



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

Разложения a, b, c на простые множители

Пусть в разложении на простые множители числа a : двойка имеет степень α_1 , тройка - α_2 , пятёрка - α_3 ; в разложении числа b : двойка - β_1 , тройка - β_2 , пятёрка - β_3 ; в разложении числа c : двойка - γ_1 , тройка - γ_2 , пятёрка - γ_3 . Т.е:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot p, \text{ где } p \in \mathbb{N}, p \neq 2, 3, 5$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot q, \text{ где } q \in \mathbb{N}, q \neq 2, 3, 5$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot w, \text{ где } w \in \mathbb{N}, w \neq 2, 3, 5$$

$$a \cdot b = 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3} \cdot p \cdot q$$

$$b \cdot c = 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\beta_3 + \gamma_3} \cdot q \cdot w$$

$$a \cdot c = 2^{\alpha_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \gamma_3} \cdot p \cdot w$$

значит, (1), (4) и (7):

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 26$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 14$$

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 36$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

(2), (5) и (8):

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 21$$

$$2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 59$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29 \frac{1}{2}$$

(3), (6) и (9):

$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 13$$

$$2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 52$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot p \cdot q \cdot w \geq 2^{18} \cdot 3^{26} \cdot 5^{26}$$

Миним. значение $(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 18$; $(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = 30$; $(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) = 26$
 Тогда минимальное возможное значение $a \cdot b \cdot c$ равно $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример: $a = 2^9 \cdot 3 \cdot 5$ минимальное max
 Т.к. $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26 \\ 2\alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \end{cases}$ то $\sqrt{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = 28$ ($\beta_3 \in \mathbb{N}, \beta_3 \geq 0$)

Пример: $a = 2^9 \cdot 3^8$
 $b = 2^2 \cdot 3^5$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{17}$

Тогда минимально возможное значение $ab = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$
 $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 = 2^2 \cdot 3^5$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{19}$

$a \cdot b \cdot c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$
 $a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$
 $b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{19}$
 $a \cdot c = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

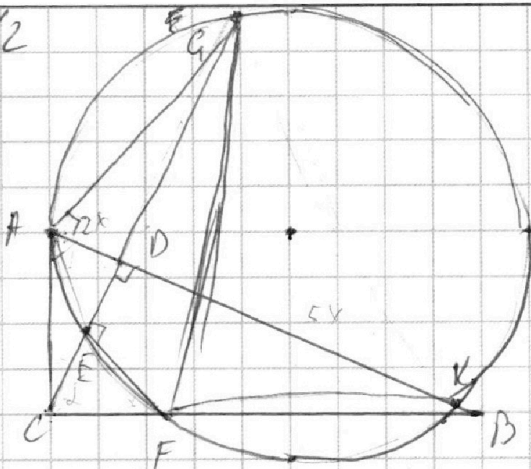
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



N2



$$1. AB:BD = 1,4$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4; \frac{AD+DB}{BD} = 1,4$$

$$\frac{AD}{BD} + 1 = 1,4$$

$$\frac{AD}{BD} = 0,4 = \frac{2}{5}$$

Пусть $AD = 2x; BD = 5x$

Тогда $AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{14}x$

$BC = \sqrt{BD \cdot AB} = \sqrt{35}x$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB$$

$$AC \cdot BC = CD \cdot AB$$

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x \cdot \sqrt{35}x}{7x} = \sqrt{10}x$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2,5}x = \sqrt{10}x$$

2. Т.к. $AB \parallel EF$, то $\angle EPB = \angle CEF = 90^\circ$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{1}{2} \sqrt{10}x \cdot 2x = \sqrt{10}x^2$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF$$

3. $\triangle CEF \sim \triangle CNB$ (по двум углам).

1) $\angle C$ - общий.

2) $\angle CEF = \angle CNB = 90^\circ$

значит $\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CD} = k$, где k - коэффициент подобия

Тогда $CE = \frac{EF}{k} = \frac{BD \cdot k}{k} = BD = 5x$; $EF = BD \cdot k = 5\sqrt{10}x^2 k^2$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \sqrt{10}x \cdot k \cdot EF = 5x \cdot k = \frac{5\sqrt{10}x^2 k^2}{2}$$

4. Д.и. $ED \cap \text{окр}(O; R) = G$; GF ; AG ; $FGK = \text{прямая } (O; R)$; FK

5. Т.к. $\angle GEF = 90^\circ$, то GF - диаметр окр.(O; R)

$$GF = 2R$$

$$AC^2 = CE \cdot EF$$

~~6. $\triangle ADC \sim \triangle CEF$ (по двум углам)~~

~~1) $\angle ADC = \angle CEF = 90^\circ$~~

~~2) $\angle DAC = 90^\circ - \angle ACD = \angle ECF$~~

~~Тогда $\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{EF} = \frac{AC}{CF}$~~

~~$\frac{2x}{\sqrt{10}xk} = \frac{\sqrt{10}x}{5x \cdot k} = \frac{\sqrt{14}x}{CF}$; $CF = \frac{5x \cdot \sqrt{14}xk}{\sqrt{10}x} = \sqrt{35}kx$~~

5. ~~$\angle DAE = 90^\circ$~~ 5. $EF \parallel AB$; $AKFE$ - вып., значит $AKFE$ - параллелограмм.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Рассмотрим случаи: $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$

Заметим, что $\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$

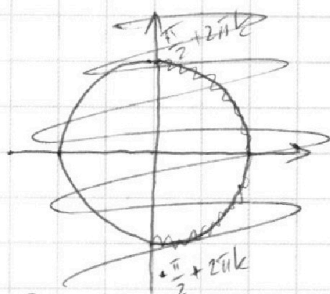
Тогда $10 \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi]$

Значит, $9\pi - 2x \in [0; 10\pi]$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$



Рассмотрим случаи:

1) $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: ~~так~~ $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$-\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ - явл. реш.

