



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 лист 2 реш.

3) Степень двойки:

$$\begin{cases} d_1 + p_1 \geq 8 \\ p_1 + s_1 \geq 12 \\ s_1 + d_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d_1 + 2p_1 + 2s_1 \geq 34 \\ d_1 + p_1 + s_1 \geq 17 \end{cases}$$

4) Аналогично: где тройки:

$$\begin{cases} p_2 + d_2 \geq 14 \\ p_2 + s_2 \geq 20 \\ d_2 + s_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 + p_2 + s_2 \geq \frac{55}{2} \\ \text{с учетом ограничения} \\ d_2 + p_2 + s_2 \geq 28 \end{cases}$$

5) Аналогично где пятёрки

$$\begin{cases} d_3 + p_3 \geq 12 \\ d_3 + s_3 + p_3 \geq 17 \\ d_3 + s_3 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow d_3 + p_3 + s_3 \geq 34$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 имеет 1 реш.

1) Если мы хотим минимизировать $abc \Rightarrow$ по возможности нужно минимизировать каждое из чисел $a, b, c \Rightarrow$ они не содержат делителей кроме 2, 3 и 5.

2) Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$
 $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$
 $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$ ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ при $i=1, 2, 3$)

$\Rightarrow ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3} = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$
 и из условия следует, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12 \end{cases} \quad (1)$$

Аналогично получим системы на bc и ac

$bc: \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 & (2) \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases} \quad ac: \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 & (3) \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$

Произведение $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}$

Учитывая, что α_1 независимо от α_2 и α_3 (и наоборот)

β_1 от β_2 и β_3 (и наоборот) и γ_1 незав. от γ_2 и γ_3 (и наоборот).

Запишем по отдельности условия из систем (1), (2) и (3) на степени двойки, тройки и пятёрки.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 2 из 2 решения

8) Пусть радиус окружн. равен r

$\Rightarrow$ в $\triangle EFM$ по Т. Пифагора:

$$(2r)^2 = EF^2 + FM^2$$

$$EF = CF \cdot \tan \angle ECF = CF \cdot \frac{5x}{10x} = \frac{5}{10} CF$$

9) Система:
$$\begin{cases} 4r^2 = \frac{25}{10} CF^2 + FM^2 \\ CF^2 + CF \cdot FM = 14x^2 \end{cases}$$

10) Соединим EB : $\angle EBC = \frac{1}{2} \angle EB$ (угл. между кас. и хордой)
 $\angle MEB = \frac{1}{2} \angle BM$ (вн. угл.)
 $= \frac{1}{2} (180 - \angle EB)$

$$= 90 - \frac{1}{2} \angle EB = 90 - \angle EBC$$

11) Прямые EF и CB пересекутс в точке N .

Степень т. N : $NB^2 = (CB - NC)^2$
 $= NF \cdot NE = \cancel{NF \cdot NE} \cdot \cos \angle FNE$

В пр/уг $\triangle CNE$: CF - выс. к гип.

$$\Rightarrow CN^2 = NF \cdot NE$$

$$\Rightarrow CN^2 = CB^2 - 2CB \cdot NC + NC^2$$

$$CB^2 - 2CB \cdot NC = 0$$

$$CB - 2NC = 0$$

$$NC = \frac{CB}{2} = \frac{\sqrt{14}x}{2}$$

$\triangle ACB \sim \triangle ECN$ (отсекал прямой || гип.) $\Rightarrow$

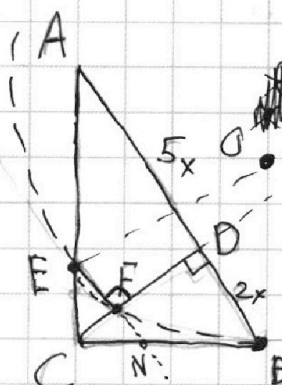
$$\Rightarrow \frac{CN}{CB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow CE = \frac{CN \cdot AC}{CB} = \frac{\frac{\sqrt{14}x}{2} \cdot \sqrt{35}x}{\frac{\sqrt{14}x}{2}} = \frac{\sqrt{35}x}{2}$$

$$\Rightarrow \text{искомое отношение равно } \left(\frac{AB}{CE} \right)^2 = \frac{49x^2 - 4}{35x^2}$$

