



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{cases}$$

Пусть $abc = 2^x 3^y 5^z t$ где x, y, z, t - натур. числа.
 $t \not\equiv 2, t \not\equiv 3, t \not\equiv 5$.

С одной стороны, $abc: ab, bc, ac \Rightarrow abc$ делится на
каждое из чисел $2^6 3^{13} 5^{11}, 2^{14} 3^{21} 5^{13}, 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

Откуда $x \geq 16, y \geq 25, z \geq 28$.

С другой стороны, перемножив делимости, получили

$$a^2 b^2 c^2: 2^{36} 3^{59} 5^{52} \quad \text{Откуда} \quad 2x \geq 36 \quad 2y \geq 59 \quad 2z \geq 52 \\ \Rightarrow x \geq 18 \quad y \geq 30 \quad z \geq 26$$

Объединяя ограничения, получили

$x \geq 18 \quad y \geq 30 \quad z \geq 28$. Число $t \geq 1$, поэтому взяв наименьш.

x, y, z, t , получили ^{Возможное} наименьшее $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$,

которое достигается при

$$\begin{cases} a = 2^4 3^8 5^{15} \\ b = 2^2 3^5 \\ c = 2^{12} 3^{17} 5^{13} \end{cases}$$

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

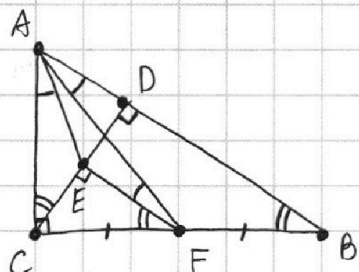
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Поймем, что LC - прямой и нарисуем чертёж. Из $EF \parallel AB$ следует $\angle ABC = \angle CFE$. Высота CD к гипотенузе делит $\triangle ABC$ на 2 подобных, ^{ЕМУ} поэтому $\angle ACD = \angle ABC$ из $AB \perp CD$ следует $EF \perp CD$

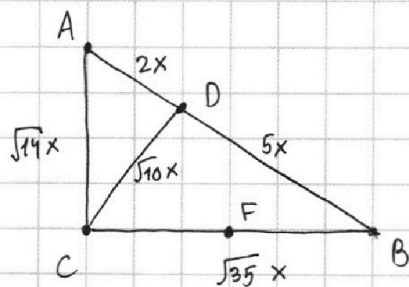
Откуда $\angle CDE$ и $\angle CEF$ подобны по 2-м углам, и ответ на задачу: $\left(\frac{AC}{CF}\right)^2$. $\angle CAE = \angle EFA$ т.к. оба опираются на одну ~~и~~ дугу окр-сти AE ($\angle EFA$ - вписанный, $\angle CAE$ - угол между касательной и хордой). $\angle EFA = \angle FAB$ из параллельности $EF \parallel AB$.

Из подобия $\triangle CEA$ и $\triangle AFB$ по двум углам следует $\frac{CE}{AC} = \frac{BF}{AB}$

Из подобия ACD и ABC следует $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC}$. Перемножив

получим $\frac{CE}{CD} = \frac{BF}{BC}$. Но $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BC}$ из Т. Фалеса (или подобия $\triangle CEF$ и $\triangle CDB$)

Значит $BF = CF$ т.е. F - середина BC .



Пусть $AD = 2x$. Из $\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$

сложим $\frac{AD+BD}{BD} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow BD = 5x$

Из подобия $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$: $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$

$$\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD = 10 \times^2 \Rightarrow CD = \sqrt{10} \times$$

$\frac{1}{2}$ T. Туганова $AC = \sqrt{14} \times$ $BC = \sqrt{35} \times$. $\frac{1}{2}$ $BF = FC$ аягы

$$CF = BF = \frac{1}{2} BC = \sqrt{\frac{35}{4}} \times. \text{ Omroeg } \left(\frac{AC}{CF} \right)^2 = \frac{AC^2}{CF^2} = \frac{14 \times^2}{(35/4) \times^2} = \frac{56}{35} = \frac{8}{5}$$

Omben: 8:5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc: 2^{19} 3^{21} 5^{13} \\ ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{cases}$$

