МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)\,(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

1) Пусть $a \vdots 2^\alpha$; $b \vdots 2^\beta$; $c \vdots 2^\gamma$, причём α, β, γ – max степени 2 на которые делятся a b и c. Тогда нужно, чтобы $\alpha+\beta+\gamma$ было min для min произведения abc.

$$\left.\begin{array}{l} ab \vdots 2^8 \\ bc \vdots 2^{12} \\ ac \vdots 2^{14} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta \geq 8 \\ \beta+\gamma \geq 12 \\ \alpha+\gamma \geq 14 \end{cases} (*) \text{ сложим.}$$

$2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 34 \Rightarrow \underline{\alpha+\beta+\gamma \geq 17}$ – пр-

при $\left.\begin{array}{l} \alpha=5 \\ \beta=3 \\ \gamma=9 \end{array}\right|$ – система $(*)$ выполнена и $\alpha+\beta+\gamma=17$ (достигается)

$abc \vdots 2^{17}$ и может не делиться на 2^{18}.

2) Аналогично $a \vdots 3^\alpha$; $b \vdots 3^\beta$; $c \vdots 3^\gamma$

Рассуждая так же, получим:

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 14 \\ \beta+\gamma \geq 20 \\ \alpha+\gamma \geq 21 \end{cases} (*) \Rightarrow 2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 55$$

(сложим)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:
1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐
МФТИ
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ - целые $\Rightarrow$, $\alpha+\beta+\gamma \geq \frac{55}{2} \Rightarrow$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 28 > \frac{55}{2} > 27$

$\alpha+\beta+\gamma = 28$ - равенство достигается при $\gamma=14; \beta=6; \alpha=8. \Rightarrow abc : 3^{28}$ и может и соотв. системе (*) быть не кратно 3^{29}.

3) Аналогично $a : 5^{\alpha}; b : 5^{\beta}; c : 5^{\gamma}$

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 12 \ (*) \\ \beta+\gamma \geq 17 \\ \alpha+\gamma \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma \geq 39 \ (\text{т.к. } \beta \geq 0)$$

Равенство $\alpha+\beta+\gamma = 39$ достигается при $\beta=0; \alpha=12; \gamma=27$ и соотв. системе (*). $\Rightarrow abc : 5^{39}$, но может быть не кратно 5^{40}.

Значит $abc : (2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ наиб.) и может быть не кратно большим степеням 2, 3, 5. Других ограничений на простые множители нет. $\Rightarrow$ Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ наиб. - наименьшее

ЛИСТ 2

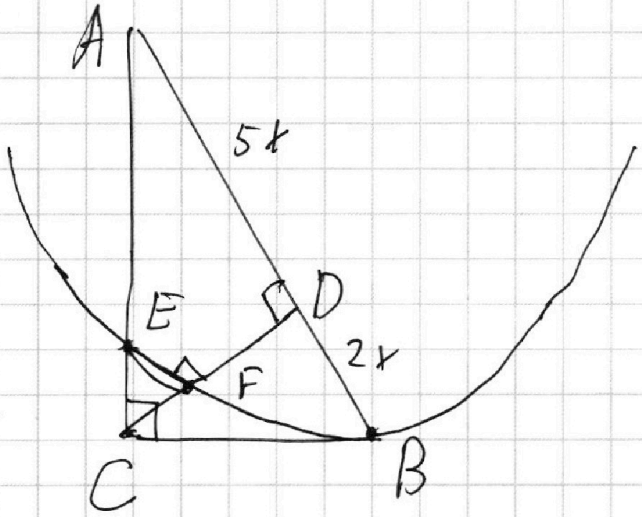
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$

CD - высота $\frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$

ф-ция касается CB в точке B и пересекает CD в F и AC в E. $S_\Theta = S_{CEF}$

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_\Theta} - ?$

Пусть $AD = 5t$, тогда $BD = 2t$.

По ср. геом для прям $\triangle$:

$CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = t\sqrt{10}$

По т-ме Пифагора для $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$

$CB^2 = t^2 \cdot 10 + 4t^2 \Rightarrow CB = t\sqrt{14}$

$AC^2 = 10t^2 + 25t^2 \Rightarrow AC = t\sqrt{35}$

По т-ме о кв-те касательной:

$CB^2 = CE \cdot CA \quad 14t^2 = t\sqrt{35} \cdot EC$

$\Rightarrow EC = \frac{14}{\sqrt{35}}t = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}t$

ЛИСТ 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$ как соотв. при $\parallel$ прямых

$\Rightarrow \triangle CFE \sim \triangle CDA$ по 2 ч. ($\angle C$ – общ., $\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$), т. $k = \frac{CE}{CA} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5} \cdot x\sqrt{35}} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{S_0}{S_{CAD}} = k^2 = \frac{4}{25}$; $S_0 = \frac{4}{25} S_{CAD}$

$S_0 = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} x^2 \sqrt{\omega} \cdot 5$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} x^2 \sqrt{14} \cdot \sqrt{35}$

$\frac{S_{ABC}}{S_0} = \frac{\frac{1}{2} x^2 \sqrt{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{5}}{\frac{1}{2} x^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{4}{25}} = \frac{7}{4/5} = \frac{35}{4}$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_0} = \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{35}{4}$.

ЛИСТ 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow -\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\pi=\frac{\pi-2x}{10} \quad |\cdot 10$

$-15\pi+10x=\pi-2x$

$12x=16\pi \qquad \boxed{x=\frac{4\pi}{3}}$ (соотв $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$)

5) $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right)$: $\alpha=\frac{\pi}{2}-x$, тогда

$(\alpha+2\pi)\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \arcsin(\sin\alpha)=\arcsin(\sin(\alpha+2\pi))=$

$=\alpha+2\pi \Rightarrow$

$\frac{\pi}{2}-x+2\pi=\frac{\pi-2x}{10} \quad |\cdot 10$

$25\pi-10x=\pi-2x;\ 8x=24\pi$

$\boxed{x=3\pi}$ (соотв. $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right]$)

$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$ других решений нет. Объединив случаи 1-5 получим ответ:

Ответ: $x\in\left\{-2\pi;-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{3};3\pi\right\}$

ЛИСТ 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$10 \arcsin(\cos t) = \pi - 2t$

$\arcsin(\cos t) = \frac{\pi - 2t}{10}$ $\quad \arcsin\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi - 2t}{10} \le \frac{\pi}{2}$ $\quad -5\pi \le \pi - 2t \le 5\pi$

$\Rightarrow \boxed{-\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - t \le \frac{5\pi}{2}}$

1) Пусть $\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \frac{\pi - 2t}{10}$, $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, если

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$\frac{\pi}{2} - t = \frac{\pi - 2t}{10} \Rightarrow 5\pi - 10t = \pi - 2t$

$8t = 4\pi$ $\quad \boxed{t = \frac{\pi}{2}}$ (соотв. $\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).