ОТВЕТ: $\frac{49 \cdot 4}{35}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2 лист 1 решение

- 1) Пусть $AD = 5x$
 $DB = 2x$
 $\Rightarrow AD \cdot DB = \sqrt{10}x = CD$.
- 2) Рассмотрим $\triangle CAD$ и $\triangle ABC$:
 1) $\angle A - \text{общий}$
 2) $\angle CDA = \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle ABC$ по двум углам
 $\Rightarrow \frac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = k_1^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$

3) По т. Пифагора в $\triangle CDB$: $CB = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x$

По т. Пифагора в $\triangle CDA$: $AC = \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$

4) продолжим CD до второго пересечения с окруж. в точке M.

5) $\angle EFA = \angle EFB \Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow$
 $CD \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ рассмотрим $\triangle CEF$ и $\triangle CAD$:

1) $\angle C - \text{общий}$
 2) $\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$ по двум углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = k_2^2 = \left(\frac{CE}{AC}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} \cdot \frac{S_{CEF} S_{ADC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k_1^2 \cdot k_2^2 = \left(\frac{AB}{CE}\right)^2$
 $\Rightarrow \left(\frac{CB}{CE}\right)^2 = \left(\frac{AC}{EF}\right)^2$

6) $\angle EFM = 90^\circ$
 $\angle EFM - \text{впис.} \Rightarrow EM - \text{диаметр.}$

7) Степень точки C относительно окружности равна $CB^2 = CF \cdot CM = (CF + EF) \cdot CF = 14x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



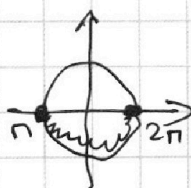
№3 имеет 2 решения

5) При $x \in (0; \pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = x$

$$2x - 10x = -4\pi$$

$$-8x = -4\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ — подходит}$$

6) При $x \in (\pi; 2\pi] \Rightarrow$



$$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x - \pi$$

$$\Rightarrow \text{уравнение:}$$

$$2x - 10(x - \pi) = -4\pi$$

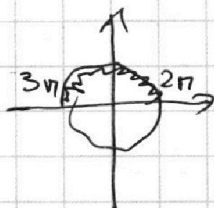
$$-8x + 10\pi = -4\pi$$

$$-8x = -14\pi$$

$$x = \frac{14}{8}\pi \text{ — подходит.}$$

$$\frac{8}{8}\pi \leq x \leq \frac{16}{8}\pi$$

7) При $x \in (2\pi; 3\pi]$:



$$\arccos(\cos x) = x - 2\pi$$

$$2x - 10(x - 2\pi) = -4\pi$$

$$-8x + 20\pi = -4\pi$$

$$x = 3\pi \text{ — подходит.}$$

Ответ: $x \in \{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{14}{8}\pi; 3\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ $\sqrt{3}$ мест 1 решение

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$2x - 10 \arccos(\cos x) = -4\pi$$

2) $0 \leq \arccos(\cos x) \leq \pi$

~~.....~~

$$-10\pi \leq -\arccos(\cos x) \leq 0$$

$$-10\pi + 2x \leq \underbrace{2x - \arccos(\cos x)}_{-4\pi} \leq 2x$$

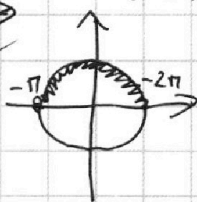
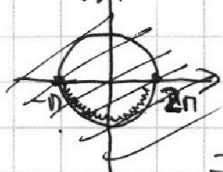
$$\begin{matrix} -10\pi + 2x \leq -4\pi & -4\pi \leq 2x \\ \text{(1)} & \text{(2)} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad -10\pi + 2x &\leq -4\pi \\ -5\pi + x &\leq -2\pi \\ x &\leq 3\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad -4\pi &\leq 2x \\ x &\geq -2\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