ПЕРЕМНОЖИМ
ВЕЛИЧИНОСТИ

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{36} 3^{59} 5^{52}$$

ГДЕ x, y, z, t - НАТУРАЛЬНЫЕ

если $abc = 2^x 3^y 5^z t$, то необходимо, чтобы выполнялось

$$\begin{cases} 2x \geq 36 \\ 2y \geq 59 \\ 2z \geq 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 18 \\ y \geq 30 \\ z \geq 26 \end{cases}$$

Беря наименьшие x, y, z, t получаем
наименьшее abc

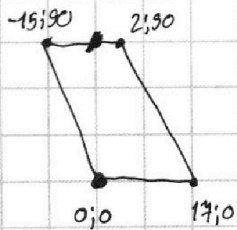
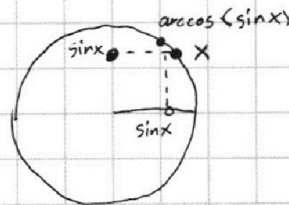
$$abc = 2^{18} 3^{30} 5^{26} \quad abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^4 3^8 5^{15} \\ b &= 2^2 3^5 5^{11} \\ c &= 2^{12} 3^{17} 5^{13} \end{aligned}$$

$$\log_{11} x = a \quad \log_{11} y = b$$

$$a^4 - \frac{6}{a} =$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay = b \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{то } \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$



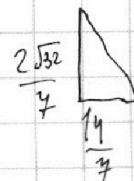
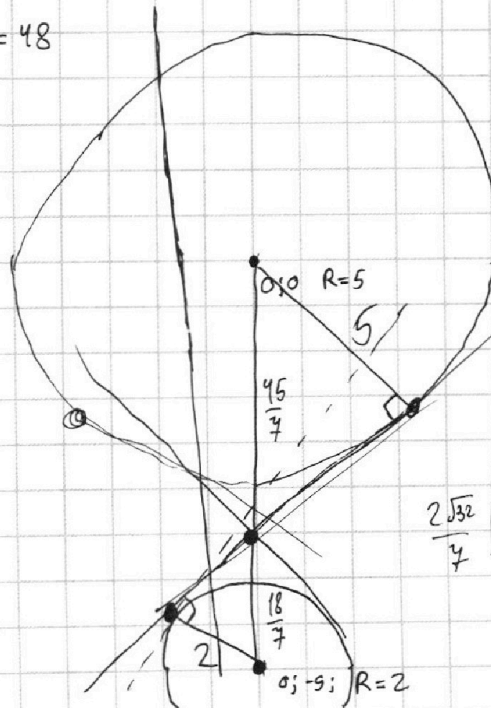
$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6\Delta x + \Delta y = 48$$

$$\Delta y : 6$$

$$y = \frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\Delta x \quad \Delta y = \begin{aligned} &17; -9 \\ &0; 48 \\ &-1; 54 \\ &-2; 60 \\ &-3; 66 \\ &-4; 72 \\ &-5; 78 \\ &-6; 84 \\ &-7; 90 \end{aligned}$$



$$\frac{81}{32}$$

$$\sqrt{32} \quad 9$$

$$4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $x \in [2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$ (т.е. лежит на правой полуокр-сти
прим. окр-сти).

Тогда $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n)$



и уравнение принимает вид

$$10\left(\frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n)\right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 20\pi n - 4\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2}\pi n - \frac{1}{2}\pi. \text{ С учётом принадлежности отрезку}$$

$$2\pi n - \frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi n - \frac{1}{2}\pi \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi n \leq \frac{5}{2}\pi n \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2n \leq \frac{5}{2}n \leq 2n + \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}n \geq 0 \\ \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}n \end{cases} \Rightarrow 0 \leq n \leq 1 \quad \begin{matrix} \text{т.е. есть} \\ \text{решения} \end{matrix}$$

$$-\frac{\pi}{2}; 2\pi$$

Если же $x \in [2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}]$, то

$$\arccos(\sin x) = (x - 2\pi n) - \frac{\pi}{2} \text{ и}$$

$$10\left(x - 2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 10x - 20\pi n - 5\pi = 9\pi - 2x \Rightarrow 12x = 14\pi + 20\pi n$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n. \text{ С учётом принадлежности отрезку:}$$

$$2\pi n + \frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n \leq 2\pi n + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 12\pi n + 3\pi \leq 7\pi + 10\pi n \leq 12\pi n + 9\pi$$

$$\Rightarrow 12n + 3 \leq 10n + 7 \leq 12n + 9 \Rightarrow \begin{cases} 2n \leq 4 \\ 2n \geq -2 \end{cases} \Rightarrow n = -1, 0, 1, 2$$

Это даёт решения $-\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$.