2) $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$: $\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$

$$10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$x = \frac{7\pi}{6}$ / $\frac{7\pi}{6} \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ - явл. реш.

3) $x \in (\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$: ~~$\arccos(\sin x) = x - \frac{3\pi}{2}$~~ $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) = \frac{5\pi}{2} - x$

$$10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$16\pi = 8x$$

$$x = 2\pi$$

$2\pi \in (\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$ - явл. реш.

4) $x \in (\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$: $\arccos(\sin x) = (x - 2\pi) - \frac{\pi}{2} = x - \frac{5\pi}{2}$

$$10(x - \frac{5\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6}$$

$\frac{17\pi}{6} \in (\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$ - явл. реш.

5) $x \in (\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$: $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 4\pi) = \frac{9\pi}{2} - x$

$$10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$\frac{9\pi}{2} \in (\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$ - явл. реш.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi;$

$\frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

уравнение окр. с центром
в $(0; 0)$ и радиусом 5

$$x^2 + (y+9)^2 = 2^2$$

уравнение окр. с центром
в $(0; -9)$ и радиусом 2

$$\begin{matrix} D(y) \\ E(y) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \in [-5; 5] \\ y \in [-5; 5] \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} D(y) \\ E(y) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \in [-2; 2] \\ y \in [-7; -11] \end{matrix}$$

$$5x + 6ay - 6 = 0 \quad ; \quad ay = -\frac{5x}{6} + \frac{6}{6}$$

Если $a = 0$, то $x = 6/5$ (уравнение прямой $\parallel$ Oy) - при применении
берем все действ. значения

Если $a \neq 0$, то $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$ (линейная функция) - а
задает уравнение прямой. при применении в $\frac{1}{a}$
прямая смещается вверх или вниз (берем значения
в действ. значениях)

ли. график на другой стороне листа.

ли. продолжение решения на другой стороне
листа.

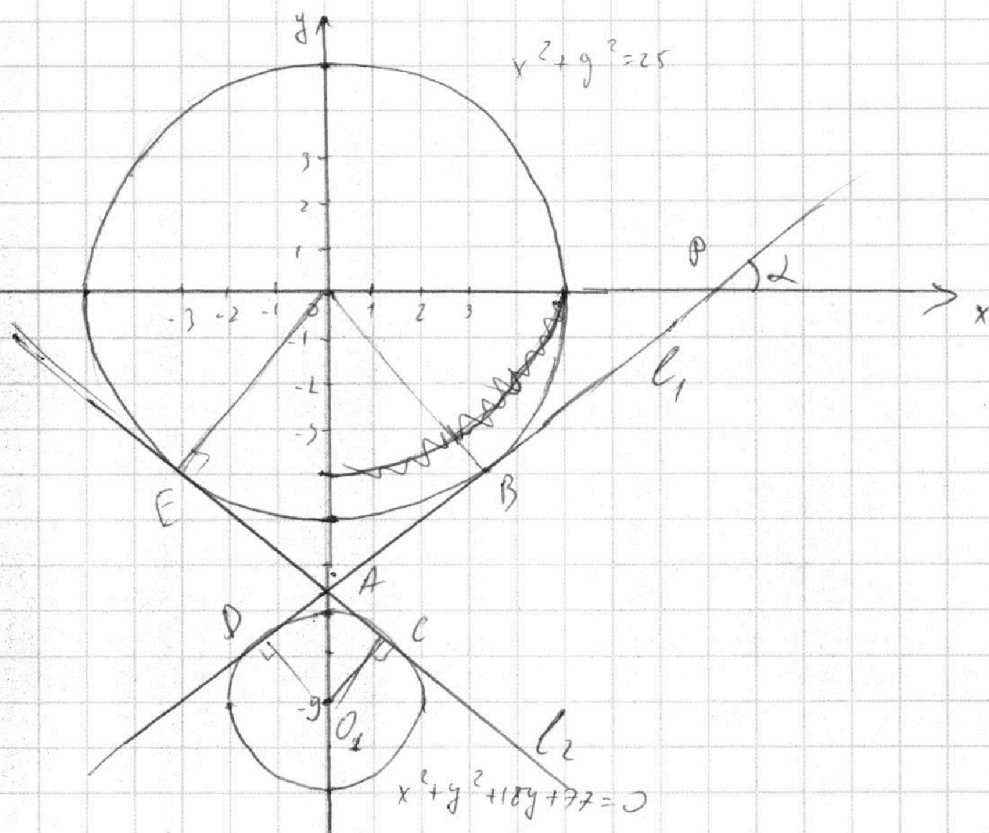
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решением системы явл. точки пересеч. прямой $5x + 6ay - 6 = 0$ и любой из окр.