3) При $x \in [-2\pi; -\pi]$



$$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x + 2\pi$$

$\Rightarrow$ уравнение:

$$2x - 10(x + 2\pi) = -4\pi$$

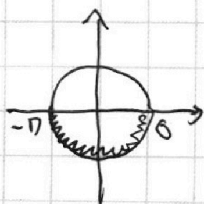
$$-8x - 20\pi = -4\pi$$

$$-8x = 16\pi$$

$$x = -2\pi \in [-2\pi; -\pi]$$

корень подходит

4) При $x \in [-\pi; 0]$:



$$\Rightarrow \arccos(\cos x) = -x$$

$$\Rightarrow 2x + 10x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{12} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\in [-\pi; 0]$$

$\Rightarrow$ корень подходит

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 имеет 3 решения

$$= 16 \cdot \sqrt{\frac{100}{289} + \frac{289}{289}} = \frac{16}{17} \sqrt{389}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} k_2 \subset c_1 = \operatorname{ctg} \theta_2 \subset k_2 = \frac{k_2 c}{k_2 O_2} = \frac{\frac{16}{17} \sqrt{389}}{16} = \frac{\sqrt{389}}{17} = m_1$$

5) Рассмотрим ~~положительные~~ неотрицательные $A \Rightarrow A \in [0; +\infty)$

Если $A < m_1$, то нет таких b ,
чтобы прямая пересекала катодную
из окруж в двух точках.

Если $A = m_1$, то максимум 2 решения
(либо пересек одной окруж в двух
точках, либо касание обеих при $B=C, C = \frac{16}{17}$)

Если $A > m_1$, то найдется такое B ,
что будет 4 точки пересек.

$\Rightarrow$ подходит $A \in (m_1; +\infty)$.
Аналогично для $A \in (-\infty; 0)$ получим

$A \in (-\infty; -m_1)$
(вторая касательная)
имеет такой коэф)
 $\Rightarrow A = \frac{a}{3} \in (-\infty; -\frac{\sqrt{389}}{17}) \cup (\frac{\sqrt{389}}{17}; +\infty)$.

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{389}}{17}) \cup (\frac{3\sqrt{389}}{17}; +\infty)$$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{389}}{17}) \cup (\frac{3\sqrt{389}}{17}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 лист 1 решение

$$1) \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

2) Уравнения решений:

① $x^2 + y^2 - 1 = 0$ или $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ окружность с центром в $O_1(0; 0)$ и $r_1 = \sqrt{1} = 1$

② $x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$

$$x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36$$

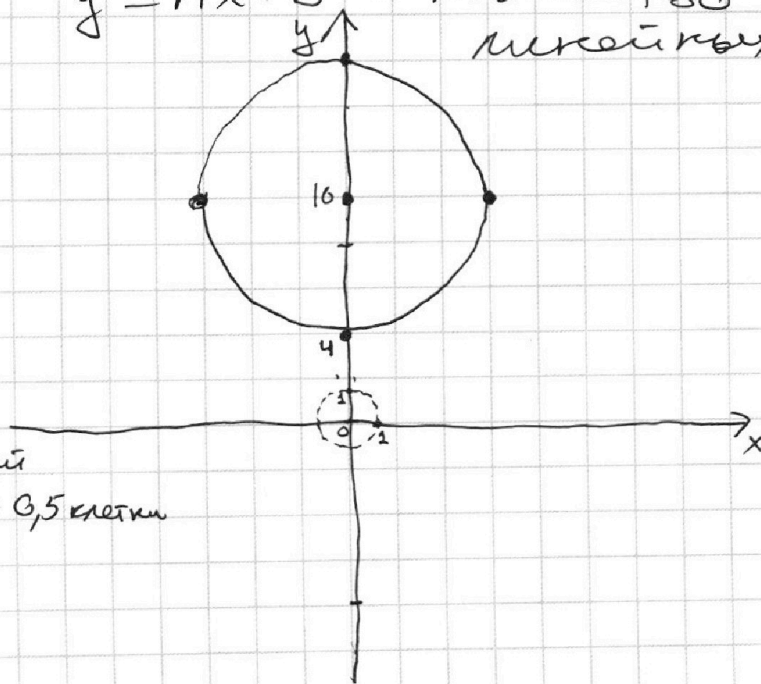
$$x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \Rightarrow \text{окружность } \omega_2 \text{ с центром в } O_2(0; 10) \text{ и радиусом } r_2 = \sqrt{36} = 6$$

③ $ax - 3y + 4b = 0$

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ Замена: $\frac{a}{3} = A$
 $\frac{4}{3}b = B$

$y = Ax + B$ — множество всех линейных функций.