В объединении получаем 5 решений: $-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

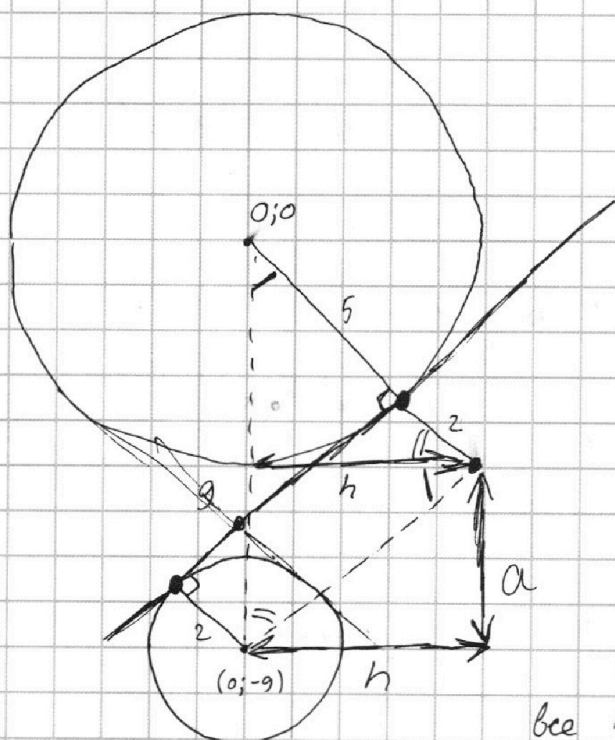
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Нарисуем на графике x, y все решения $(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$

Равносильно $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$, то есть это 2 окружности.

Одна имеет центр $0;0$ и радиус 5. Другая имеет центр $(0;-9)$ и радиус 2. Найдём уравнения внутренних касательных.



$$9^2 - 7^2 = 81 - 49 = 32 \rightarrow 4\sqrt{2}$$

$$h = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{9} = \frac{28\sqrt{2}}{9}$$

$$a = \frac{28\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9}{4} = 4\sqrt{2}$$

Получаем, что одна касательная имеет вид

$$y = \frac{9}{4}x + b, \text{ а другая}$$

$$y = -\frac{9}{4}x + b \text{ (симметрия.)}$$

$5x + 6ay - b$ - прямая. При фикс. a все прямые будут параллельны.

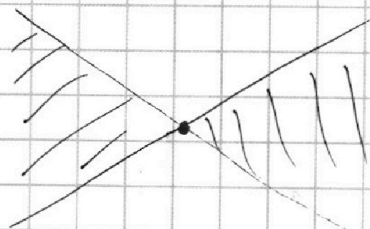
Проведём одну из них через точку пересечения внут. касательных.

Если прямая проходит через эту внутрен. область, то она не может пересечь обе окр-сти в 2-х точках (при любом параллельном сдвиге) иначе может.

при $a=0$ прямая вертикальная. ✓
иначе делим на $6a$: $y = -\frac{5}{6a}x + b'$ где $b' = b/6a$ принимает любое знач.