2) Пусть $\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$\arcsin(\sin\alpha) = \sin(\pi - (\pi - \alpha)) = \sin(\pi - \alpha)$

$\arcsin(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)) = \arcsin\left(\pi - \frac{\pi}{2} + t\right) =$

$= \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} + t\right)\right) = \frac{\pi}{2} + t$, т.к. при

ЛИСТ 5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

таких условиях: $\forall k \in \mathbb{Z}\ \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + x < \frac{\pi}{2}$ – в $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi - 2x}{10} \Rightarrow 5\pi + 10x = \pi - 2x$

$12x = -4\pi$ $\boxed{x = -\frac{\pi}{3}}$ (соотв. $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$)

3) $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

$\alpha = \frac{\pi}{2} - x$, тогда $-\frac{\pi}{2} < \alpha - 2\pi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin(\sin(\alpha - 2\pi)) = \alpha - 2\pi \Rightarrow$

$\frac{\pi}{2} - x - 2\pi = \frac{\pi - 2x}{10} \mid \cdot 10$

$-15\pi - 10x = \pi - 2x$; $8x = -16\pi$

$\boxed{x = -2\pi}$ (соотв. $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

4) $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$, тогда

$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin(\sin((\alpha + \pi) - \pi)) = \arcsin(-\sin(\alpha + \pi)) =$

$= -\arcsin(\sin(\alpha + \pi)) = -\alpha - \pi$, т.к. $\left|\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \le \alpha + \pi < \frac{\pi}{2} \\ \text{при } -\frac{3\pi}{2} \le \alpha < -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ ЛНСТ6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

В силу симметрии отн. O_1O_2:
$a_1 = -a_2 = -\frac{\sqrt{51}}{7}$ (обе окр-сти симметрич
ны отн O_1O_2 и OX симметр отн O_1O_2
$\Rightarrow$ общ. внутренние касательные тоже
симметричны).

$$\begin{bmatrix} A < a_1, \\ A > a_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A < -\frac{\sqrt{51}}{7} \\ A > \frac{\sqrt{51}}{7} \end{bmatrix} \qquad A = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right).$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

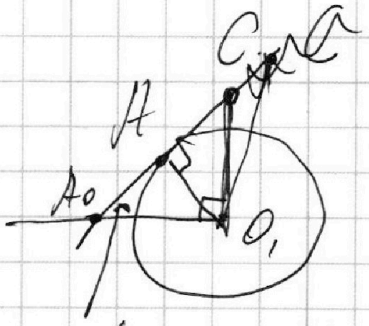
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

функция a_2. (тогда $O_1A \perp AB$; $O_2B \perp AB$) и $C = AB \cap O_1O_2$. Пусть $O_1C = x$; $O_2C = y$.

$\triangle O_2BC \sim \triangle O_1AC$ по 2 м ($\angle O_1AC = \angle O_2BC = 90^\circ$ и $\angle ACO_1 = \angle BCO_2$ как верт) $\Rightarrow$

$$\frac{x}{y} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{1}{6} \qquad x + y = O_1O_2 = 10 \text{ т.к. } O_1(0;0),\ O_2(0;10)$$

$$\begin{cases} y = 6x \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{60}{7} \end{cases}$$



A_0 – точка пересечения AB и Ox. Тогда $\angle O_1A_0A = \alpha$ – угол наклона прямой a_2 ($tg\alpha = a_2$)

В $O_1C \perp Ox \Rightarrow \angle A_0O_1A = 90^\circ - \alpha$ (по сумме $\angle$ в) $\angle AO_1C = \alpha$

Тогда $\cos\alpha = \frac{AO_1}{O_1C} = \frac{1}{x} = \frac{7}{10} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$ (α – острый $\Rightarrow \sin\alpha > 0$) $\Rightarrow$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{\sqrt{51}}{7}}$

ЛИСТ 11

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

обе ох-сти в 2* точках (т.к прямая имеет с ох-стью не более ~~2~~ 2* общих точек.

Рассмотрим общие внутренние касательные с угловыми коэффициентами a_1 и a_2 ($a_1 < 0 < a_2$).

Если $A < a_1$, то

При фиксированном A $y = Ax + B$ — множество всех прямых с угловым коэффициентом A.

Если $A < a_1$, то например прямая пересекающая прямую a_1 например в точке Q (между касаниями) будет иметь 4 точки пересечения с ох-стями $\Rightarrow$ такие A подходят.

Аналогично $A > a_2$ — подходят

Если $a_1 \leq A < 0$ и прямая пересекает ох-сть w_1 ($O(0;0)$ $R=1$), то она лежит не выше прямой с

ЛИСТ 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

с угловым коэффициентом a_1 (имеет точек пересечения с ω_1) (не выше, т.к. $a_1 \le A < 0$), но тогда эта прямая не может пересекать ω_2 в 2+ точках ($\omega_2 - D(0;10); R=6$), а значит условие не выполнено $\forall B$ (если эта прямая не пересекает ω_1, то условие тем более не выполнено) $\Rightarrow$ $A \in [a_1; 0)$ – не подходят

Аналогично $A \in (0; a_2]$ – не подходят

$A = 0$: $y = B$ – прямая $\parallel Ox$ – не может в такой ситуации иметь 4 точки пересечения.

$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} A < a_1 \\ A > a_2 \end{array}\right.$ – решения.