3)

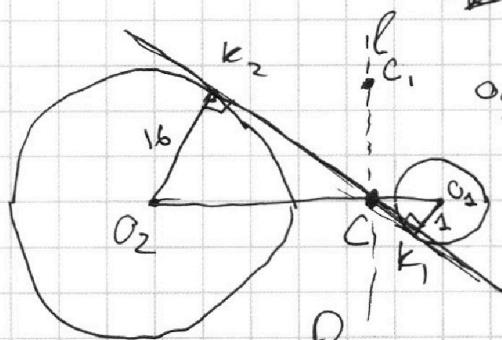


единичный
отрезок = 0,5 клетки

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



№4 лист 2 решение
4) Найдём уравнение касательных
к обеим окружностям пересекающихся
отрезок соединяющий центры.



Заметим, что ~~это~~ это линейная
функция, с
одинаковым свободным
членом и
равными по модулю,
но разными по знаку
коэф. ~~при~~ при x .

Рассмотрим одну такую
касательную (см. чертёж). Назовём
Точки касания K_2 и K_1 , l и $O_1, O_2 \cap l, K_1, K_2 = C$

$\angle O_2CK_2 = \angle O_1CK_1$ (т.к. вертикальные)

$\angle O_2CK_2 = \angle O_1CK_1 = 90^\circ$ (как. ~~функция~~ между радиусом и
точкой кас. и касат.)

$\Rightarrow \triangle O_2CK_2 \sim \triangle O_1CK_1$ (по двум углам)

$\Rightarrow$ коэф. подобия $k = \frac{O_2K_2}{O_1K_1} = \frac{16}{1} = \frac{O_2C}{O_1C}$

Также $O_2C + O_1C = O_2O_1 = 10$

$\Rightarrow O_2C = \frac{16}{17} \cdot 10$ $O_1C = \frac{10}{17}$

г.п. $l \perp O_2O_1 \Rightarrow l \perp Oy \Rightarrow l \parallel Ox$

$\Rightarrow$ ~~угол~~ тангенс угла K_2CC_1
есть коэф. наклона одной из касательных

$\Rightarrow$ он равен $\text{ctg} \angle O_2CK_2$ (т.к. эти углы
в сумме дают $\frac{\pi}{2}$)

$\Rightarrow$ равен $\frac{K_2C}{K_2O_2}$. По т. Пифагора в $\triangle O_2CK_2$

$$K_2C = \sqrt{\left(\frac{160}{17}\right)^2 + 16^2} = 16 \cdot \sqrt{\left(\frac{10}{17}\right)^2 + 1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} - 3 \quad \sqrt[5]{5} \text{ имеет 2 решения}$$

$$\parallel b \neq 0, \quad 3b$$

$$3b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$3b^5 + 9b = -13$$

Аналогично пункту 1

$\Rightarrow 1$ корень по $b \Rightarrow 1$ по y

$$3) \quad a + b = \log_5 x + \log_5 y =$$

$$= \log_5 xy \Rightarrow xy = 5^{a+b}$$

4) Заметим, что $f(a)$ — нечетная функция:

$$f(a) = -3a^5 - 9a = -f(a).$$

$\Rightarrow$ если при $a = A$ функция принимает значение 13, то значение -13 она принимает при $a = -A$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = A \\ b = -A \end{cases} \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow xy = 5^0 = 1$$

угадывая единственность x и y других знат. нет.

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$ №5 имеет 1 решение

ОДЗ: $\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 2x > 0 \\ 8x^3 > 0 \\ 8x^3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \cdot \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 2x} - 3$$

Замечка $\log_5 2x = a$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a} - 3 \quad \| a=0 \text{ не корень} \Rightarrow \cdot 3a$$

$$3a^5 - 9a = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a = 13 \quad \text{Введем } f(a) = 3a^5 + 9a$$

$$f'(a) = 15a^4 + 9$$

$$f'(a) > 0$$

↑
всегда

$\Rightarrow$ слева монотонная функция справа константа

$\Rightarrow 1$ корень по $a \Rightarrow 1$ корень по x

(логарифм
тоже монотонный)