Заметим, что з.к. прямая $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$ может перемещаться вверх и вниз в сч.ц. параметра a , то мы можем проверить существует ли прямая с наклоном $-\frac{5}{6a}$, которая пересекает каждую окр. дважды.

При $a = 0$ можно найти такой b , что система имеет 4 решения, например $b = 0$.

Обозначим l_1 и l_2 - общие внутр. касательные (котр. наклона $l_1 > 0$, котр. наклона $l_2 < 0$).

Тогда можно заметить, что прямые с котр. наклона $\leq$ тем у l_1 , но $\geq$ тем у l_2 не могут пересек. обе окр. дважды. Т.е. при этих з.к. котр. наклона a не подходят.

Найдём котр. наклона l_1 и l_2 .

1. Из Д.п. опустим $OB \perp l_1$ и $OE \perp l_2$; $O_1D \perp l_1$; $O_1C \perp l_2$ (O_1 - центр меньшей окружности); $l_1 \cap Ox = P$

Продолжение на следующем листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

2. ~~ОАА~~ ~~ОБА~~ ~~ОДА~~ $\triangle OBA$ с $\triangle O_1DA$ (по условию)

1) $\angle OBA = \angle O_1DA = 90^\circ$

2) $\angle O_1AD = \angle OAB$ - верши.

Значит, $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OA} = \frac{5}{2}$; $OA = \frac{5}{2} OB$

$\frac{OA}{O_1A} = \frac{OB}{O_1D} = \frac{5}{2}$; $OA = \frac{5}{2} O_1A$

3. $OA_1 + OA = O_1A = 9$

$\frac{5}{2} O_1A = 9$

$O_1A = \frac{18}{5}$

4. $\sin \angle O_1AD = \frac{O_1D}{O_1A} = \frac{2 \cdot 7}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

Тогда $\cos \angle O_1AD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle O_1AD} = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{18}}{9} = \frac{3\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

5. $\angle OAP = \angle O_1AD$ - верши.

$\angle OPA = 90^\circ - \angle OAP$ (сумма острых углов у пр.)

$\angle = \angle OPA$ (т.к. на ~~этом~~ графике)

$\angle = \angle OPA = 90^\circ - \angle OAP$

Тогда $\cos \angle = \cos(90^\circ - \angle OAP) = \sin \angle OAP = \sin \angle O_1AD = \frac{7}{9}$

$\sin \angle = \sin(90^\circ - \angle OAP) = \cos \angle OAP = \cos \angle O_1AD = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Котр. наклона $l_1 = \tan \angle = \frac{\sin \angle}{\cos \angle} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$

В силу симметрии котр. наклона $l_2 = -\frac{7\sqrt{2}}{3}$

Тогда $\frac{5x}{6a} \in \left[-\frac{7\sqrt{2}}{3}, \frac{7\sqrt{2}}{3}\right]$ - не явл. реш.

$\begin{cases} -\frac{5x}{6a} \geq -\frac{7\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{5x}{6a} \leq \frac{7\sqrt{2}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \cdot (-\frac{6}{5}) \\ 1 \cdot (-\frac{6}{5}) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases}$

1) $a > 0$: $\begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \cdot a \\ 1 \cdot a \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} a \\ 1 \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} a \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq \frac{35}{18\sqrt{2}} \\ a \geq -\frac{35}{18\sqrt{2}} \end{cases}$

2) $a < 0$: $\begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \cdot a \\ 1 \cdot a \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \geq \frac{18\sqrt{2}}{35} a \\ 1 \leq -\frac{18\sqrt{2}}{35} a \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq \frac{35}{18\sqrt{2}} \\ a \leq -\frac{35}{18\sqrt{2}} \end{cases}$

Т.к. при $a \in (-\infty; -\frac{35}{18\sqrt{2}}) \cup (\frac{35}{18\sqrt{2}}; +\infty)$ система не имеет решений,
при $a = \pm \frac{35}{18\sqrt{2}}$ и т.д. при всех допустимых a также в най. $a \in (-\frac{35}{18\sqrt{2}}; \frac{35}{18\sqrt{2}})$
или $a \in [-\frac{35}{18\sqrt{2}}; \frac{35}{18\sqrt{2}}]$ Ответ: $a \in [-\frac{35}{18\sqrt{2}}; \frac{35}{18\sqrt{2}}]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



УС.