Пусть O_1, O_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 соотв., O_1A и O_2B – радиусы в точки касания с прямой углового коэф. – ЛИСТ 10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

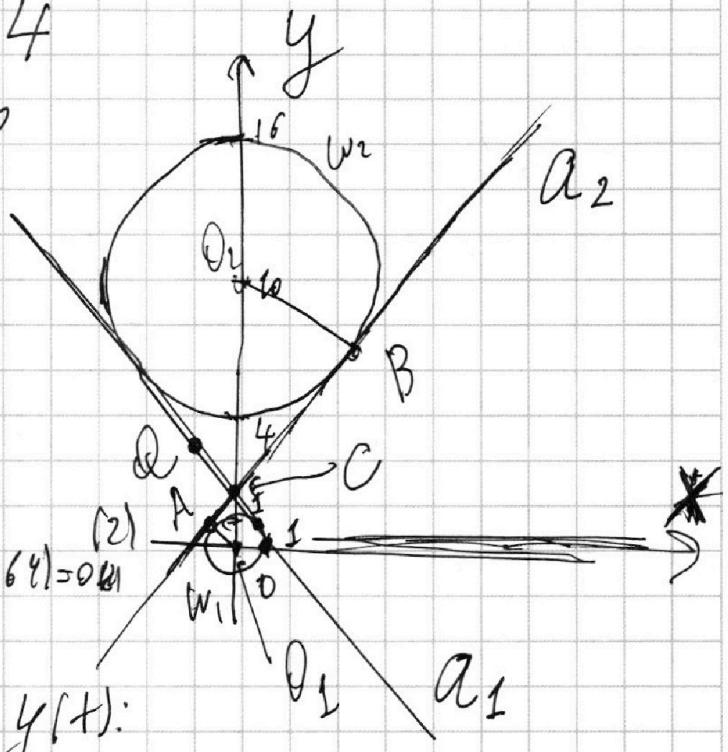
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

a-? $\exists b$ такое, что система имеет 4 решения.



$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \quad (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \quad (2) \end{cases}$$

Построим (2) в $y(x)$:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-20y+100=-64+100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{cases}$$ – две окр-сти с центрами $(0;0)$ и $(0;10)$ и радиусов 1 и 6 соответственно

(2): $ax-3y=4b \Rightarrow$

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$ ВА

Замена $\frac{a}{3}=A$, $\frac{4b}{3}=B$ $(b\in R \Rightarrow B\in R)$

$y=Ax+B$ – должно пересекать

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~(I)+(II): $u^5+t^5+u^5+t^5+3(t+u)=0$~~

(IV)−(III): $u^4-t^4+\frac{13}{3u}+\frac{13}{3t}=0$

$(u^2-t^2)(u^2+t^2)+\frac{13}{3}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{t}\right)=0$

$(u^2+t^2)(u-t)(u+t)+\frac{13(t+u)}{3\cdot ut}=0$

Рассмотрим $t+u=0$

обр. замена. $\log_5(2+x)+\log_5 y=0$

$\log_5(2+y)=\log_5 1 \overset{\log_5 a}{\Longleftarrow} 2+y=1$

$\boxed{xy=\frac{1}{2}}$. Уже было доказано, что других xy быть не может (их не более 1^{20})

Ответ: $xy=\frac{1}{2}$.

ЛИСТ 15

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

① $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}^5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

② $\log_5^4 y + 4\log_5 y = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$

$(x;y) - ?$

①: $\log_{8x^3} 625 = \log_{(2x)^3} 5^4 = \frac{4}{3}\log_{2x} 5$

②: $\log_{y^3} \frac{1}{5} = -\frac{1}{3}\log_y 5$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{13}{3}\log_{2x} 5 + 3 = 0 \\ \log_5^4 y + \frac{13}{3}\log_y 5 + 3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $\log_5(2x) = t$, тогда $\log_{2x} 5 = \frac{1}{t}$

$\log_5 y = u$ $\quad \log_5 y = \frac{1}{u}$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0 \quad | \cdot t \neq 0 \\ u^4 + \frac{13}{3u} + 3 = 0 \quad | \cdot u \neq 0 \end{cases}$$

ЛИСТ 13

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} t^5+3t-\frac{13}{3}=0 \quad (I) \\ u^5+3u+\frac{13}{3}=0 \quad (II) \end{cases}$$

Функция $f(x)=x^5+3x$ возрастает на R как сумма возрастающих на R (x^5 и $3x$), значит каждое своё значение она принимает 1 раз $\Rightarrow$ ур-я (I) и (II) имеют не более $1^{го}$ решения каждое. $\log_5(2t)=t$ $\log_5 y=u$ | $y=\log_5 z$ – возрастающая ф-я ($5>1$)

$\Rightarrow$ каждому u и t соотв. единственные x и y.

Значит может существовать не более одного произведения xy. Найдём его.

$$\begin{cases} t^5+3t-\frac{13}{3}=0 \quad (I) \\ u^5+3u+\frac{13}{3}=0 \quad (II) \end{cases} \xrightarrow{-(II)} \begin{cases} t^4-\frac{13}{3t}=-3 \quad (III) \\ u^4+\frac{13}{3u}=-3 \quad (IV) \end{cases}$$

ЛИСТ 14

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Это пар.м с вершинами $(9;0)$; $(0;9)$; $(-9;9)$ и $(0;9)$. ⊛⊛

На его сторонах $\parallel 0x_1$: $9-0+1=10$ точек.

k-от 0 до 9 $\Rightarrow$ таких прямых $9-0+1=10$ шт

Значит всего в пар-м включая границы входят целых $k_0=10^2$ точек, при выборе которых $(45+y_1;+5+x_1) \in [0;90]$ - условие ⊛ $\Rightarrow$

Всего целых пар $17 \cdot 10^2 = 1700$.

Из пар-ма ⊛⊛: $0 \le k+x_1 \le 9 \Rightarrow$

$45 \le 45+5k+5+x_1 \le 90$, но точки на крайней прямой $k+x_1=9$: $y+5x=45$ $(45=5\cdot 9)$ $5y+5x=9$ - в пар.ме PQRO переходят OA в $(0;45)$ $\Rightarrow$ эти точки уже учтены при подсчёте другими $\Rightarrow$

Нужно убрать из k_0 10 точек на прямой $(9;0);(0;9)$ $\forall k(+1)$, тогда всего $17(10^2-10)=1530$ пар

Ответ: 1530.

ЛИСТ 19

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|k|=5 \Rightarrow$ на этой стороне $18-2+1=17$ — целых точек с целыми координатами

$\Rightarrow$ Всего $17k_0$ искомых точек, где k_0 — кол-во способов выбрать A так, что прямая $y_2(k_2)$ проходит через точки пар-ма (*).