2) $\log_5^4 y + 4 \log_5 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \\ y^3 > 0 \\ y^3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} - 3$$

Замечка $\log_5 y = \frac{1}{b}$

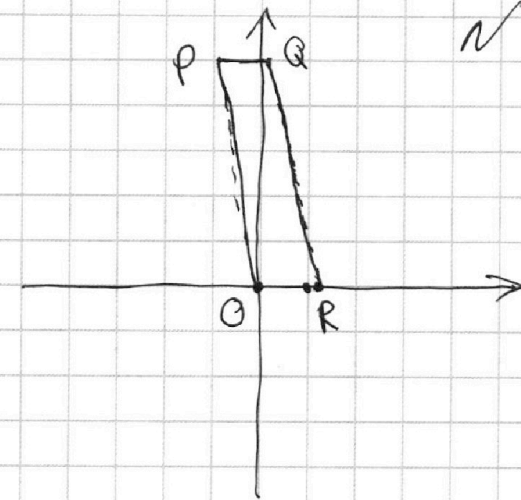
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6 мк 1 рел

Если первую точку взять как O , то ПМТ точек удовлетворяющих условию задается ~~прямой~~ $-5x_1 - y_1 = 45$ и $5x_1 + y_1 = 45$

$$\Rightarrow y_1 = -5x + 45 \quad (1)$$

$$y_1 = 5x + 45 \quad (2)$$

Найдем точки пересек.

~~ПРОУЗ-3x~~

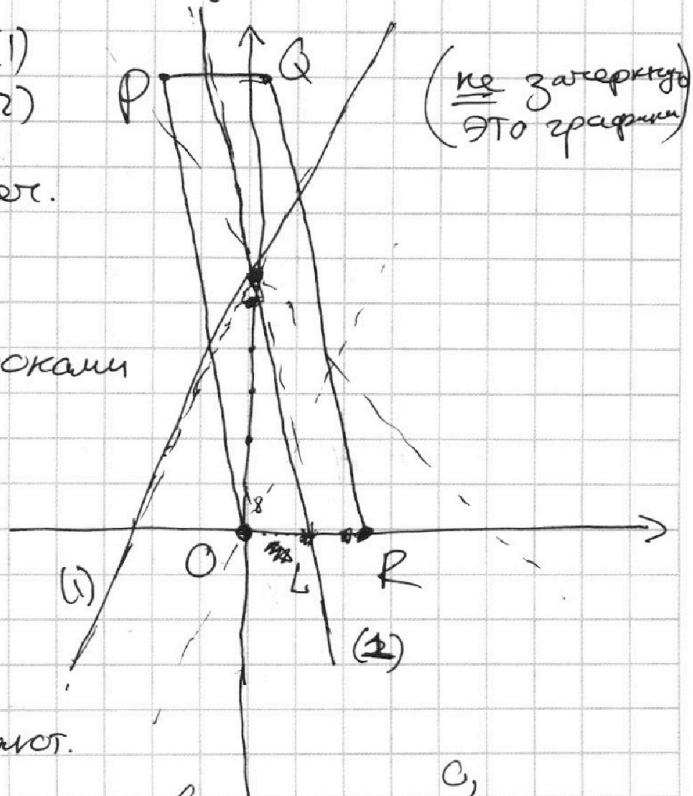
не со всеми сторонами будут пересек.

(1) $\parallel PO \parallel QR$

~~если~~

Все целые точки на (1) удовлетворяют.

$\Rightarrow$ точку O можно сдвинуть на $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ шагов влево и косо подходящу. Точек на этой прямой не изменится. Всего их на прямой ~~10~~ 10 целых точек на отрезке $OL \Rightarrow 10$ целых точек. $\Rightarrow 100$ точек за счет этой прямой.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