Необходимо $\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{9}{4} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \text{ и } -35 < 54a \\ a > 0 \text{ и } -35 > -54a \end{cases}$

Ответ: $-\frac{35}{54} < a < \frac{35}{54}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если обозначить $\log_{11} x = a$ $\log_{11} (0,54) = b$

То первое равенство переписывается как

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \Rightarrow a^4 + 5 = \frac{18}{3a} - \frac{2}{3a} \Rightarrow a^4 + 5 = \frac{16}{3a}$$

поскольку $a \neq 0$, домножим на $3a$: $3a^5 + 15a = 16$

Второе равенство переписывается как

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \Rightarrow b^4 + 5 = -\frac{1}{b} - \frac{13}{3b} \Rightarrow b^4 + 5 = -\frac{16}{3b}$$

поскольку $b \neq 0$, домножим на $3b$: $3b^5 + 15b = -16$

Пусть $f(x) = 3x^5 + 15x$. $f(x)$ монотонно и неограниченно

растёт, поэтому $f(x) = c$ имеет ровно 1 решение

при любом значении c . Значит $\begin{cases} 3a^5 + 15a = 16 \\ 3b^5 + 15b = -16 \end{cases}$

обладает единственным решением (a, b) . Обозначим

его за (a_1, b_1) т.е. $f(a_1) = 16$, $f(b_1) = -16$.

Кроме того, $f(x)$ нечётна, поэтому $f(a_1) = 16 \Rightarrow f(-a_1) =$

$= -16$. Отсюда $-a_1 = b_1$ ввиду единственности решения

$f(x) = c$. Итак, $-a_1 = b_1 \Rightarrow a_1 + b_1 = 0$ т.е. $a + b$ может быть

равно только 0. Значит $\log_{11} x + \log_{11} 0,54 = 0 = \log_{11} 0,5 \times 4$

Откуда $0,5 \times 4 = 1 \Rightarrow xy = 2$

Ответ: 2

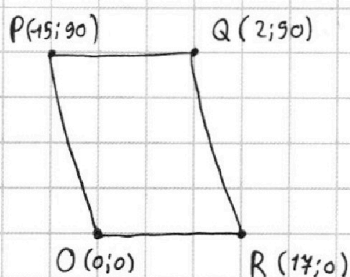
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Параллелограмм образуется прямыми
вида $y = b$ и $y = -6x + b$.

Лемма: если точка $M = (x, y)$ лежит
внутри параллелограмма и $0 \leq y - 6x \leq 90$,
то точка $N(x+k, y-6k)$ тоже лежит
в нём. Док-во: прямая MN имеет вид
 $y = -6x + b$ и не может пересечь (пройти сквозь)

боковые стороны. По ограниченности на $y - 6x$ прямая MN не
может пройти сквозь горизонтальные стороны. Значит MN
внутри параллелограмма.

$$0 \leq y_1 \leq 90$$

Закфиксируем y_1 и посчитаем, сколько ^{пар} точек (A, B) подходит.

Пусть $A_1 = (x_1; y_1)$. Тогда подходящие точки B имеют
вид $(x_1 + 8 + k; y_1 - 6k)$, остается проверить, что обе точки лежат
внутри.

$x_1 \geq -\frac{y_1}{6}$ т.к. иначе A лежит левее прямой PO . Если
точка $B_1 = (x_1 + 8; y_1)$ ^{приходящая} лежит правее QR (т.е. вне паралле-
ла), то по лемме ни одна точка B не внутри, а тоже снаружи.

$$\text{Значит нужно одновременное } -\frac{y_1}{6} \leq x_1 \leq 9 - \frac{y_1}{6} \Rightarrow 0 \leq x_1 + \frac{y_1}{6} \leq 9$$

Если $y_1 \div 6$, то есть 10 значений x_1 , иначе их 9.
Далее, из леммы подходящей точке B достаточно $0 \leq y_1 - 6k \leq 90$
 $\Rightarrow 0 \leq \frac{y_1}{6} - k \leq 15$. Если $y_1 \div 6$, то есть 16 значений k , иначе
их 15. По x_1 и k восстанавливается пара $(A; B)$. Итак,
если

$$y_1 \div 6, \text{ то есть } 10 \cdot 16 \text{ пар } (A; B), \text{ иначе есть } 9 \cdot 15 = 135 \text{ пар } (A; B).$$

Среди $0 \leq y_1 \leq 90$ есть 16 значений y_1 , кратных 6, и
75 не кратных. Значит всего подходящих пар

$$16 \cdot 160 + 75 \cdot 135 = 2560 + 10125 = 12685$$

Ответ: 12685 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

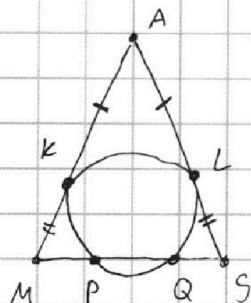
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Посмотрим на сечение сферы плоскостью AMS .