PQ — пересекает OY в $(0;90)$, а

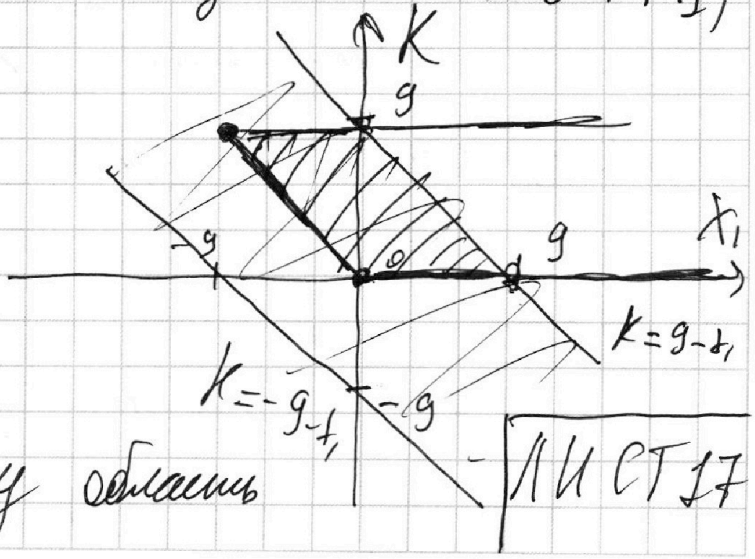
$RQ\ (y=-5t+90)$ в $(0;90) \Rightarrow$

$(45+y_1+5t_1) \in [0;90]$ — условие (*).

$\Rightarrow y_1 = 5k,\ k \in \mathbb{Z}$, тогда $0 \le 45+5k+5t_1 \le 90$

$\Rightarrow -9 \le k+t_1 \le 9$

Начертим эту область в $k(t_1)$



$k=9-t_1$ | прямые
$k=-9-t_1$ | проходящие через $(9;0)$; $(0;9)$ и $(-9;0)$; $(0;-9)$ соотв.

Ограничим эту область

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

тами значениями, которые могут соотв. точкам RO RQ.

PO: $y = -5x$ (т.к. пояс. $k = 5$ и проходит через $(0;0)$)

Если $y = y_2 = 5k$; $x = x_1 \Rightarrow$ $k = x_1$ — ур-е точек на стороне PO в $k(x_1)$

Линейная ф-я через $(9;0)$ и $(-9;9)$

$y \geq 0$ $y = 5k \Rightarrow \underline{k \geq 0}$ — перемещает в $(9;0)$ $k + x_1 = 9$.

$k=0$

Если $x_1 = 9$ найдем возмож. k

RQ: $y = -5 + 90$ $x_1 = 9 \Rightarrow y = 45 = 5k$

$\Rightarrow k \leq 9$ — верно для $x_1 = 9 \Rightarrow$ верно для других x_1, также ($x_1 < 9$ — при ограничении $k + x_1 \geq 0$)

Таким образом все искомые точки на $k(x_1)$ — ограничены

$-9 \leq k + x_1 \leq 9$

$k \geq 0$ ⓐ $k + x_1 \geq 0$

$k \& \leq 9$

| ЛИСТ 18

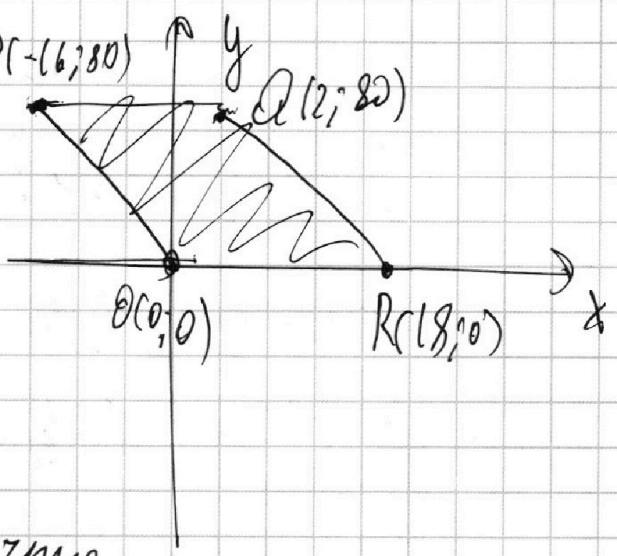
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6



Дано: пар. м ОRQP
O(0;0) P(-16;80);
Q(2;80); R(18;0)

Найти $A(x_1;y_1)$ и
$B(x_2;y_2)$ – ? такие, что

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

Пусть $A(x_1;y_1)$ фиксированы $\Rightarrow$

$y_2 = -5x_2 + (45 + y_1 + 5x_1)$ – прямая на которой лежат B.

Рассмотрим RQ: $y = k + \epsilon b - ур-е$ прямой

$$\begin{cases} 80 = 2k + b \\ 0 = 18k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ b = 90 \end{cases}$$

$k = -5$ совпадает с коэф. наклона стороны пар-ма $(y_2 = -5x_2 + (45 + y_1 + 5x_1))$
Значит эти прямые ~~совпадают с~~ // стороне RQ.

ЛИСТ 16

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AA_1 = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2}$.

Площадь Δ из медиан CC_1 и BB_1 с $\angle A$ составляет $\frac{3}{4} S_{ABC}$ по одному из св-ств медиан

$\frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin A \cdot BB_1 \cdot CC_1$,

$BB_1 \cdot CC_1 = \frac{150}{\sin A}$. Искомое $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 =$

$= \frac{150 \cdot 24}{\sin A} = \frac{3600}{\sin A}$.

Т-ма Пифагора: $AB = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + (AH_1 + 8)^2}$

$AC = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + (8 - AH_1)^2}$

По т-ме косинусов $256 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$

$\Rightarrow$

Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3600}{\sin A}$, где $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$, где $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - 256}{2AB \cdot AC}$, где $AB = \sqrt{\frac{625}{4} + (AH_1 + 8)^2}$, $AC =$

ЛИСТ22

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= \sqrt{\frac{625}{4} + (8 - AH_1)^2}, \quad AH_1 = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2}.$$

ЛИСТ 23

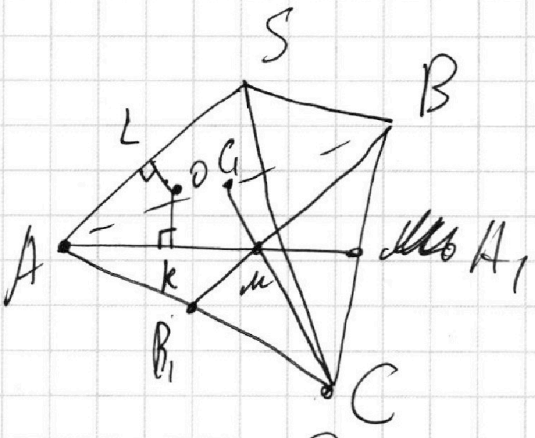
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