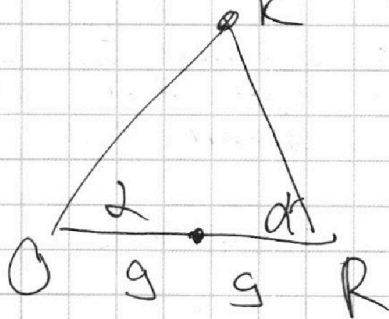
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$32 = 2^5 \quad 4 \cdot 4 \cdot 2 = 2^5 \Rightarrow 32^2 = 1024$$

$$\begin{array}{r} 219 \\ 1460 \\ \hline 1679 \end{array}$$

N 6

Второе уравнение даст
еще несколько
точек для каждого
положения 0
(1 всегда совпадает
с уже посчитанным)



$$\tan \alpha = 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

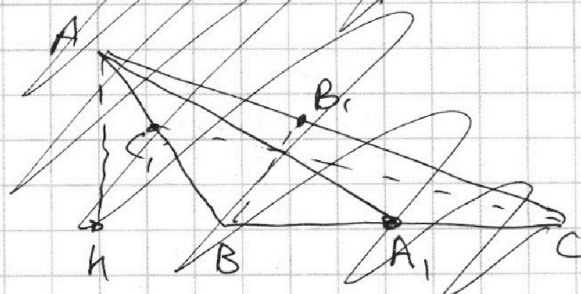
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 7 лист 4 решение

$\Rightarrow HA_1 > BA_1 \Rightarrow H \notin [BC]$

$\Rightarrow$ новый формат



Итак, по Т. Пифагора

$$AB = \sqrt{(A_1H - BA_1)^2 + AH^2}$$

$$AC = \sqrt{(A_1H + BA_1)^2 + AH^2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = \sqrt{((A_1H - BA_1)^2 + AH^2)((A_1H + BA_1)^2 + AH^2)}$$

$$= \sqrt{(A_1H - BA_1)^2(A_1H + BA_1)^2 + (A_1H - BA_1)^2AH^2 + (A_1H + BA_1)^2AH^2 + AH^4} =$$

$$= \sqrt{(A_1H^2 - BA_1^2)^2 + AH^2(A_1H^2 - 2A_1H \cdot BA_1 + BA_1^2 + A_1H^2 + 2A_1H \cdot BA_1 + BA_1^2) + AH^4} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{23 \cdot 73}{4} - 64\right)^2 + \frac{25^2}{4} \left(2 \cdot (A_1H^2 + BA_1^2)\right) + \frac{25^4}{2^4}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1679 - 1024}{44}\right)^2 + \frac{625}{2} \cdot \left(\frac{1679}{4} + \frac{1024}{4}\right) + \frac{25^4}{2^4}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{655}{4}\right)^2 + \frac{625}{8} (2703) + \frac{25^4}{2^4}}$$

Обозначим ~~это~~ это число как m

$$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin$$

не решил

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

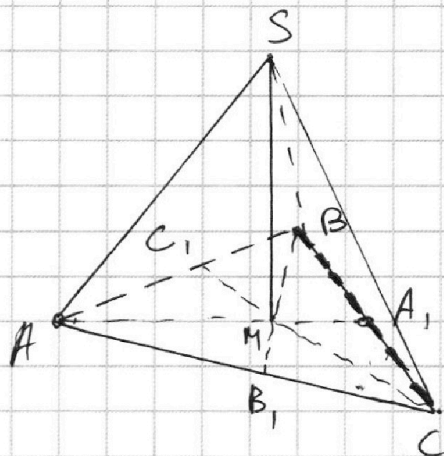
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 7 мст 1 реш



(~~Вершина~~ CM не обязательно перпендикулярна (ABC))

1) Назовем центр сферы O.

~~OL, OK - радиусы~~

~~$\Rightarrow (OLK)$ - сечение сф. 1~~

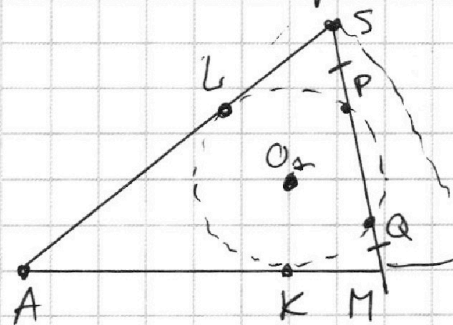
~~OP, OQ - радиусы~~

~~$\Rightarrow (OPQ)$ - сечение сф. 2~~

~~$P, Q \in SM \Rightarrow$~~

~~$SM \subset (OPQ)$~~

Рассмотрим сечение сферы плоскостью (SAM):



~~Радиус окружности в этом~~

~~сечении равен R~~

~~то сечение является сферой~~

Назовем полуокружность окруж.

