МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab \vdots 2^{6} \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

Оценка: из усл. следует, что $ab \cdot bc \cdot ac \vdots (2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{13+11+28})$

$(abc)^2 \vdots 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

квадрат

$(abc)^2 \vdots 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$

$abc \vdots 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

т.к. $a; b; c \in N$

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Но! $ac \vdots 5^{28}$ значит $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^{4} \cdot 3^{9} \cdot 5^{14}$

$b = 2^{2} \cdot 3^{5}$

$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

$ab = 2^{6} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$

$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

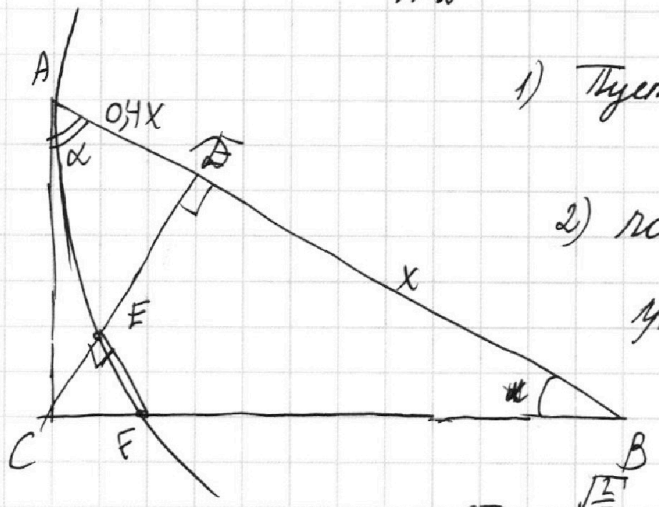
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N2



1) Пусть $BD = x \to AB = 1{,}4x$

$AD = 0{,}4x$

2) по св-ву высоты в прямоуг. Δ-ке:

$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = x\sqrt{\frac{2}{5}}$

2) Пусть $\angle CAB = \alpha$: $tg\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x$

$5\pi - 10\arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$

$2x - 4\pi = 10\arcsin(\sin x)$, $\quad x - 2\pi = 5\arcsin(\sin x)$

$\in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

$-\frac{5\pi}{2} \le x - 2\pi \le \frac{5\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9\pi}{2}$

1°) если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\quad x - 2\pi = 5x$

$\arcsin(\sin x) = x$ $\quad -2\pi = 4x$, $\boxed{x = -\frac{\pi}{2}}$ подх.

2°) если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:

$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\underbrace{\sin(\pi - x)}_{\in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}) = \pi - x$

$x - 2\pi = 5(\pi - x)$, $\quad x - 2\pi = 5\pi - 5x$, $\quad 6x = 5\pi$, $\boxed{x = \frac{5}{6}\pi}$ подх.

π $\quad \frac{\pi}{2}$

3°) если $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$:

$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\underbrace{\sin(x - 2\pi)}_{\in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}) = x - 2\pi$

$x - 2\pi = 5x - 10\pi$

$4x = 8\pi$, $\boxed{x = 2\pi}$ подх.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4) если $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(2\pi+\pi-x)) =$

$= \underbrace{3\pi - x}_{\in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$

$x - 2\pi = 5(3\pi - x)$, $6x = 17\pi$, $x = \frac{17}{6}\pi = \underset{\vee\, 2{,}5\pi}{\overset{3{,}5\pi}{2\frac{5}{6}}}\pi$

подх.

5) если $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$:

$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 4\pi)) = x - 4\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$x - 2\pi = 5(x - 4\pi)$

$x - 2\pi = 5x - 20\pi$, $4x = 18\pi$, $x = \frac{9}{2}\pi$ подходит

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (прод. 2)

$$\begin{cases} \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{5}{6a} > 0 \\ -\frac{5}{6a} + \frac{4\sqrt{2}}{3} < 0 \end{cases}$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{2}}{35}\right) \cup$

$\cup (0; +\infty) \cup \left(\frac{2\sqrt{2}}{35}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