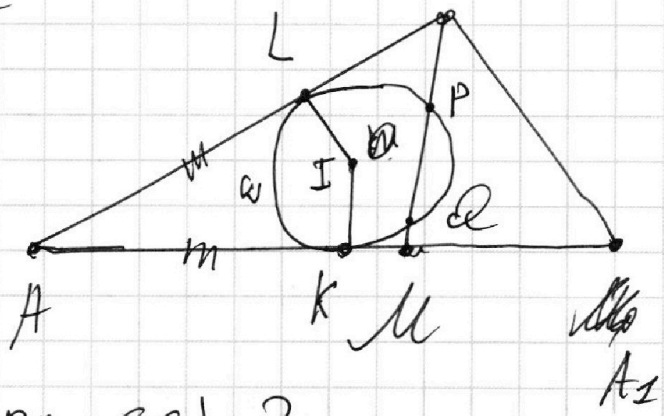
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



Дано: SABC - пирамида
медианы $\triangle ABC$ пересекаются в точке M
Сфера Ω касается AS в L и (ABC) в K
K ∈ AM и пересекает SM в P и Q.
SP = MQ; SA = BC = 16
$S_{ABC} = 100$



а) Найти: $(AA_1 \cdot BB_1 - CC_1)$ - ?

Рассмотрим (ASA_1). ~~$OK \perp (ABC)$ - радиус,~~
~~$\Rightarrow OK \perp AA_1$.~~
В сечении Ω (ASA_1) получается ок-сть ω, которая касается AA_1 в K и AS в L (т.к. $K, L \in (ASA_1)$) и других точек пересечения не может быть т.к. сфера касается AS и (ABC)) ЛИСТ 20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По т-ме о кв-те касательной

$SL^2 = SP \cdot SQ = SP(SP+PQ)$

$KM^2 = MQ \cdot MP = MQ(MQ+PQ)$

$MQ = SP \Rightarrow SL = KM$ (если P и Q — в другом порядке отн. MS — аналогично $LS = KM$)

$AL = AK$ по св. 2 касат. провед. из 1 точки

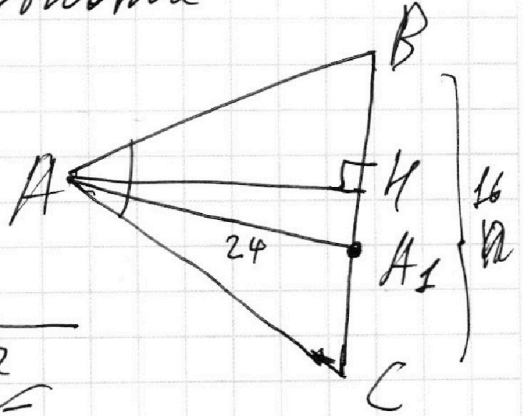
$\Rightarrow AS = AL + LS = AK + KM = AM = 16$

По св. медиан $\frac{AM}{AM_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow AM_0 = 24$

$S_{ABC} = 100$; Пусть AH — высота

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$

$200 = AH \cdot 16$ $AH = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$



По т-ме Пифагора

для $\triangle AHA_1$: $HA_1 = \sqrt{24^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{48^2 - 25^2}}{2}$

ЛИСТ 21

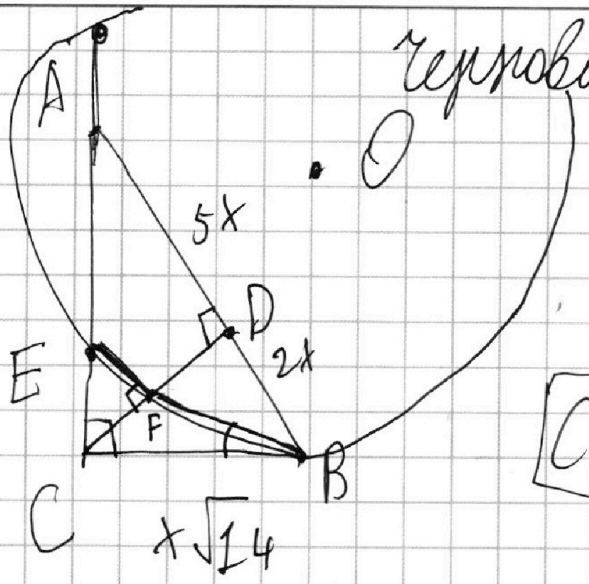
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$ABCEF$

$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$ $\quad \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} - ?$

$CD = x\sqrt{10}$

$CB = x\sqrt{10+4} = x\sqrt{14}$

$AC = x\sqrt{10+25} = x\sqrt{35}$

$CB^2 = AC \cdot EC \quad x^2 14 = x\sqrt{35} \cdot EC$

$EC = x\frac{14}{\sqrt{35}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}x \quad \frac{EC}{AC} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{35}} = \frac{2}{5}$

$S_\Phi = \frac{4}{25} S_{ACD} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot x\sqrt{10}$

$\frac{\frac{1}{2} \cdot x^2\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}{\frac{1}{2}x^2 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}{\sqrt{10}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 7\cdot\sqrt{5}\cdot 5}{\sqrt{2}\sqrt{5}\cdot 4} = \frac{35}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

$bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

$ac : 2^{14} 3^{21} \cdot 5^{39}$

abc - min

$a = 2^\alpha$

$b = 2^\beta$

$c = 2^\gamma$

$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 8 \\ \beta+\gamma \geq 12 \\ \alpha+\gamma \geq 14 \end{cases}$

$2\alpha+2\beta+2\gamma \geq 34$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 17$

2^{17}

~~$\alpha=7; \gamma=7, \beta=3$~~

или $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=9$

$a : 3^\alpha ; \quad b : 3^\beta ; \quad c : 3^\gamma$

$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 14 \\ \beta+\gamma \geq 20 \\ \alpha+\gamma \geq 21 \end{cases}$

$2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 55$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 28$

$\gamma=14; \beta=6; \alpha=8$

34 / 21 / 56

$\frac{55}{2} =$

55 | 12 / 27,5 / 15

3^{28}

$\alpha = 17$

$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 12 \\ \beta+\gamma \geq 17 \\ \alpha+\gamma \geq 39 \end{cases}$