Ω_1 с центром O_1 .

степень M относительно Ω_1

$$\deg(M) = MQ \cdot MP = KM^2$$

$$\deg(S) = SP \cdot SQ = SL^2$$

$$MQ = SP \Rightarrow \deg(M) = MQ \cdot (MQ + PQ) = SP(SP + PQ) = SP \cdot SQ = \deg(S)$$

$$\Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$$

$AL = AK$ (как отрезки касательных из одной точки к одной окружности)

$$\Rightarrow AM = AK + KM = AL + LS = AS = 16$$

2) По св-ву медиан в треугольнике ABC:

$$AM = 2MA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} h_A \cdot BC = 100$$

где h_A - длина высоты из вершины A

$$\Rightarrow h_A = \frac{200}{16} = \frac{8 \cdot 25}{16} = \frac{25}{2} \quad (\text{высота } AH)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{7}$ мст 3 решения

$$= \sqrt{24^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{48^2 - 25^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(48-25)(48+25)}}{2} = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} = A_1H$$

~~$BH = \frac{BC}{2}$~~ г.п. $MH_1 \perp BC$

~~$\triangle MA_1H_1 \sim \triangle A_1HA_1$~~ ; $MA_1 = \frac{1}{3}AA_1$

$\Rightarrow MH_1 = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{6}$

$S_{BMC} = MH_1 \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{BM \cdot MC}{2} \cdot \sin \alpha$
где $\alpha = \angle BMC$

$\Rightarrow MH_1 \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3}BB_1 \cdot \frac{2}{3}CC_1}{2} \cdot \sin \alpha$

~~Учитывая утверждение пункта 3
решения получаем систему
(обозначим BB_1 за b , CC_1 за c .)~~

~~$$\begin{cases} bc = \frac{3}{2} S_{ABC} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \\ MH_1 \cdot BC = \frac{4}{9} bc \cdot \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = \frac{3}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \\ \frac{25}{6} \cdot 16 = \frac{4}{9} bc \cdot \sin \alpha \end{cases}$$~~

~~$$\Leftrightarrow \begin{cases} bc = \frac{150}{\sin \alpha} \\ bc = \frac{16 \cdot 25 \cdot 9}{6 \cdot 4 \sin \alpha} = \frac{25 \cdot 3 \cdot 2}{\sin \alpha} \end{cases} \dots 0 \text{ и.}$$~~

5) В $\triangle BKA$ по Т. Пифагора:

~~$$AB = \sqrt{BK^2 - KA^2} = \sqrt{(BA_1 - HA_1)^2 - KA^2} =$$

$$= \sqrt{\left(8 - \frac{23 \cdot 73}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \sqrt{(32^2 - 23 \cdot 73)^2 - 50^2} =$$~~

~~Первое слагаемое под корнем — отрицательное в квадрате~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

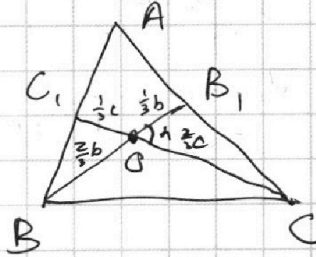
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) Рассмотрим некоторый $\triangle ABC$

В данном
пункте
решение

(~~не~~ обозначение не соотносится с обознач. задачи) в котором нам известны медианы b, c и ~~угол~~ α между ними.



учитывая основное св-во медиан обозначим на чертеже отрезки. Тогда C_1B_1 - средняя линия $\Rightarrow \triangle AC_1B_1 \sim \triangle ABC$ (как отсеченный прямой паралл. осн)

с коэф. подобия $\frac{1}{2}$

$$\text{Тогда } S_{\triangle B_1C_1O} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AC_1B_1} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}$$

$$\text{Также } S_{\triangle B_1C_1O} = S_{\triangle C_1OB_1} + S_{\triangle C_1OB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle COB_1}$$

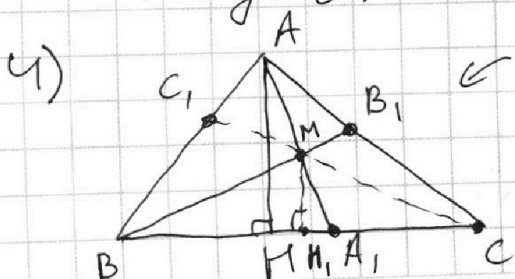
$$= \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} bc + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot bc + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} bc + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} bc \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot bc \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot bc$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot bc$$

$$\Rightarrow bc = \frac{3}{2} S_{\triangle ABC} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

$\Rightarrow$ Произведение двух медиан $\sqrt{\frac{3}{2}}$ площади треугольника деленной на синус угла между этими медианами.