Сфера касается AS и ABC , поэтому
окр-сть касается AM и AS , откуда $AK = AL$

Из $SP = MQ$ следует $SQ = MP$, поэтому

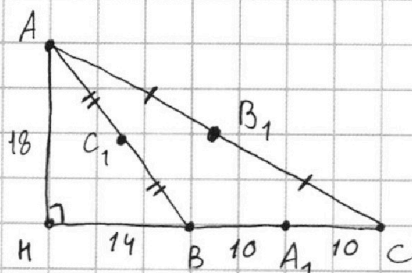
$$MK^2 = MP \cdot MQ = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow MK = SL.$$

$$\text{Отсюда } AM = AS = 20 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30.$$

Посмотрим на основание ABC . Высота AH равна
 $180 \cdot 2 : 20 = 18$ (по формуле $S = \frac{ah}{2} \rightarrow h = 2S/a$)

$$\text{По т. Пифагора } A_1H^2 = AA_1^2 - AH^2 = 30^2 - 18^2 = 24^2 \Rightarrow A_1H = 24.$$

Зная, что $BA_1 = A_1C = BC/2 = 10$, нарисуем ээртёт.



Проекции C_1 и B_1 на прямую BC
падают в середине BH и CH
соответственно.

$$\text{Отсюда } BB_1^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$$

$$CC_1^2 = 24^2 + 9^2 = 3^2 \cdot (9^2 + 3^2) = 9 \cdot 90 = 810$$

$$\text{Отсюда } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot \sqrt{90} \cdot 3\sqrt{90} = 90^2 = 8100$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



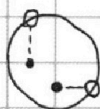
$$x \in [2\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$



$$x \in [2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$$



$$x \in [2\pi n + \pi; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow$$



$$x \in [2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$



$$x \in [2\pi n + \pi - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$$

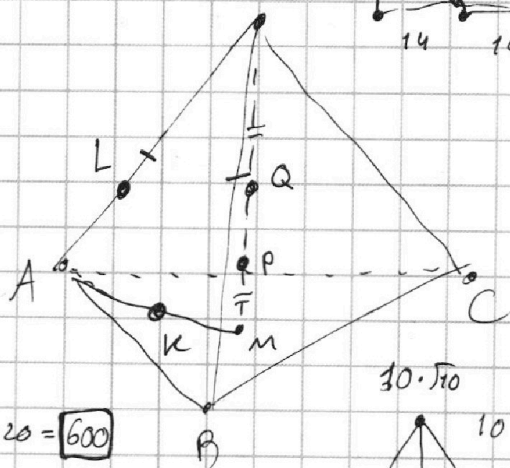
$$10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x \Rightarrow 10x - 5\pi = 9\pi - 2x \Rightarrow 12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{14}{12}\pi$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \Rightarrow 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

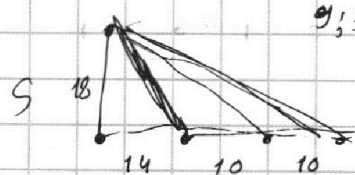
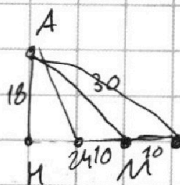
$$10(x -$$

Пункт а)

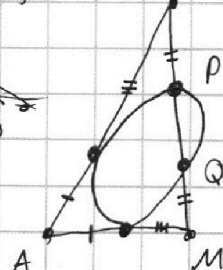
N7



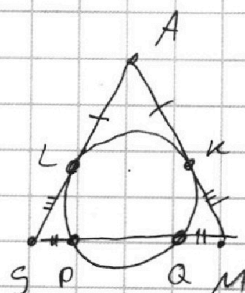
$$30 \cdot 20 = 600$$



27, 9
9, 3



AM=20!