29 / 39 / 68 | 12 / 34

$\alpha+\beta+\gamma \geq 34$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 39$

5^{39}

$\beta=0; \alpha=12; \gamma=27$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ Черновик $\sin\alpha = \sin(\alpha - 2\pi)$

$\frac{\pi}{2} - x - 2\pi = \frac{\pi - 2x}{10}$

$-10x + 5\pi - 20\pi = \pi - 2x \quad -8x = -16\pi \quad \boxed{x = -2\pi}$

4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin\alpha = \sin((\alpha+\pi)-\pi) =$

$= -\sin(\alpha+\pi)$

$-\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$-15\pi + 10x = \pi - 2x \quad 12x = 16\pi \quad \boxed{x = \frac{4\pi}{3}}$

5) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi)$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi - x = \frac{\pi - 2x}{10}$

$25\pi - 10x = \pi - 2x \quad 24\pi = 8x \quad \boxed{x = 3\pi}$

$ax - 3y + 4b = 0$

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0$

$\boxed{x^2+y^2=1}$ $x^2+y^2-20y+100 = -64+100$

$x^2 + (y-10)^2 = 6^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

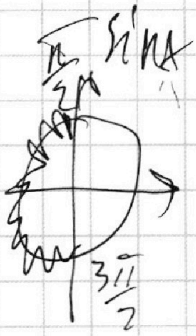
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$10\arcsin(\cos x) = 5\pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi - 2x}{10} \le \frac{\pi}{2}$ $\quad -5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$

$-6\pi \le -2x \le 4\pi$ $\quad -4\pi \le 2x \le 6\pi$

$x \in [-2\pi; 3\pi]$

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$

$-3\pi \le -x \le 2\pi$ $\quad \boxed{-\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x \le \frac{5\pi}{2}}$

б) $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: $\quad \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10}$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$ $\quad 4\pi = 8x$ $\quad \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

2) $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$: $\quad \sin\alpha = \sin(\pi - (\pi - \alpha)) = \sin(\pi - \alpha)$

$\pi - \frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi - 2x}{10}$ $\quad 5\pi + 10x = \pi - 2x$ $\quad \boxed{x = -\frac{\pi}{3}}$

$12x = -4\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$\log_5^4 x - 3\log_x 5 = \log_{x^3} 625 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$

$\log_5^4 x - 3\log_x 5 = \log_{x^3} 125$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{2} - 3$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{1}{\log_2 y} - 3$

$\log_{x^3} 625 = \log_{x^3} 125 + \log_{x^3} 5$

$\log_x 5$

$\log_5^4 y + 4\log_y \frac{1}{5} = \log_{y^3} \left(\frac{1}{125}\right)^3 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$\log_{y^3} 0{,}2 = \log_{y^3} \frac{1}{5} = \log_{y^3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 = \log_y \frac{1}{\sqrt[3]{5}} =$

$= \log_y 5^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\log_y 5$

$\log_5 y + \log_5(2x) = 0$

$\begin{cases} \log_5^4 y + \frac{13}{3}\log_y 5 = -3 \\ \log_5^4(2x) - \frac{13}{3}\log_5(2x) = -3 \end{cases}$

$\log_5(2xy) = 0$

$2xy = 1$

$x = \frac{1}{2y}$

$\log_5^4 y + \frac{13}{3\log_5 y} = -3$

$\begin{cases} x^4 + \frac{13}{3}x = -3 \\ y^4 - \frac{13}{3}y = -3 \end{cases}$

$\boxed{y^4 - \frac{13}{3y} = -3}$

$x^4 - y^4 + \frac{13}{3}(x+y) = 0$

$(x^2+y^2)(x-y)(x+y) + \frac{13}{3}(x+y) = 0$

$\begin{cases} y^4 + \frac{13}{3y} = -3 \\ x^4 - \frac{13}{3x} = -3 \end{cases}$

$x^4 - y^4 - \frac{13}{3x} + \frac{13}{3}y = -3$

$y^5 + 3y + \frac{13}{3} = 0$

$y^4 + \frac{13}{3y} + 3 = 0$

$x^5 - \frac{13}{3x} + 3 = 0$

$x^5 + 3x - \frac{13}{3} = 0$

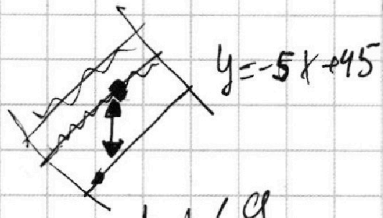
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$0 \le \text{нод}_1 \le 9$

$45 \le 45+5(\text{нод}_1) \le 90$

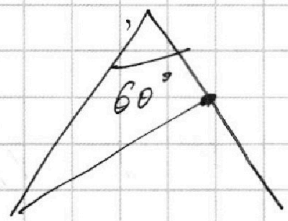
$\angle ABC = 100$

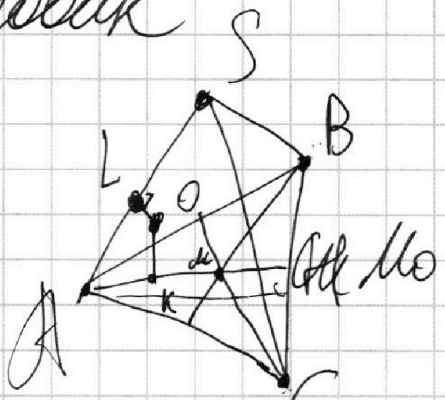
$SA = BC = 16$

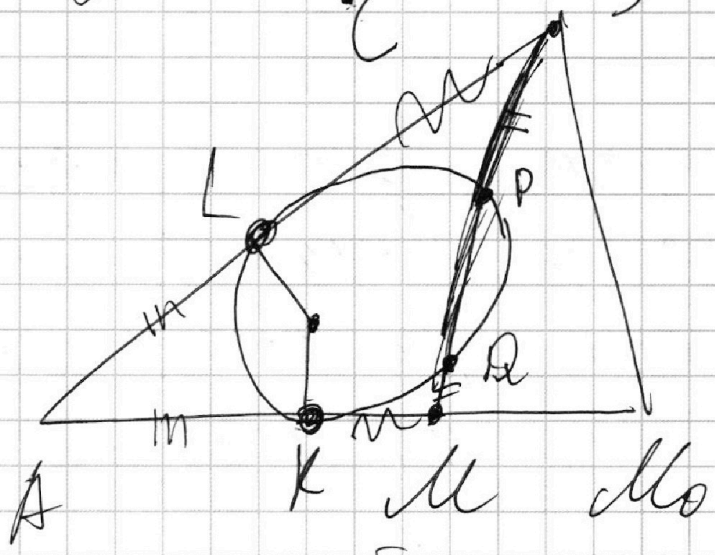
$BC = 16$

$AM = 16$

$\boxed{AM_0 = 24}$







$a \to \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$a^2 \frac{3}{4}a$

$$\begin{array}{r} 24^2 \\ 15 \\ \hline 120 \\ 24 \\ \hline 360 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$45+5x_1+y_1$ $\quad y_1 : 5$ $\quad \boxed{y_1 = 5k}$