плоскость (ABC)

В $\triangle HAA_1$ по Т. Пифагора:

$$HA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} =$$

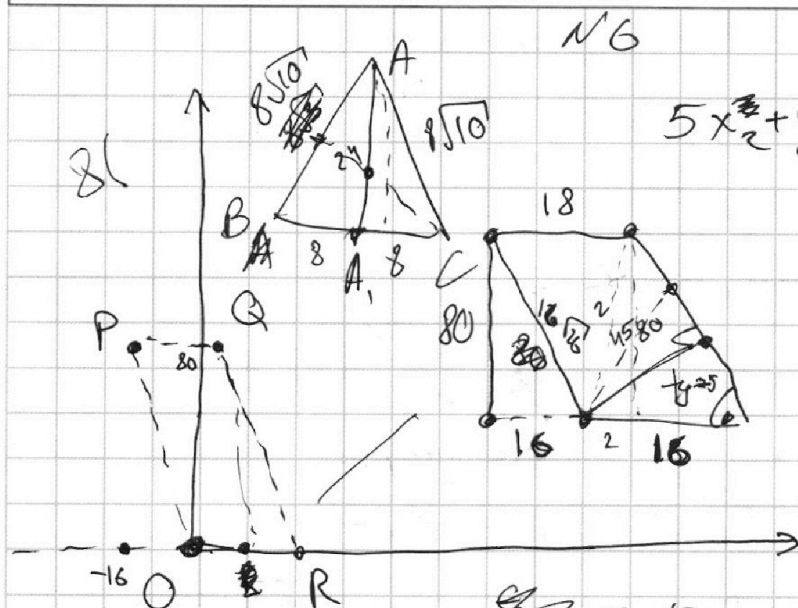
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2^2 + y_2^2 - 5x_1^2 - y_1^2 = 45$$

$$\sqrt{80^2 + 16^2} = \begin{array}{r} \times 48 \\ 48 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$= 16 \cdot \sqrt{5^2 + 12^2} =$$
$$= 16 \sqrt{26}$$

$$16\sqrt{26} \cdot x = 80 \cdot 18$$

$$\sqrt{26} x = 5.18$$

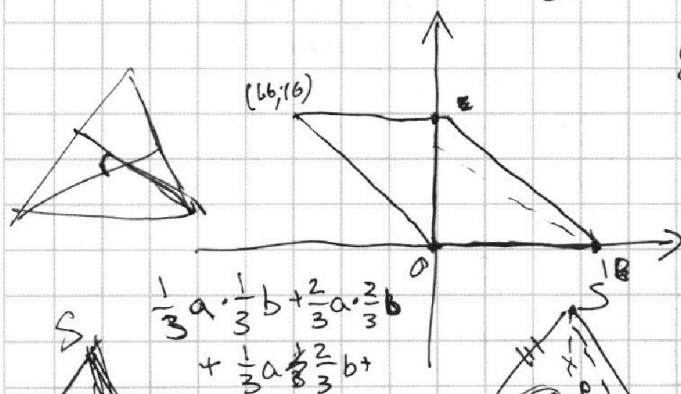
$$x = \frac{90}{\sqrt{26}}$$

Echus ~~to~~

Как устраивают пары точек, манхеттерское расстояние между которыми ≤ 4.5 . строго равно 4.5

"Сожжен" нашу плоскость вдоль
оси Oy в 3 раз.

Получим следующую фигуру:



Если принять такую
образом плоскость
часть тожек с изломом
цельным у станков
точками с дробным.
и рассматриваем
мы пары тожек.

$$BC \cdot \sin BA_1 A = 100$$

$$\Rightarrow \text{Berechnung } BL = \frac{100}{10} = 10$$