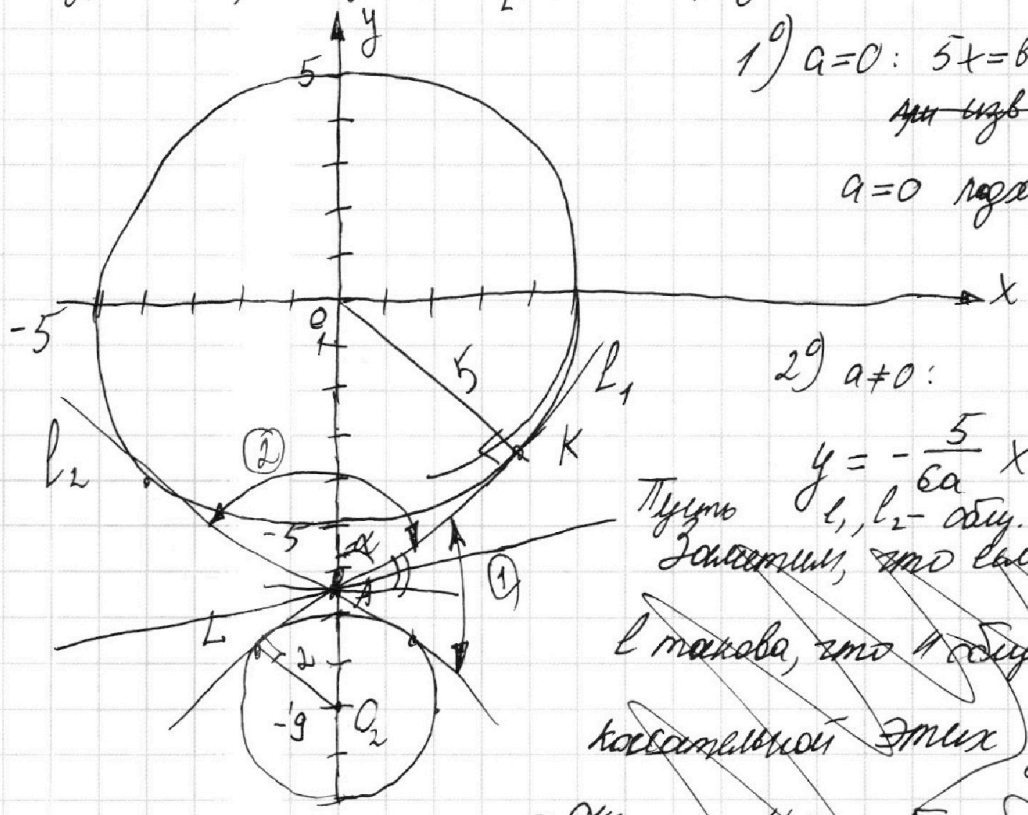
МФТИ

№4

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \ (1) \\ x^2+(y+9)^2=4 \ (2) \end{array}\right.$$

Решим задачу графически: (1) – ур-е окр. с центром $O_1(0;0)$ и рад. 5

(2) – ур-е окр. с центром $O_2(0;-9)$ и рад. 2



1°) $a=0$: $5x=b$

~~при изв~~ при $b=0$ 4 реш.

$a=0$ подходит

2°) $a\neq 0$: это пр. l

$$y=-\frac{5}{6a}x+\frac{b}{6a}$$

Пусть l_1, l_2 – общ. внут. касат.

~~Заметим, что если l такова, что 1 общей внутр. касательной этих двух окр., то 4 реш. быть не может т.к. при изм. b у нас эти прямые сдвигаются вниз или вверх и тогда её угловой коэф. лежит между угловыми коэф. этих общ. внут. касат.~~

Пусть $A=O_1O_2\cap LK$ (LK – общ. вн. кас)

Из $\triangle LAO_2 \sim \triangle KAO_1$: $\frac{O_2A}{AO_1}=\frac{2}{5}$ $\quad O_1O_2=9=\frac{2}{5}O_1A+AO_1$

$9=\frac{7}{5}AO_1$, $AO_1=\frac{45}{7}$

A им. коорд. $\left(0;-\frac{45}{7}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4 (продолжение)

Перенесём все прямые l так, чтобы они проходили через A. Тогда лагер., когда 4 реш. существует $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Эта прямая l находится в лагер. (2)

Угловой коэф. l_1: $\sin\alpha = \frac{5}{AO_1} = \frac{5\cdot 7}{45} = \frac{7}{9}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$k_{l_1} = tg(90^\circ-\alpha) = ctg\alpha = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

$k_{l_2} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$ (в силу симм. отн. Oy)

$\left[\begin{array}{l} \text{угловой коэф.} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ \text{угловой коэф} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{array}\right.$

значит угловой коэф. l лежит $\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}; \frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$

$-\frac{4\sqrt{2}}{7} < -\frac{5}{6a} < \frac{4\sqrt{2}}{7}$

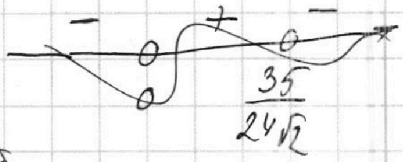
$\left[\begin{array}{l} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{array}\right.$

$\frac{7}{6a}$

$\frac{5}{6a} - \frac{4\sqrt{2}}{7} < 0$, $\frac{35-24\sqrt{2}a}{42a} < 0$

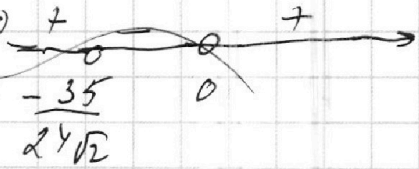
$24\sqrt{2}$

$a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty\right)$



$-\frac{5}{6a} - \frac{4\sqrt{2}}{7} < 0$, $\frac{5}{6a} + \frac{4\sqrt{2}}{7} > 0$

$\frac{35+24\sqrt{2}a}{42a} > 0$



$a \in \left(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \cup (0; +\infty)$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

1) $\log_{11}^4 x - 6\frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{3}(-2)\cdot\frac{1}{\log_{11} x} - 5$ (т.к. $x \in (0;1)\cup(1;+\infty)$) (1)

Пусть $\log_{11} x = t \in R\setminus\{0\}$

$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5 \;/\cdot 3t \neq 0$

$3t^5 - 6\cdot 3 + 2 + 15t = 0$

$f(1) > 0$, $f(0) < 0$ → корень ровно 1

$f(t) = 3t^5 + 15t - 16 = 0 \leftarrow f(t)$ возр., т.к. $3t^5 \uparrow\uparrow$, $15t \uparrow\uparrow$

2) $\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{(0{,}5y)^3}(11^{-13}) - 5$

Пусть $\log_{11}(0{,}5y) = a \in R\setminus\{0\}$:

$a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5 \;/\cdot 3a \neq 0$ (2)

$3a^5 + 3 + 13 + 15a = 0$

$3a^5 + 15a + 16 = 0 = f(a)$ $f_1(a)$ возр., как сумма возраст.