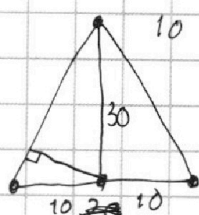
$$20 = SA = BC = AM$$

$$BC = 20$$

$$AA' = 30$$

$$180$$

$$30 \cdot \sqrt{10}$$



$$\frac{30}{\sqrt{10}} = 3 \cdot \sqrt{10} \quad 6 \cdot \sqrt{10}!$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

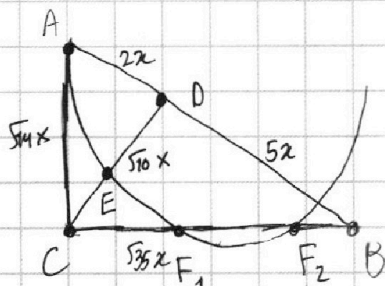
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



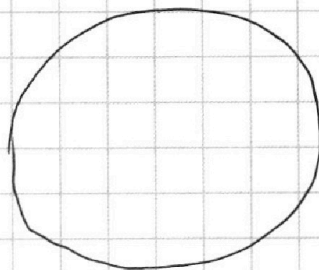
$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \quad bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \quad ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

$$34+25=59 \quad 24+28=52$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} 3^{59} 5^{52} \Rightarrow abc: 2^{18} 3^{30} 5^{26}$$



$$\frac{AB}{BD} = \frac{4}{5}$$



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 10(\pi - \arcsin(\sin x)) = 9\pi - 2x$$

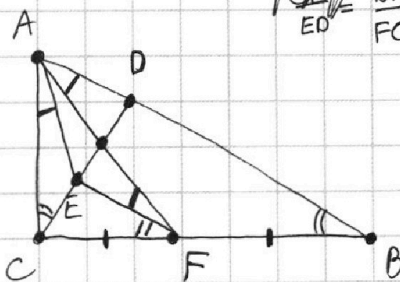
$$\pi = 10\arcsin(\sin x) - 2x$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow F \text{ — сеп.}$$

$$a = 2^4 3^8 5^5$$

$$b = 2^2 3^5 5^{15}$$

$$c = 2^{12} 3^{14} 5^{15}$$



$$\log_{11} x = a$$

$$\log_{11} x^3 = 3a$$

$$\log_{x^3} 11 = \frac{1}{3a}$$

$$\log_{x^3} \frac{1}{121} = -\frac{2}{3a}$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5$$

$$a^4 = \frac{18-2}{3a} - 5$$

$$a^4 = \frac{16}{3a} - 5 \quad a \neq 0$$

$$3a^5 = 16 - 15a$$

$$3a^5 + 15a = 16$$

$$a+b=0$$

$$\Rightarrow x \neq y$$

$$\log_{11} 0,5xy = 0$$

$$xy=2$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{36} - 5$$

$$\log_{11} 4 = b \quad f(a_1) = 16 \Rightarrow f(-a_1) = -16$$

$$\log_{11} 0,54 = b$$

$$f(b_1) = -16$$

$$\log_{0,54} 11 = \frac{1}{b}$$

$$\log_{11} 0,1254^3 = 3b$$

$$b_1 = -a_1$$

$$\log_{0,1254^3} 11 = \frac{1}{3b}$$

$$\log_{0,1254^3} (11^{-13}) = -\frac{13}{3b}$$

$$b^4 + \frac{13}{3b} + \frac{3}{3b} + 5 = 0$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0$$

$$3b^5 + 15b = -16$$

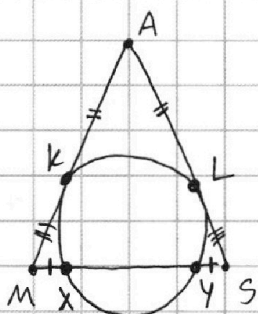
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



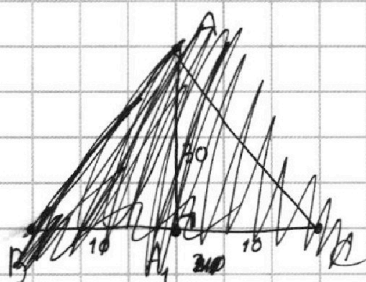
Пусть точки M, P, Q, S идут на
отрезке MS в порядке M, X, Y, S ,
то есть $\begin{cases} P=X \\ Q=Y \end{cases}$ или $\begin{cases} P=Y \\ Q=X \end{cases}$

Из $SP = MQ$ можно получить $SY = MX$
в любом из двух случаев.