$0 \le 45+5x_1+5k \le 90$

$0 \le 9+x_1+k \le 18$

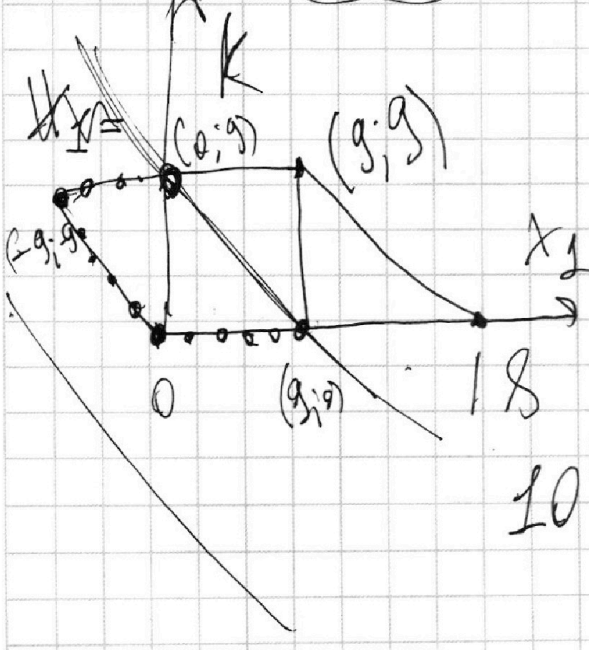
$\boxed{-9 \le x_1+k \le 9}$

$x_1 \in \{-16; \dots; 18\}$

$k \in \{0; 16\}$

$x_1 \in \{-9; \dots; 9\}$

$k \in \{0; 9\}$



$x_1 = -9 : \varnothing$

$10^2 \cdot 17 = 1700$

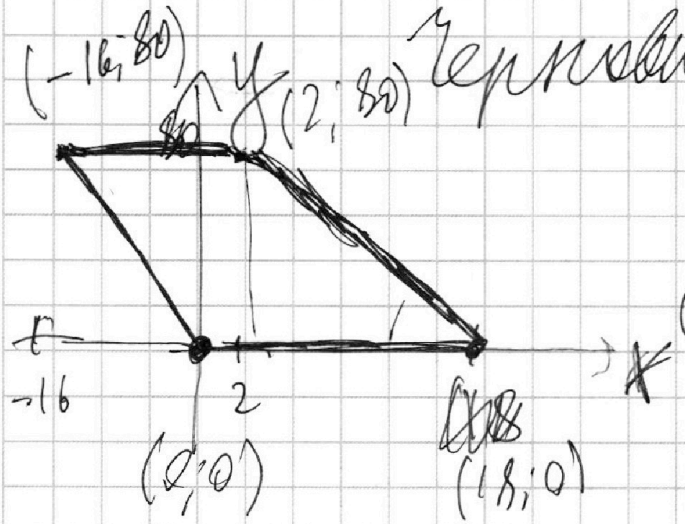
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$|y_2| = \frac{80}{16}$

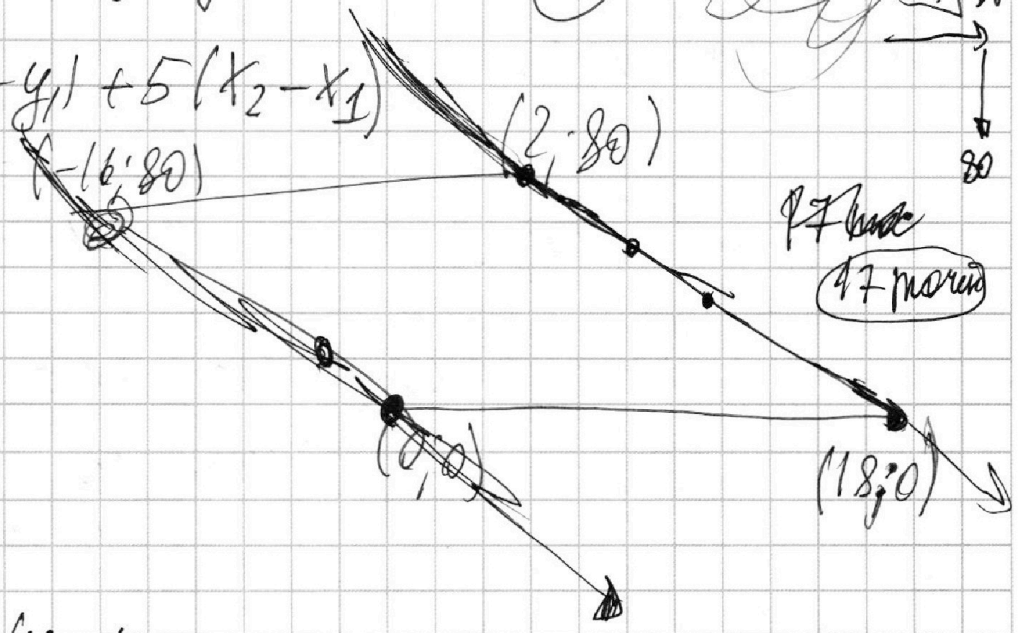
$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$45 = (y_2 - y_1) + 5(x_2 - x_1)$

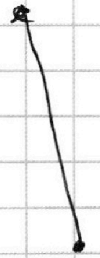
$y_2 = 5x_2$?