$f_1(a) = f(a)$

$t_0 \in (0;1)$
$a_0 \in [-1;0)$

$f_1(-1) < 0$, $f_1(0) > 0$

корень ровно 1 и лежит на $(-1;0)$

Пусть t_0 – корень (1), a_0 – корень (2)

$+\begin{cases} 3t_0^5 + 15t_0 - 16 = 0 \\ 3a_0^5 + 15a_0 + 16 = 0 \end{cases}$

$3(a_0 + t_0)(a_0^4 - a_0^3 t + a_0^2 t^2 - a_0 t^3 + t^4) + 15(a_0 + t_0) = 0 \;/:3$

$(a_0 + t_0)(a_0^4 - a_0^3 t + a_0^2 t^2 - a_0 t^3 + t^4 + 5) = 0$

$\boxed{a_0 = -t_0}$

$\vee$ 0, т.к. $|a_0| < 1$, $|t_0| < 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11}(0,5y) + \log_{11}x = 0$

$\log_{11}(0,5xy) = 0 \quad 0,5xy = 1, \quad \boxed{xy = 2}$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

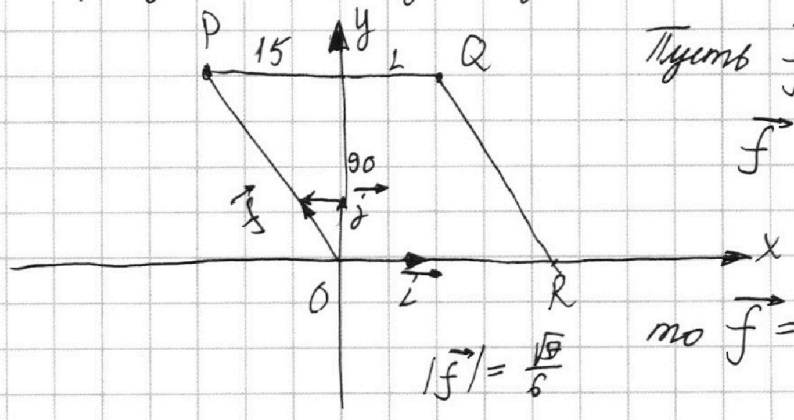
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

Перейдём в косоугольную СК ~~к по~~ Q:



Пусть $\vec{f}$ ~~единичный~~ вектор: у к-рого коорд. по y равна 1

$\vec{f} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$

Тогда, т.к. $\frac{90}{15}=6$

то $\vec{f} = \vec{j} - \frac{1}{6}\vec{i}$

$\vec{j} = \vec{f} + \frac{1}{6}\vec{i}$

$|\vec{f}| = \frac{\sqrt{8}}{6}$

Пусть есть точка с коорд. $(x_1; y_1)$, тогда:

$$x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = x_1\vec{i} + y_1\left(\vec{f} + \frac{1}{6}\vec{i}\right) = y_1\vec{f} + \frac{6x_1+y_1}{6}\vec{i}$$

т.е. в новой системе координат у этой точки коорд. ~~$(y_1;$~~ $\left(\frac{6x_1+y_1}{6}; y_1\right)$

условие: $6x_2+y_2 = 6x_1+y_1+48 \;|:6$

$$\frac{6x_2+y_2}{6} = \frac{6x_1+y_1}{6}+8$$

т.е. надо найти точки, у к-рых абсцисса в новой СК больше другой на 8

Всего точек целых в п-ме: $\begin{cases} 0 \le \frac{6x_1+y_1}{6} \le 17 \\ 0 \le y_1 \le 90 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x_1+y_1 \ge 0 \\ 6x_1+y_1 \le 102 \\ 0 \le y_1 \le 90 \end{cases}$

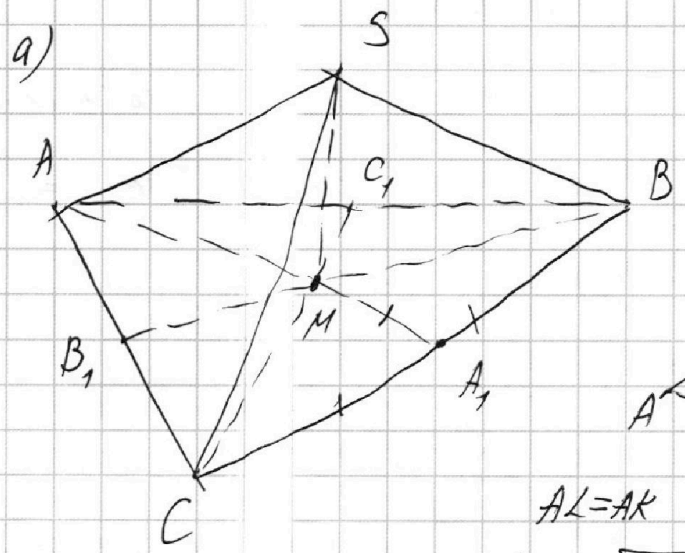
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

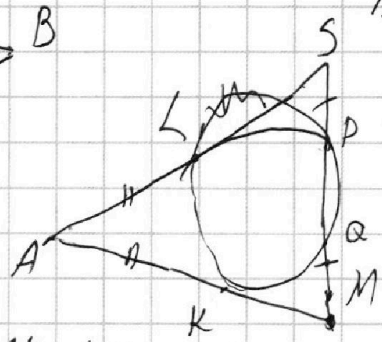
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

а)



1) рассм. ту пл-сть (ASM)



$\angle KPQ$ – впис. пусть НУО P м/у S, Q т.к. $SB \parallel MQ$

$AL = AK$ как кас.

$LS = \sqrt{SP \cdot SQ}$, т.к. SL – кас.

$KM = \sqrt{MQ \cdot MP}$, т.к. MK – кас.