ОДЗ: $x > 0$ $\begin{cases} x \neq 1 \\ 0,5y \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (0; 1) \cup (1; \infty) \\ y \in (0; 2) \cup (2; \infty) \end{cases}$

$$\begin{cases} \log^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{11} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y} (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

$$\log^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \log_{11} \frac{1}{11} - 5 \Leftrightarrow \log^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} 11 - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} + \frac{2}{3 \log_{11} x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \log^4 x - \frac{16}{3 \log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y} (11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = -\frac{13}{3 \log_{11} (0,5y)} - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{3 \log_{11} (0,5y)} - 5 = 0$$

$$\begin{cases} \log^4 x - \frac{16}{3 \log_{11} x} + 5 = 0 & | \cdot \log_{11} x \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{3 \log_{11} (0,5y)} + 5 = 0 & | \cdot \log_{11} (0,5y) \neq 0, \text{ т.к. } y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log^5 x - \frac{16}{3} + 5 \log_{11} x = 0 \\ \log_{11}^5 (0,5y) + \frac{16}{3} + 5 \log_{11} (0,5y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Пусть } \log_{11} x = a, \log_{11} (0,5y) = b \quad (a, b \neq 0)$$

$$\begin{cases} a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0 \\ b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0 \end{cases} \quad \text{Пусть } f(t) = \frac{1}{5}t^5 + 5t \quad D(f) \in \mathbb{R}$$

$$\text{Заметим, что } f(t) \text{ — нечетная: } f(-t) = -\frac{1}{5}t^5 - 5t = -f(t)$$

$$\text{т.к. } f(a) = \frac{16}{3} \text{ и } f(b) = -\frac{16}{3} \text{ то } a = -b$$

$$\text{Обратная замена: } \log_{11} x = -\log_{11} (0,5y) \\ \log_{11} x = \log_{11} \frac{2}{0,5y} \\ \text{значит } x = \frac{2}{0,5y} \quad D(f) p > 0, - \log_{11} \text{ — старшая}$$

$$\text{Ответ: } xy = 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

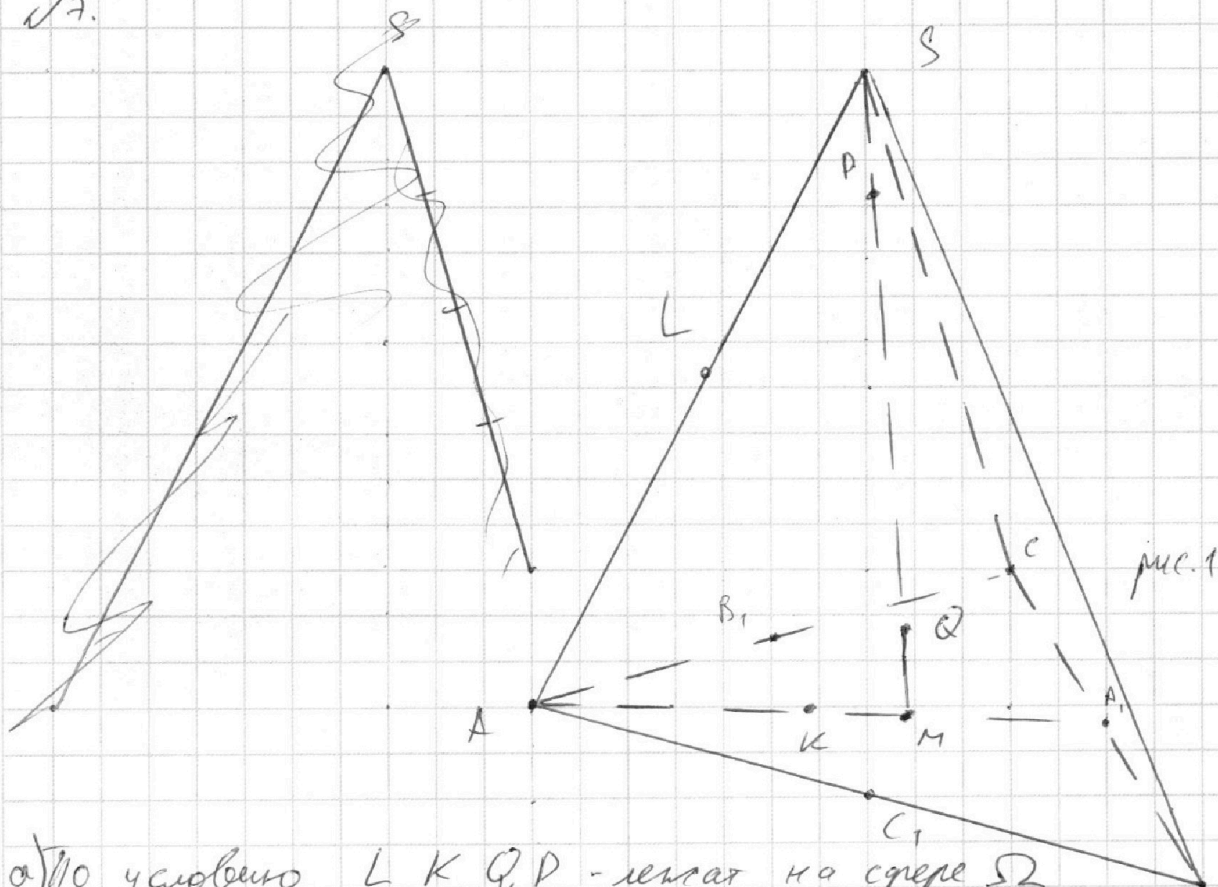
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

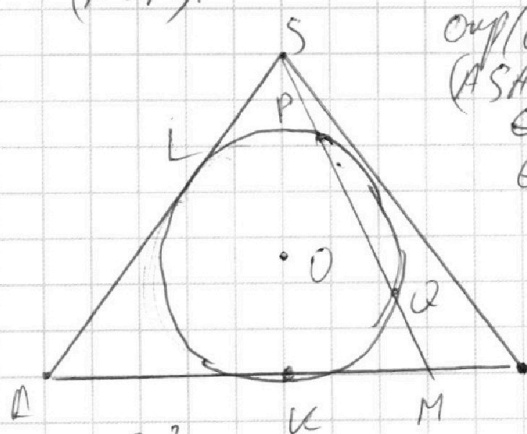
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



17.