$y_2 + 5x$

$y_2 = B - 5x$



97 баллов
97 точек



$45 = y_2 - y_1 + 5x_2 - 5x_1$

1 задание

$y_2 = -5x_2 + (45 + y_1 + 5x_1)$

$B \in [0; 5...; 80$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 - \log_{8x^2}(625) = \log_5^4 y + 4\log_y 5 - \log_y \frac{1}{2}$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4 y - 4\log_{2x}5 - \log_{8x}$$

$$(\log_5^2(2x) + \log_5^2(y))(\log_5(2x) - \log_5 y)(\log_5 2x + \log_5 y)$$

$$-4\log_{2x}5 - \log_{8x^3}5 - 4\log_y 5 + \log_y \frac{1}{2} = 0$$

$$-4(\log_{2x}5 + \log_y 5) \qquad 5^{\frac{a}{3}} \qquad 125^{\frac{4}{3}}$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3$$

$$\boxed{\log_5^4(2x) - \frac{13}{3\log_5(2x)} = 3} \qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{y} = \frac{t+y}{ty}$$

$$(x^2+y^2)(t+y)(t-y) - \frac{13}{3}\left(\frac{t+y}{ty}\right) = 0 \qquad \boxed{t+y=0} \quad \boxed{ty=t}$$

$$(x^2+y^2)(t-y) - \frac{13}{3ty} = 0 \qquad x^2+y^2 = (t-y)^2 + 2t$$

$$(a^2+2t)a - \frac{13}{t} = 0 \qquad a^2+2t$$

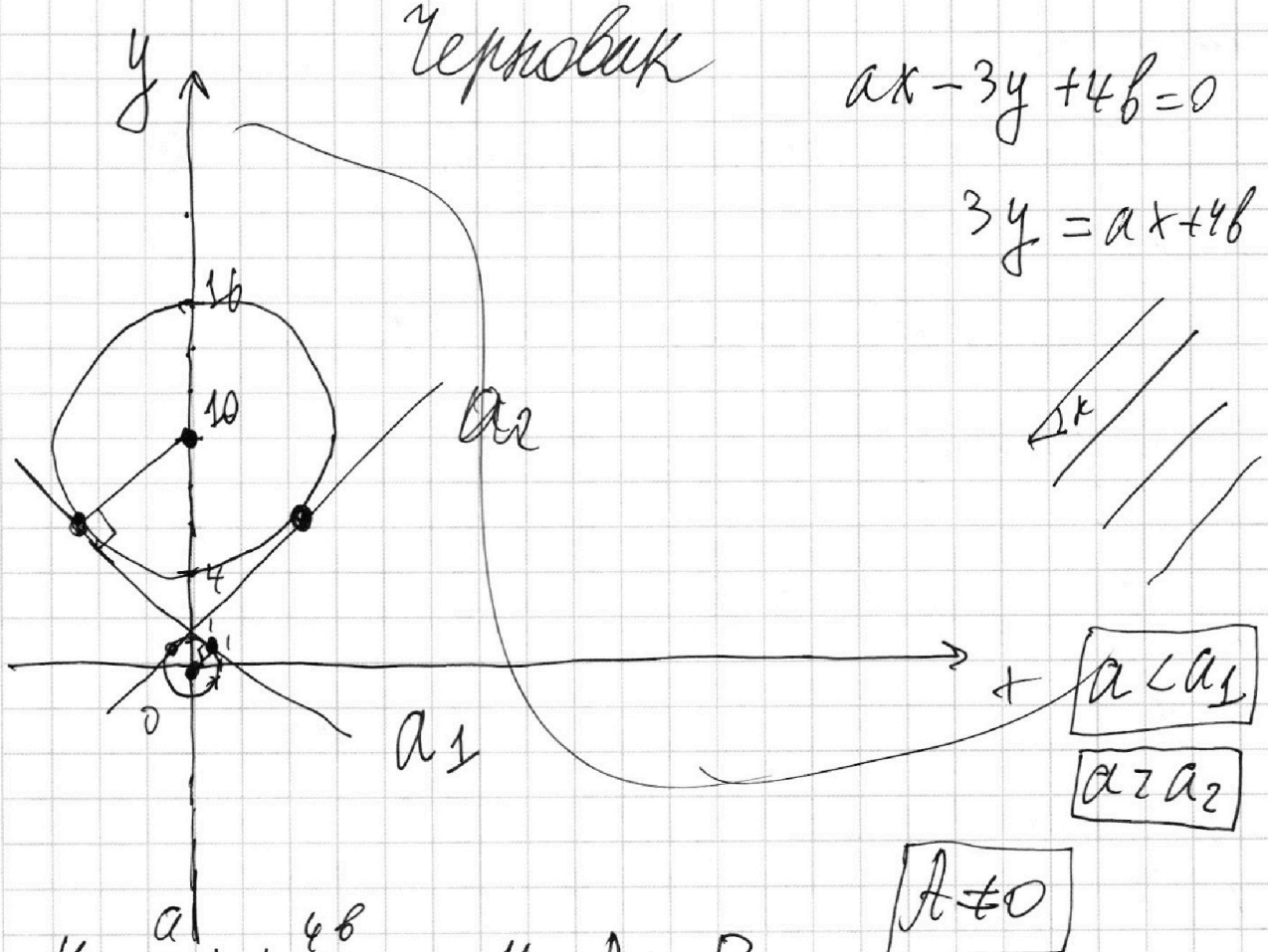
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



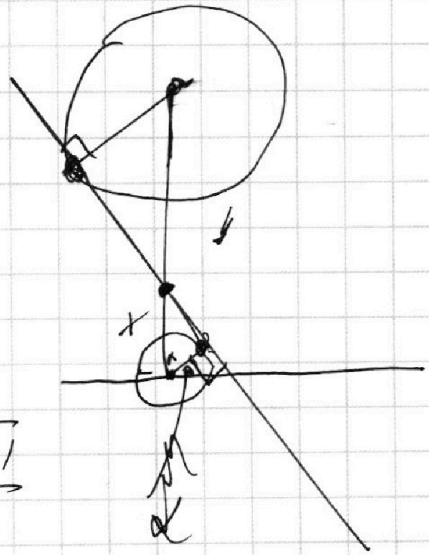
$ax - 3y + 4b = 0$

$3y = ax + 4b$

Δx

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ $\quad y = Ax + B$

$A \neq 0$



$\frac{1}{6} = \frac{x}{y}$ $\quad 6x = y$

$x + y = 10$

~~$x = \frac{7}{7}$~~ $\quad x = \frac{10}{7}; y = \frac{60}{7}$

$\cos\alpha = \frac{1 \cdot 7}{10} = \frac{7}{10}$ $\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{\sqrt{51}}$