$AS = AM = 20$

2) $AM : MA_1 = 2:1 \rightarrow MA_1 = \frac{20}{2} = 10 = \frac{BC}{2} \rightarrow \angle CMB = 90^\circ$

по св-ву мед. MA_1 – мед. $\triangle CMB$

3) $\frac{S_{CMB}}{S_{ABC}} = \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{1}{3}$ (общ. осн. BC, а выс. отн. как по св-ву медиан $MA_1 : AA_1$)

$S_{CMB} = 60 \rightarrow CM \cdot MB = 120$

$\frac{4}{9} \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 120$

$CC_1 \cdot BB_1 = \frac{9 \cdot 120}{4} = 270$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 270 \cdot 30 = 8100$

Ответ: а) 8100

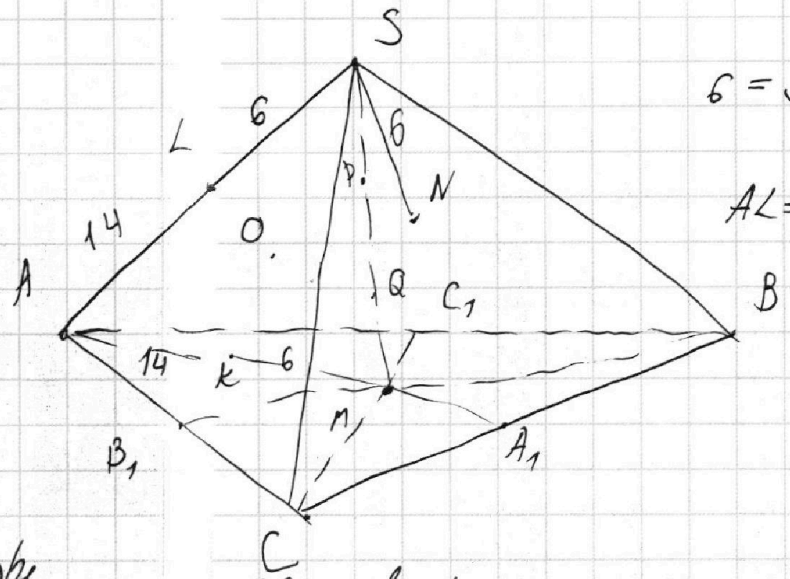
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

б.)



$6 = SN = SL$ как касат.

$AL = AS - LS = 14$
$\parallel$
AK
как касат.

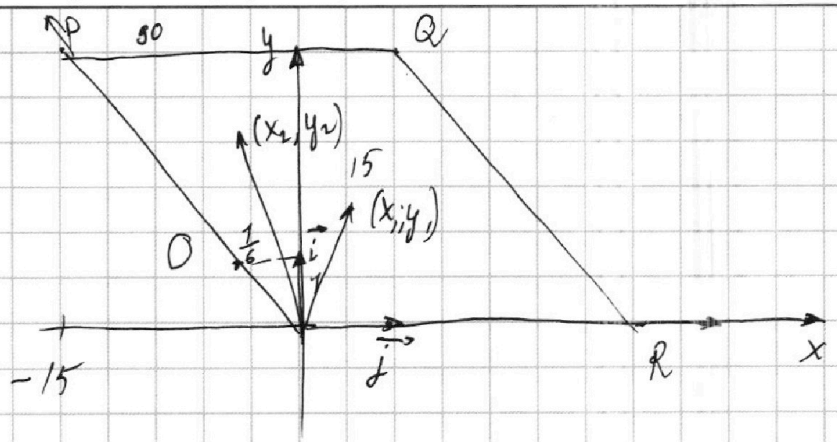
Двугр. угол при BC равен углу между прямыми ON, OK

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{90}{15} = \frac{30}{5} = 6$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$$\vec{x} = \vec{i} + \frac{1}{6}\vec{j}$$

$$\vec{i} = \vec{x} + \frac{1}{6}\vec{j}$$

$$6x_2 + y_2 = 6x_1 + y_1 + 48$$

$$x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = x_1 - \frac{1}{6}x_1$$

$$\cancel{(x_1 - \frac{1}{6}y_1)}$$

$$x_1\vec{x} + \frac{1}{6}x_1\vec{j} + y_1\vec{j}$$

$$\cancel{x_1}$$

$$(x_1; y_1) \to (x_1; \frac{1}{6}x_1 + y_1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

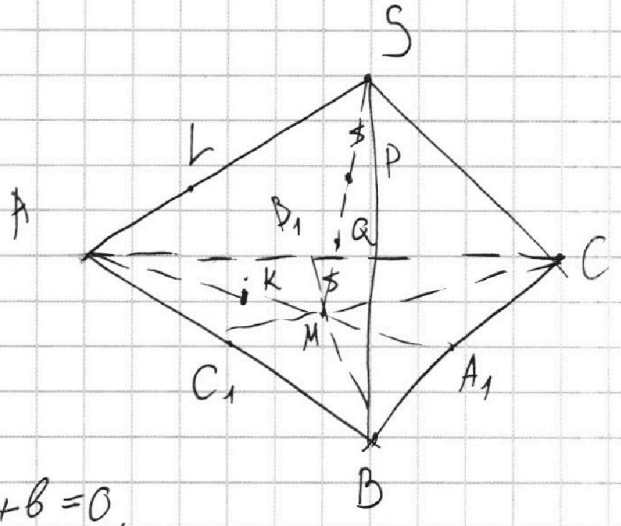
МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