а) По условию L, K, Q, P - лежат на сфере Ω .
Т.к. $L, K, Q, P \in (AMS)$ и сечение сферы Ω плоскостью (AMS) - окружность, то $LPQK$ - вписанный четырехугольник (ASM) .



Окр (O, R) на рис 2 - сечение сферы плоск. (ASA)

Сечением точки S : $SP \cdot SQ = SP \cdot (SP + PQ)$

Сечением точки

$$SL^2 = SP \cdot SQ; MK^2 = MQ \cdot MP$$

(SL, MK - касат. к окр.; SQ, MP - сек.)

Т.к. $SP \cdot SQ = MQ \cdot (SP + PQ) = MQ \cdot (MQ + PQ + PQ) = MQ \cdot MP$, то сечением точек

A, S и M равны, и, следовательно, $SL^2 = MK^2$
 $SL = MK$.

Т.к. AL и AK - касат. из одной точки к окр., то $AL = AK$. $AL + SL = AK + KM \rightarrow AS = AM = 20$

Т.к. M делит медиану B соотн. 2:1, то $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(ABC):

Проверим высоту AH к BC .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$AH = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$$

Введём прямоугольную систему координат.

Иху: $A \in Hx, B \in Hy$

$\triangle AA_1H: \angle H = 90^\circ$

$$AA_1^2 = AH^2 + A_1H^2 \text{ (т. Пиф.)}$$

$$A_1H^2 = AA_1^2 - AH^2 = 900 - 324 = 576 = 24^2$$

$AH = 24; HC = A_1H - A_1C = A_1H - \frac{1}{2} BC = 24 - 10 = 14$

Тогда $A(18; 0); C(0; 14); B(0; 34)$

$B_1(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = B_1(9; 24)$

$C_1(\frac{x_C + x_A}{2}, \frac{y_C + y_A}{2}) = C_1(9; 12)$

$$CC_1 = \sqrt{(x_{C_1} - x_C)^2 + (y_{C_1} - y_C)^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$BB_1 = \sqrt{(x_{B_1} - x_B)^2 + (y_{B_1} - y_B)^2} = \sqrt{81 + 929} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$$

Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 90 \cdot 10 \cdot 9 = 8100$

Ответ: а) 8100

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$EF \parallel AB$

$$AB:BD = 1,4$$

$$\frac{AD}{BD} = 0,4 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}}$$

$$S_{\Delta CEF}$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 2X \cdot h$$

$$S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF$$

$$\Delta CEF \sim \Delta CPB$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD}$$

$$90\pi - 10X = 9\pi - 2X$$

$$= 8X$$

$$72\pi$$

$$36\pi = 8X$$

$$= 4X$$

$$9\pi = X$$

$$\frac{9\pi}{4} = X$$

$$10 \cdot \frac{5\pi}{2} = 9\pi - \frac{9\pi}{2}$$

$$10 \arccos(-1) = 9\pi + \pi$$

$$10\pi = 10\pi$$

IV

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2X$$

$$\sin x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\sin x) \text{ при } x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{\pi}{2} - x$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in [\frac{\pi}{2}; 0]$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in \text{II}$$

$$\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x \in \text{III}$$

$$x \in \text{I или IV}$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2X$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2X$$

$$-4\pi = 8X$$

$$X = -\frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

№1 a, b, c

$$\begin{aligned} ab &: 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc &: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac &: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{aligned}$$

мин

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \\ b &= 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \\ c &= 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &\geq 6 \\ \alpha_2 + \beta_2 &\geq 13 \\ \alpha_3 + \beta_3 &\geq 11 \\ \alpha_1 + \gamma_1 &\geq 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &\geq 6 \\ \alpha_1 + \gamma_1 &\geq 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 &\geq 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) &\geq 36 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &\geq 18 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 4 & 2 & 12 \end{matrix}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 &\geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 &\geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 &\geq 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) &\geq 59 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &\geq 29 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 + \beta_3 &\geq 11 \\ \alpha_3 + \gamma_3 &\geq 28 \\ \beta_3 + \gamma_3 &\geq 13 \end{aligned}$$

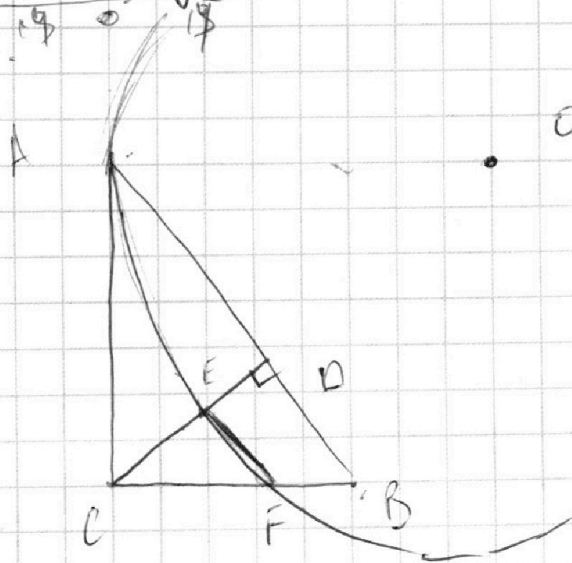
$$\begin{aligned} 2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) &\geq 52 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &\geq 26 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 26 \end{aligned}$$

