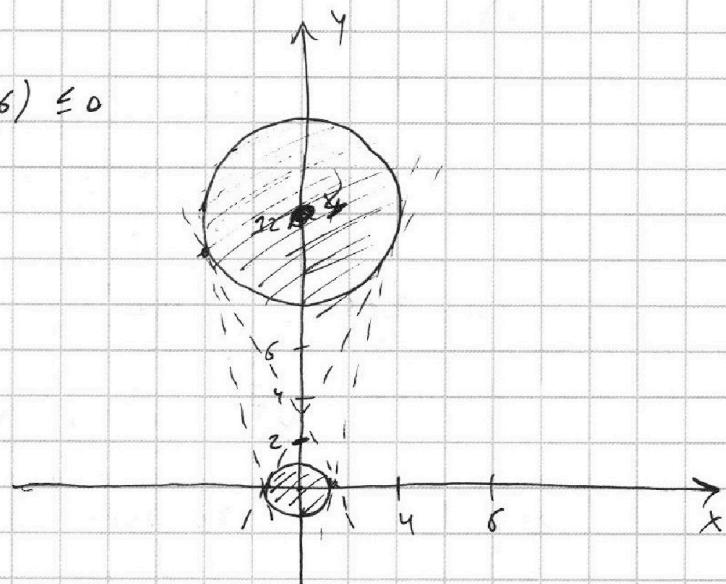
$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 72)^2 - 76) \leq 0$$

График

$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = 8b - ax$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$x^2 + (8b - ax)^2 = 1; \quad x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 = 1$$

Имеем только 1 решение $\Rightarrow D = 0$

$$(16ab)^2 - 4(1+a^2)64b^2 = 0$$

$$2^2 a^2 b^2 - 2^2 (1+a^2) = 0;$$

$$a^2 b^2 - 1 - a^2 = 0$$

$$a^2(b^2 - 1) - 1 = 0$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

$$x^2 + (8b - ax - 72)^2 / (8b - ax - 72) = 16$$

$$x^2 + (8b - ax - 72)(8b - ax - 72) = x^2 + 64b^2 - 8abx - 96b - 8abx + a^2x^2 + 72ax - 96b + 72ax + 744$$

$$= x^2 + 64b^2 + 144 + a^2x^2 - 76abx + 24ax - 2 \cdot 96b = 0$$

$$x^2(1+a^2) - x(16ab - 24a) + 64b^2 - 2 \cdot 96b + 728 = 0 \quad 96 = 8 \cdot 12 = \\ = 4 \cdot 8 \cdot 3 = 3 \cdot 2^5$$

$$D = 0; \quad 8a^2(2b - 3a)^2 - 4(a^2 + 1) \cdot (64b^2 - 2 \cdot 96b + 728) = 0 \quad | \frac{7}{64} \\ 8a^2(2b - 3a)^2 - (a^2 + 1)2^2 (2b - 3 \cdot 2^6 b + 2^7) = 0$$

$$a^2(2b - 3a)^2 - 4(a^2 + 1)(b^2 - 3b + 2) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 7 - 9x$$

$$ODZ: 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$X_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{6} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$1 \pm \frac{\sqrt{6 \cdot 2}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{6}} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} X \in \left[1 - \frac{2}{\sqrt{6}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \right]$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = 7 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad X \in (-\infty; 1 - \frac{2}{\sqrt{6}}] \cup [1 + \frac{2}{\sqrt{6}}, +\infty)$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 81x^2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 - 9x + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad | \quad \sqrt{...} + \sqrt{...}$$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} =$$

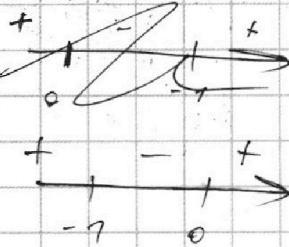
$$(1 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 7 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \leq 7 ; 3x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1 ; 3x^2 + x \leq 0 ; + - +$$

$$X_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{24}}{6} ; X \in \left[1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \right]$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input type="checkbox"/> | 2
<input type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