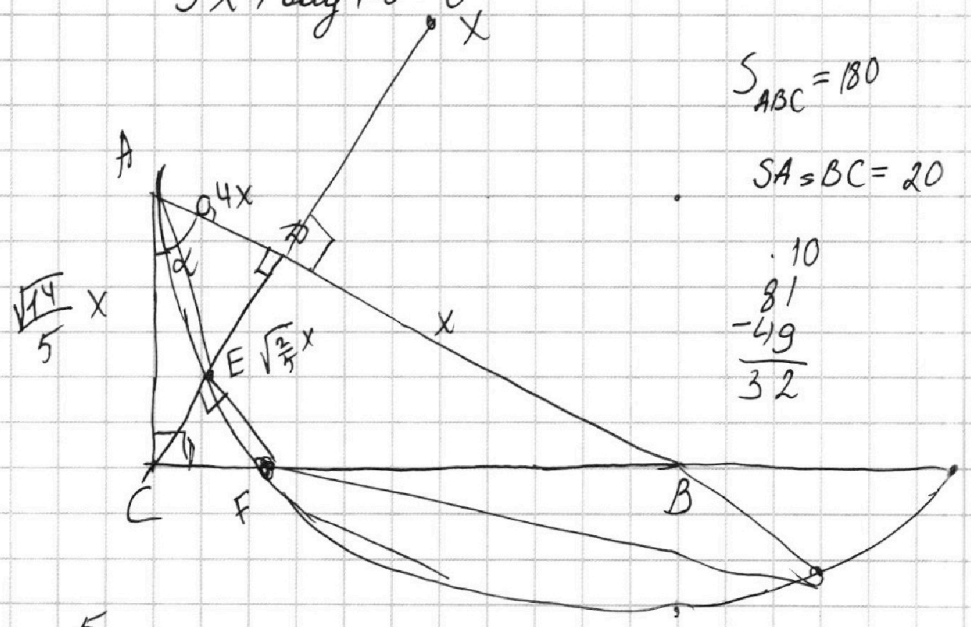
4 реш.

$5x + 6ay + b = 0$

$S_{ABC} = 180$

$SA = BC = 20$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 81 \\ -49 \\ \hline 32 \end{array}$$



5

$$\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{25}x^2 = \frac{14}{25}x^2$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}/\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{14}}{5}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

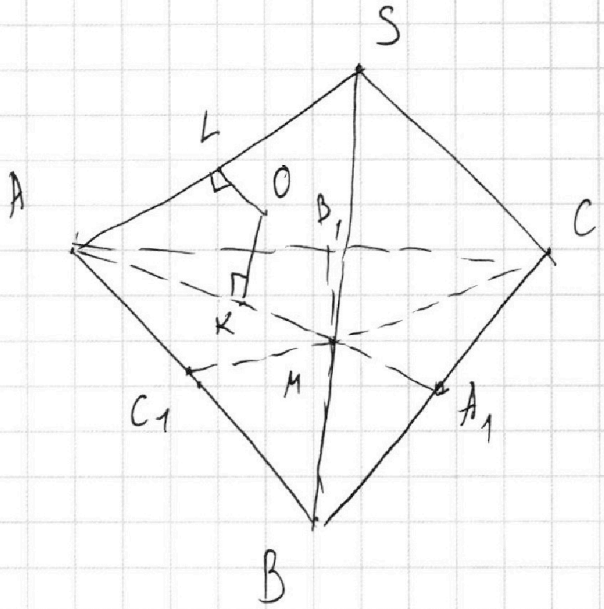
$$2R\sqrt{\frac{2}{7}} - EF = 0{,}8x$$

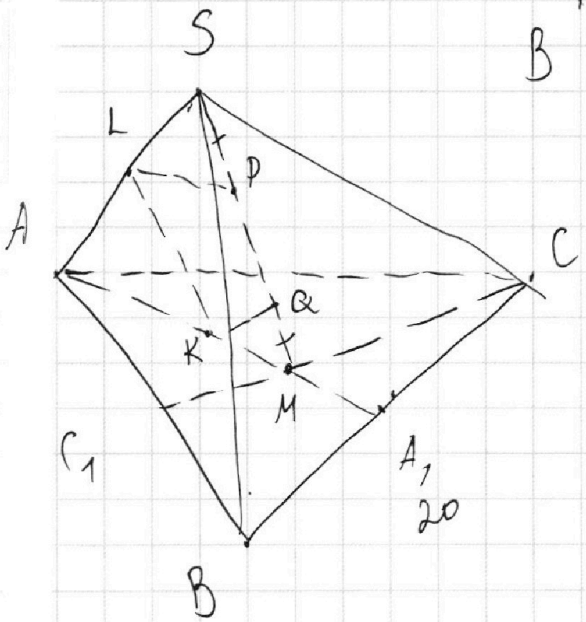
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

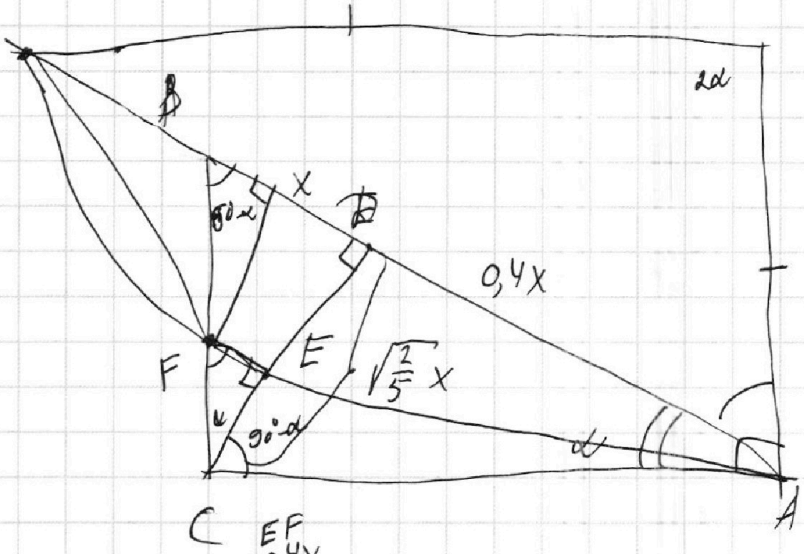
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^{14}$

$c = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14}$

$b = 2^2 \cdot 3^5$



$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ - ?