№2

$$\min abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AD + DB}{BD} = \frac{AB}{BD} = 1$$

$$\frac{AD}{BD} = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

✓ 5

$$10 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$10 \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) = 9\pi - 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$10 \cdot \frac{2\pi}{3} = 7\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{20\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

✓ 5

$$\log^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log^4 (0,5x) + \log_{0,5} 11 = \log_{0,125} 3 (11^{-13}) - 5$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,5x > 0 \\ 0,5x \neq 1 \end{cases}$$

с ун. доз

$$x \in (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$y \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$\frac{2}{3a} - \frac{6}{a} = \frac{2-18}{3a}$$

$$\log^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log^4 x - \frac{6}{\log_x x} = -\frac{2}{3 \log_x x} - 5$$

$$\frac{2-18}{3a} = \frac{16}{3a}$$

$$\log^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5} (0,5y)} = -\frac{13}{3} \log_{0,5} 11 - 5$$

$$\log^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5} (0,5y)} = -\frac{13}{3 \log_{0,5} 11} - 5$$

$$\log_x x = a, \log_{0,5} (0,5y) = b, a, b \neq 0$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \\ b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0$$

$$a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0$$

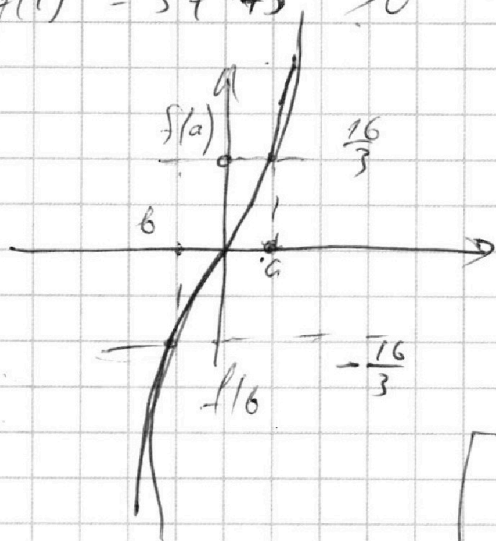
$$b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0$$

$$f(t) = t^5 + 5t$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$f(-t) = -t^5 - 5t = -f(t) \text{ — кер.}$$

$$f'(t) = 5t^4 + 5 > 0 \text{ — возраст.}$$



$$a^5 + 5a = -b^5 - 5b$$

$$a^5 + b^5 + 5(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - ab^3 + a^3b - b^4 + 5) = 0$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - ab^3 + a^3b - b^4 + 5)$$

$$\left[\begin{array}{l} a = -b \\ a^4 + a^2b^2 + b^4 + 5 = a^3b + ab^3 = ab(a^2 + b^2) \end{array} \right]$$