Поскольку Ω касается AS и ABC , то сечение Ω
плоскостью AMS будет касаться AM и AS . Сечение -
окр-сть. Из-за касания $AK = AL$. Далее

$$MK^2 = MX \cdot MY = SY \cdot SX = SL^2, \text{ поэтому } MK = SL. \text{ Отсюда } AM = AS = 20.$$

Посмотрим теперь на $\triangle ABC$. $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$, $BC = 20$.



Высота AH в $\triangle ABC$ из формулы $S = \frac{ab}{2}$

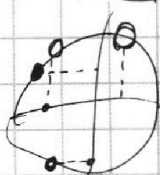
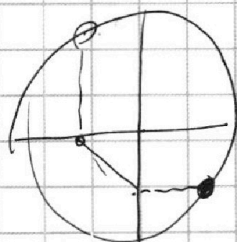
должна быть равна $180 \cdot 2 : 20 = 18$

$$\text{Из т. Пифагора } AH^2 = AA_1^2 - A_1H^2 = 30^2 - 18^2 = 24^2$$

Зная, что $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle$

$$\frac{4\pi}{6} + \frac{10\pi}{6}$$

$$x \in \left[2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n)$$



$$10 \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n - x \right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 5\pi + 20\pi n - 10x = 9\pi - 2x$$

$$4 + 5 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6$$

$$9 \quad 9 \quad 10 \quad 6$$

$$18$$

$$16 \rightarrow 26$$

$$2\pi n - \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} n - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi n \leq \frac{5}{2} \pi n \leq 2\pi n + \pi \quad \frac{\pi n}{2} \leq \pi$$

$$8x = 20\pi n - 4\pi$$

$$x = \frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$x \in \left[2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2} \right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

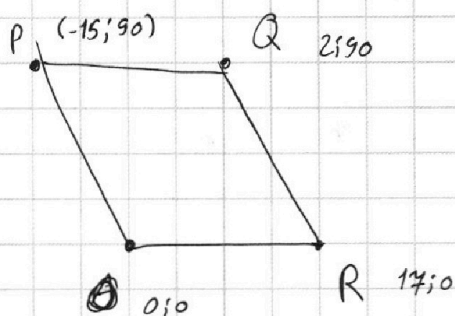
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6\Delta x + \Delta y = 48, \quad \Delta x = 8 \Rightarrow \Delta y = 0 \quad M = (x; y) \quad N = (x+k; y-6k)$$



$$A = (x_1; y_1) \quad B_1 = (x_1 + 8; y_1)$$

$$x_1 \geq -\frac{y_1}{6} \quad x_1 + 8 \leq -\frac{y_1}{6} + 14$$

$$-\frac{y_1}{6} \leq x_1 \leq 9 - \frac{y_1}{6}$$

$$0 \leq x_1 + \frac{y_1}{6} \leq 9 \quad \text{если } y_1 \div 6, \text{ то } 10 x_1 \text{ иначе } 9 x_1$$

$$A = (x_1; y_1) \quad B = (x_1 + 8 + k; y_1 - 6k)$$

$$0 \leq y_1 - 6k \leq 90$$

$$0 \leq y_1 \leq 90 \quad y_1 \div 6 \Rightarrow 15 \text{ ВАР}$$

$$16 \cdot 10 \cdot 16 + 45 \cdot 9 \cdot 15$$

$$2^3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$2^3 \cdot 5 + 3^4 \cdot 5^3$$

$$5 \cdot (2^3 + 3^4 \cdot 5^2) \quad 5 \cdot (512 + 2025)$$

$$16 \cdot 160 = 2560$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ 45 \\ \hline 875 \\ 945 \\ \hline 10125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10125 \\ + 2560 \\ \hline 12685 \end{array}$$