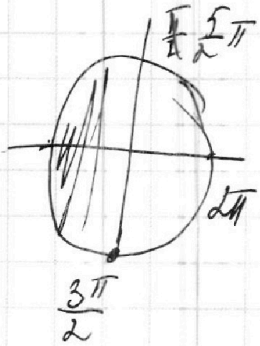
$0{,}4x = \frac{y - 0{,}4x}{2}$ $AB \parallel EF$

$AB : BD = 1{,}4$

$\frac{CD}{x} = \frac{0{,}4x}{CD}$

$CD^2 = 0{,}4x^2 = \frac{2}{5}$

$CD = \sqrt{\frac{2}{5}}x$



$-\frac{7\pi}{2} \le -x \le -\frac{5\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \le \pi - x \le -\frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{2} \le -x \le -\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x$

$5\pi - 10\arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$

$2x - 4\pi = 10\arcsin(\sin x)$

$x - 2\pi = 5\arcsin(\sin x)$

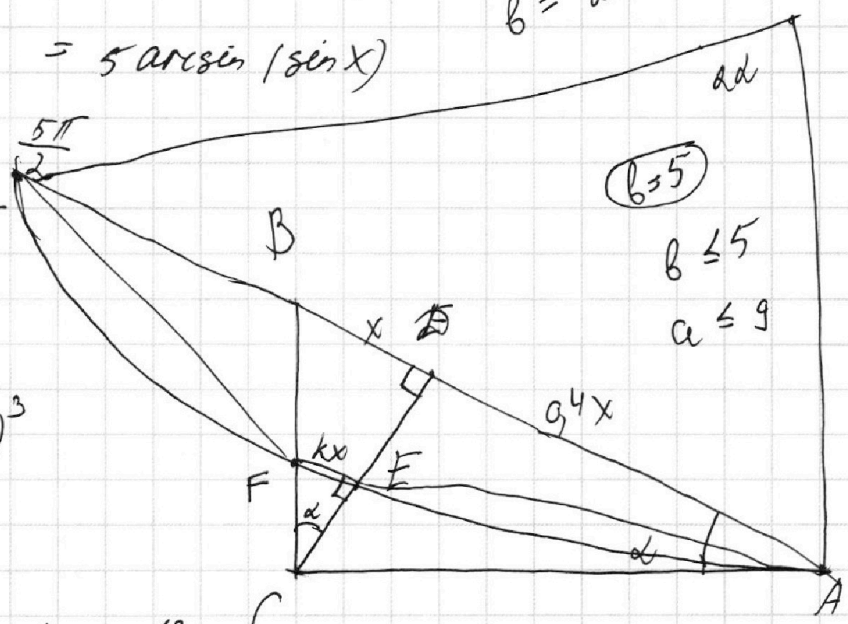
$-\frac{5\pi}{2} \le x - 2\pi \le \frac{5\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9\pi}{2}$

$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

$a = 2^{7} \cdot 3^{8} \cdot 5^{14}$

$b = 2^{4} \cdot 3^{5}$



$(b=5)$

$b \le 5$

$a \le 9$

$(9,5y)^3$

$t^4 \quad a^4 + \frac{1}{a} = \frac{-13}{3a} + -5$

$a^5 + 1 + \frac{13}{3} + 5a = 0$

$a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$

корень единств.

$(a^5 + t^5)$

$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{t} - 5$

$t^4 - \frac{6}{t} + \frac{5}{t} + 5 = 0$

$t^4 - \frac{1}{t} + 5 = 0$

$t^5 + 5t - 1 = 0$

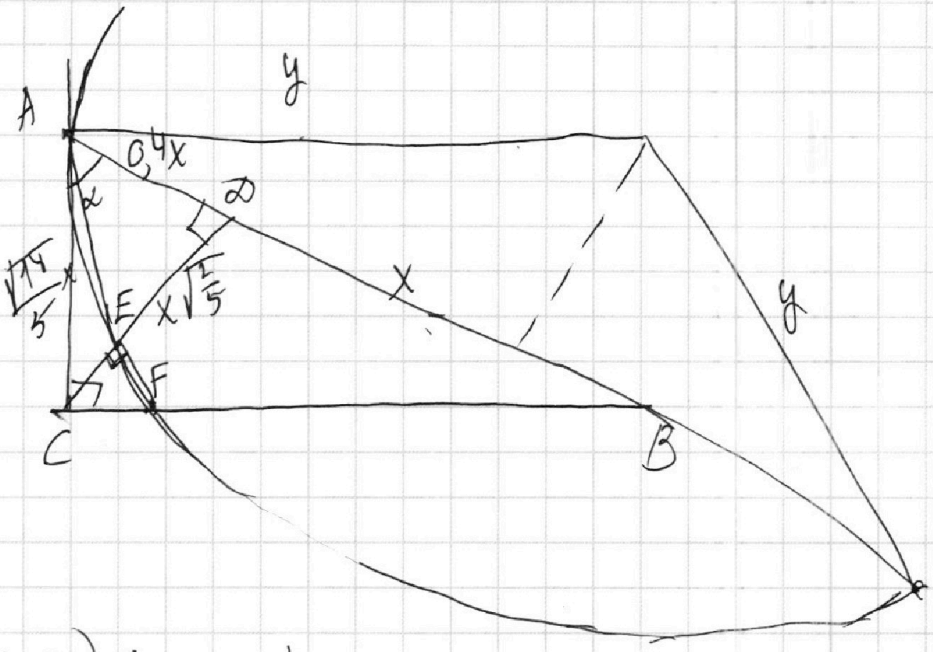
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{4}{24} + \frac{2}{5} = \frac{14}{25}$