$$a = -b$$

$$\log_a x = -\log_a(0,5y)$$

$$\log_a x = \log_a(0,5y)^{-1}$$

$$x = \frac{1}{0,5y}$$

$$x = \frac{2}{y}$$

$$xy = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

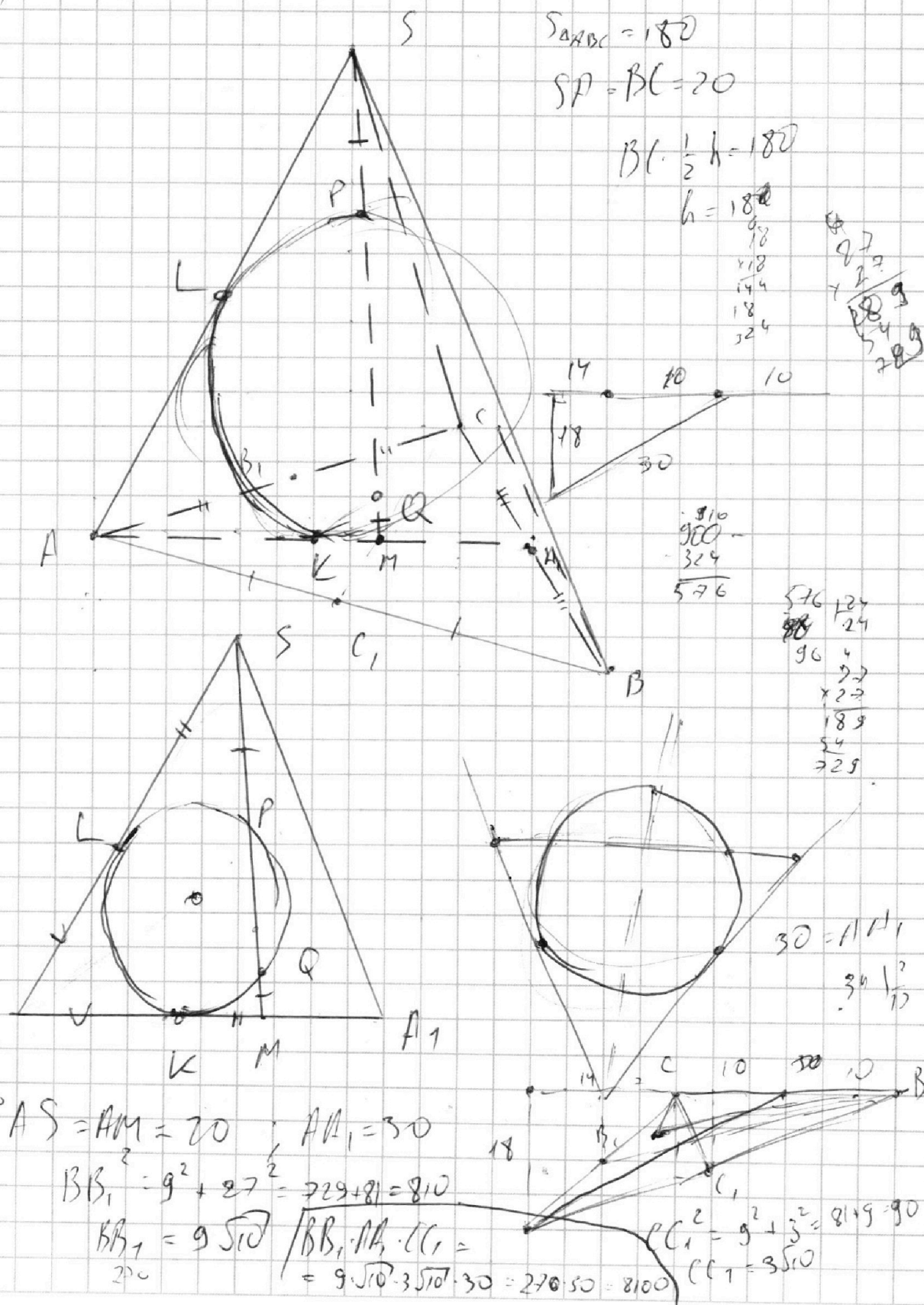
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н/ч черновик



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

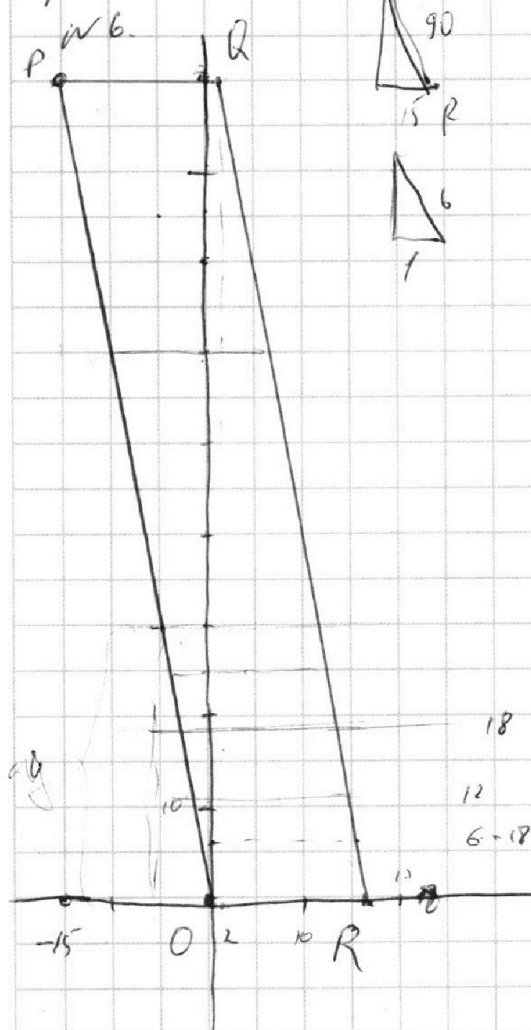
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик.



$$A, B \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

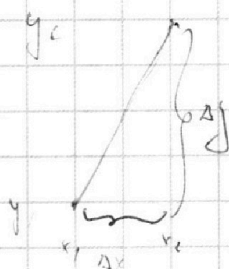
$$6\Delta x + \Delta y = 48$$

$$\Delta x_{\max} = 32$$

$$\Delta x_{\min} = -32$$

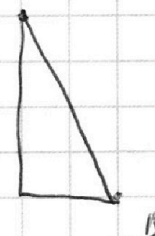
$$\Delta y_{\max} = 90$$

$$\Delta y_{\min} = -90$$



$$\Delta y = -24$$

$$\Delta x = 12$$



$$6\Delta x + \Delta y = 48$$

$$\Delta y = -90 \quad \left[\begin{array}{c} 24-18=6 \\ 12-6=6 \\ 6-0=6 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 12 \\ 18 \\ 24 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 6 \\ 12 \\ 18 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 9 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right]$$