$$0 \leq \frac{y_1}{6} - k \leq 15$$

$$\text{если } y_1 \div 6, \text{ то } 16 \text{ РЕШ}$$

$$16 \text{ РЕШ}$$

$$15 \text{ РЕШ}$$



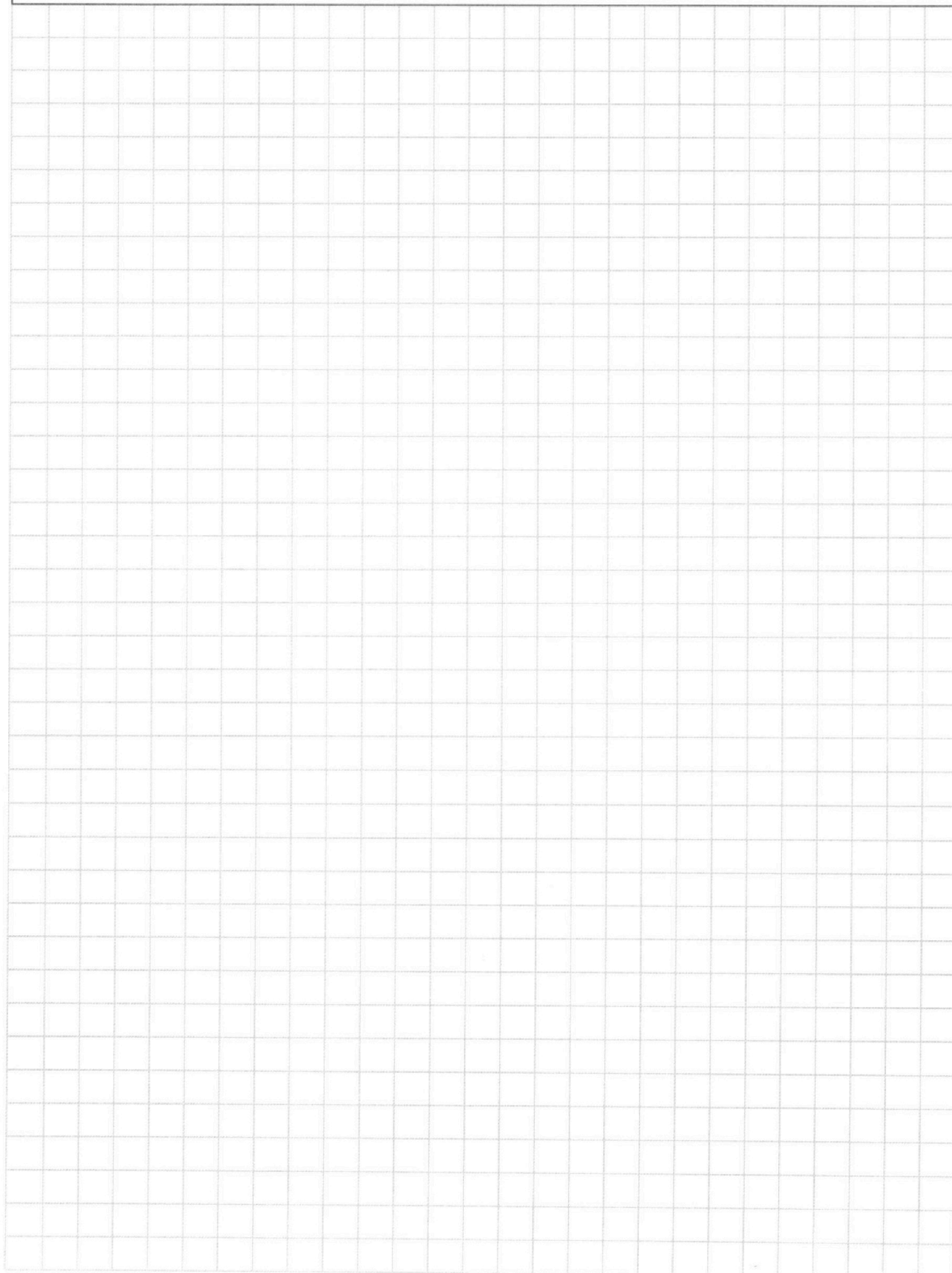
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