$2y\cos(90^\circ-\alpha) =$

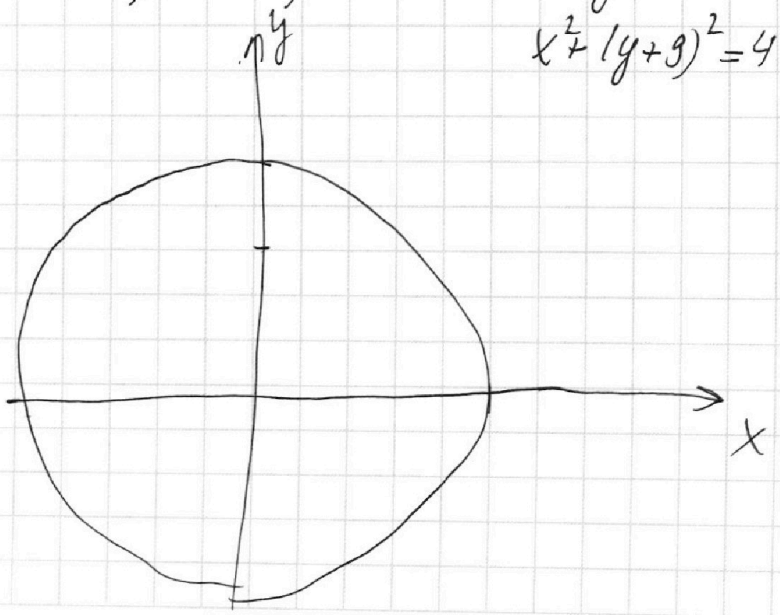
$= 2y\sin\alpha = 2y\sqrt{\frac{5}{7}}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{\frac{\sqrt{14}}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{25}{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$

равно 4 см.

$x^2+y^2=25$

$x^2+(y+3)^2=4$



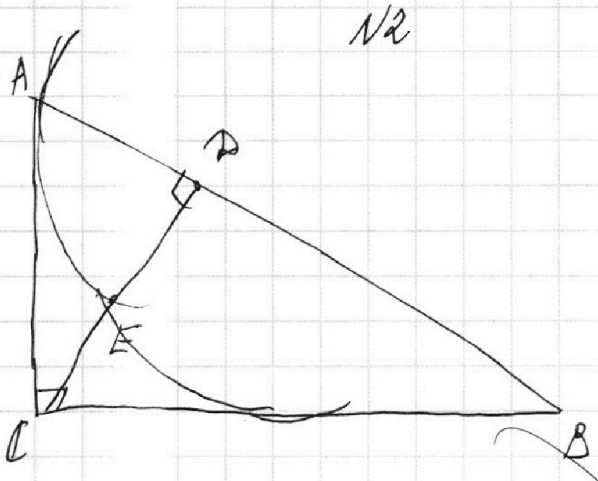
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

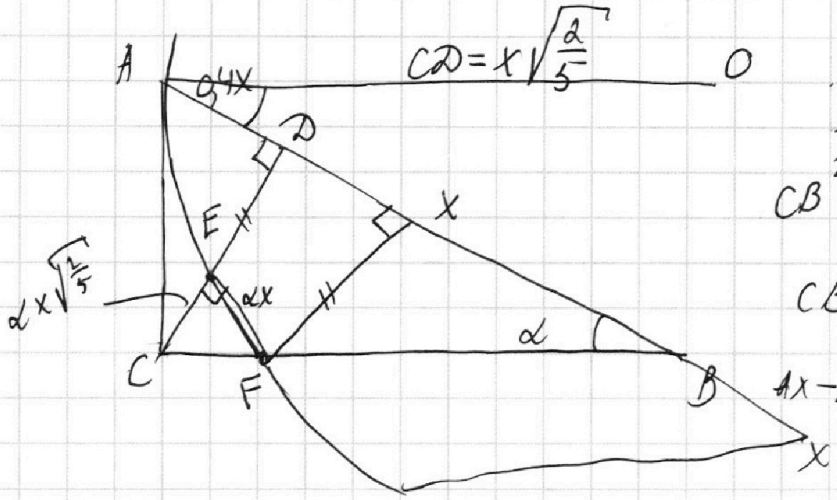


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$AB \parallel EF$

$CB^2 = \left(\frac{2}{5}+1\right)x^2$

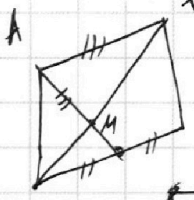
$CB = \sqrt{\frac{7}{5}}\,x$

$AX - EF = 0{,}8x$

$AX = (\alpha + 0{,}8)x$

$$\frac{1}{2}x \cdot x\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}\alpha^2 x^2\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha x + x}{1}\left(x\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\cdot(1-\alpha)$$

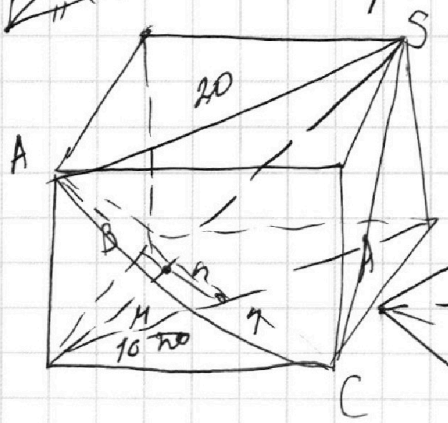
$$5x^2\sqrt{\frac{2}{5}} = \alpha^2 x^2\sqrt{\frac{2}{5}} + x^2\sqrt{\frac{2}{5}}\,(1-\alpha^2)$$