$$\Delta y = 90 \rightarrow \Delta x$$

$$\frac{102}{6} = 17$$

$$\Delta y = a$$

$$\boxed{16 - \text{no } 18}$$

$$\boxed{75 - \text{no } 17}$$

$$91 - 16 = 75$$

$$91 - 16 = 75$$

$$\Delta y = 48$$

$$\Delta x \in [-25; 25]$$

$$-102 \leq 6\Delta x + \Delta y \leq 102 + 2a$$

$$48 \leq 102 + 2a$$

$$-54 \leq 2a$$

$$-27 \leq a$$

$$\Delta y = a$$

$$\Delta x = 17 + \frac{48}{6}$$

$$\Delta x_{\min} = -17 - \frac{48}{6}$$

$$a \in [17 - 102 - a; 102 + a]$$

$$48$$

$$48 \in [102 + a; 102 + a]$$

$$-102 - a \leq 48$$

$$6\Delta x + 48 \leq 2 \begin{cases} a \geq 54 \\ a \geq -150 \end{cases}$$



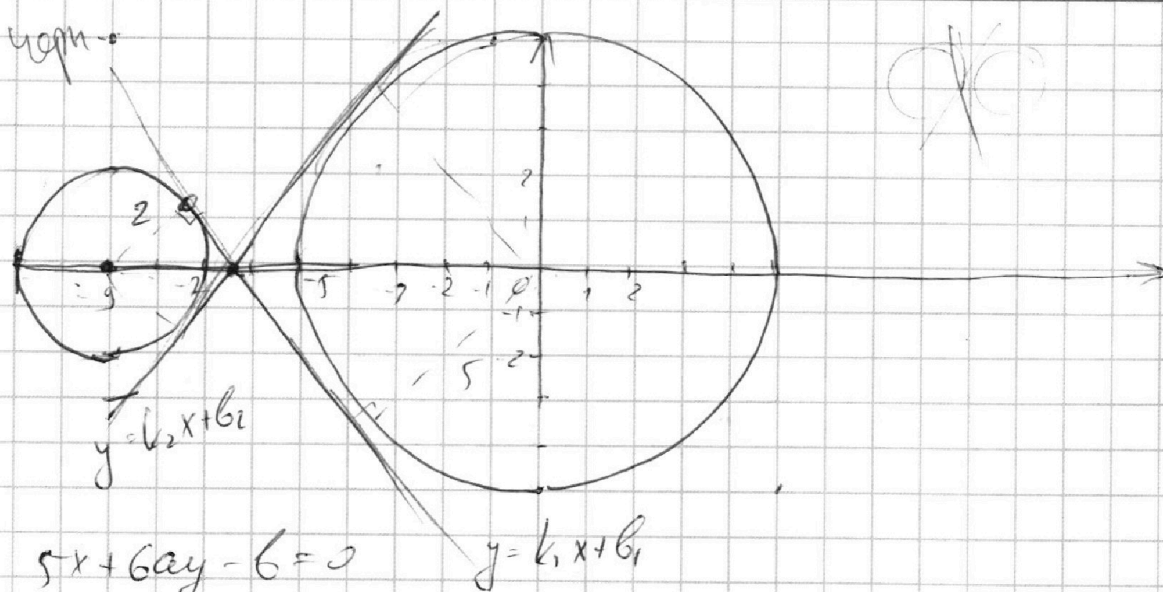
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$6ay = -5x + 6$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$$

параметр a является искомым

Получил $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$ или проще a не будет иметь
такой b , что 4 реш.

$$d + \frac{d}{2} \cdot 5 = 9$$

$$\frac{7}{2}d = 9$$

$$d = \frac{18}{7}$$

$$\frac{18}{7} \cdot \frac{5}{2} + \frac{18}{7} = 9$$

$$\frac{18}{7} \cdot \frac{5}{2} + \frac{18}{7} = 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

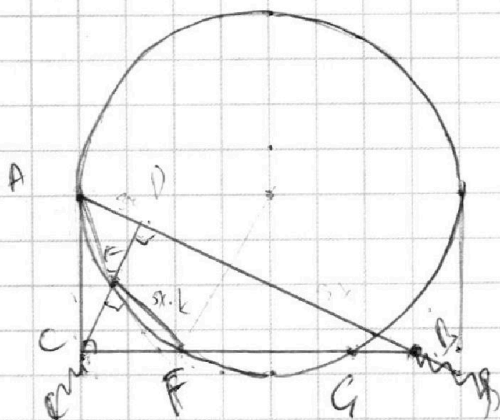
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Черновик.



$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$14x^2 = AC^2$$

$$\sqrt{14}x = AC$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

$$35x^2 = BC^2$$

$$BC = \sqrt{35}x$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} h \cdot 2x$$

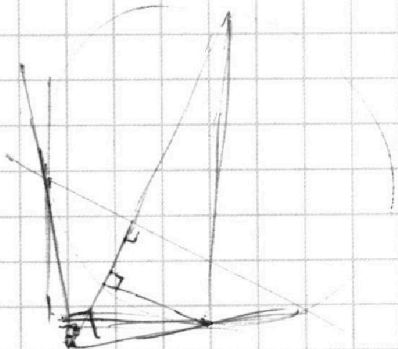
$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} h' \cdot 5x$$

$$k = \frac{CF}{CB} = \frac{CF}{\sqrt{35}x}$$

$$AC^2 = CF \cdot CG$$

$$BC = \sqrt{35}x$$

$$CF = k\sqrt{35}x$$



$$y^2 + 2 \cdot 9 \cdot y + 21 = 4$$

№4

$$5x + 6xy - 6 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$