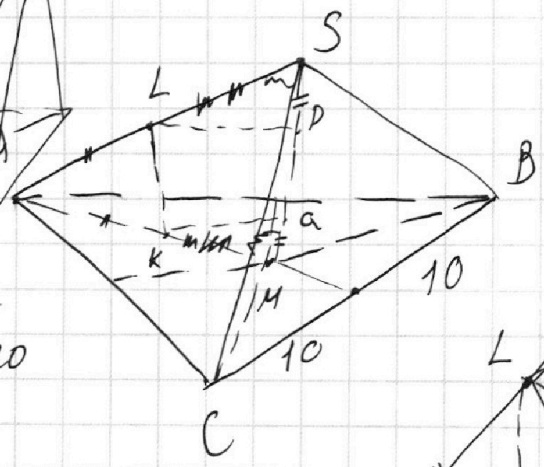


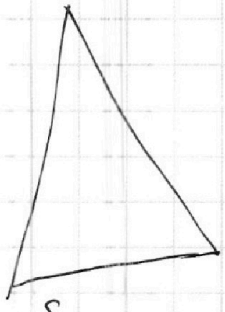
$\cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}$

$2R\cdot\sqrt{\frac{5}{7}} = (\alpha + 0{,}8)x$

$R = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{7}{5}}\,(\alpha + 0{,}8)x$



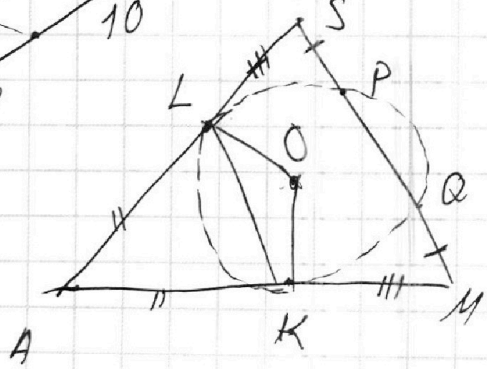




$\frac{2}{3}AA_1 = AM = BC = 20$

$AA_1 = \frac{60}{2} = 30$

$AS = AM$

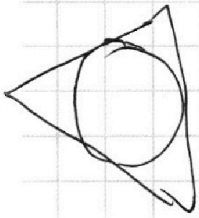


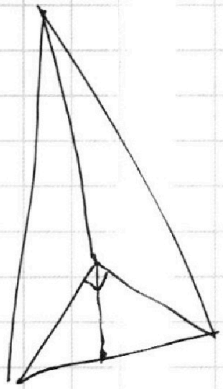
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

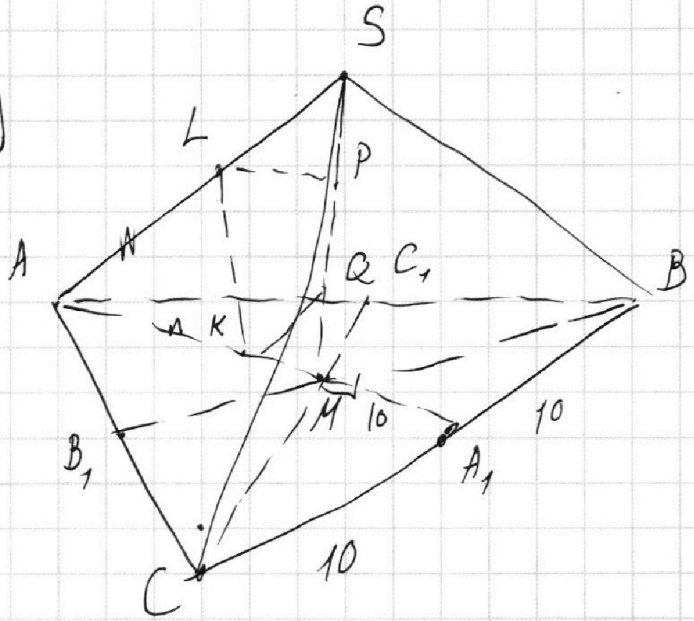
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



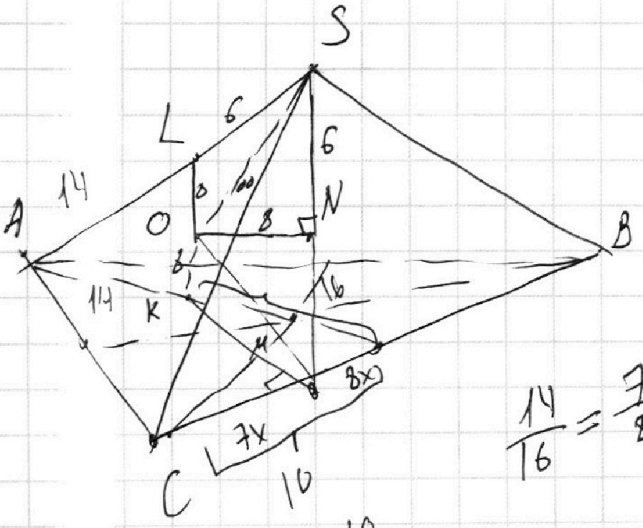




$36+64=100$

$AS=AM=20$

$\frac{2}{3}AA_1 \to AA_1=\overset{30}{\cancel{40}}$



$R_{сф}=8$

$\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$

$15x=10$

$x=\frac{2}{3}$