



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot r$, $r \in \mathbb{N}$.
 $bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m$, $m \in \mathbb{N}$.
 $ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20} \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$.

Заметим, что $abc : a^2$, т.е. $abc : 5^{20}$.

Перемножим ab , bc и ac :

$$(abc)^2 = 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+20} \cdot r \cdot m \cdot k,$$

$$(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{43} \cdot r \cdot m \cdot k.$$

Заметим, что если $abc \leq \text{некоторое } 20$,
 то степень вхождения 3 в abc ~~не может быть~~
 $(abc)^2 \leq 40$, но она точно не может 41

т.е. степень вхождения тройки в abc
 не меньше 21.

Аналогично, степень вхождения 2 в abc
 не меньше 21

тогда наим. abc , которое может быть
 это $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{20}$

Это возможно при $a = 2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$
 $b = 2^7 \cdot 3^3$

$$ab = (2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}) \cdot (2^7 \cdot 3^3) = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

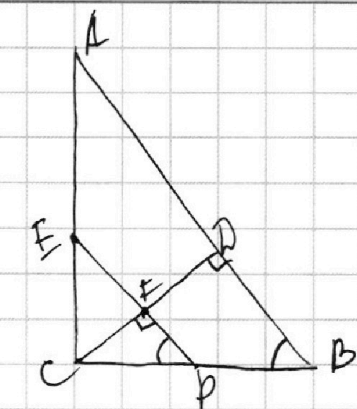
$$bc = (2^7 \cdot 3^3) \cdot (2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}) = 2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^{13}$$

$$ac = (2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}) \cdot (2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}) = 2^{21} \cdot 3^{25} \cdot 5^{30}$$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{20}$.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $\triangle ABC$ - прямоугольный, AD и AB -
проекции катетов на гипотенузу,
тогда $AD^2 = AC^2 \cdot AB$
 $AB^2 = CB^2 \cdot AB$

$AD:AB = 3:1$, т.е. $AC^2:CB^2 = 3:1$,
т.е. $AC:CB = \sqrt{3}$

т.к. $\angle CBA = AC:CB = \sqrt{3}$, т.е.
 $\angle CBA = 60^\circ$, тогда

т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle ABC = \angle EPC = 60^\circ$, где $P = EF \cap CB$.

2) Пусть $CP = x$, $PB = y$,
 $CD \perp AB$, $AB \parallel EF$ } $\Rightarrow CF \perp EP$, $\triangle CFP$: $\angle F = 90^\circ$, $\angle P = 60^\circ$,
т.е. $FP = \frac{1}{2} CP$

$\triangle ECP$: $\angle C = 90^\circ$, $\angle P = 60^\circ$, т.е. $CP = \frac{1}{2} EP$, $EP = 2x$

тогда т.к. FE - касательная к окружности, то применим
свойство касательной: $PB^2 = PF \cdot PE$
 $y^2 = \frac{x}{2} \cdot 2x$, $y^2 = x^2$, $y = x$, т.е. P - с.р. CB .

3) Тогда EP - линия, параллельная AB , проходящая через с.р. CB ,
т.е. содержит серединного перпендикуляра к AB , $\triangle CBA$
 EP - ср. линия $\triangle CBA$, EF - ср. линия $\triangle CBA$,
тогда $S_{EFC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$

4) $AD:AB = 3:1$, т.е. $S_{\triangle CAD}:S_{\triangle ABD} = 3:1$,
 $S_{\triangle CAD} = \frac{3}{4} S_{ABC}$

тогда $S_{EFC} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{3}{16} S_{ABC}$
 $S_{ABC}:S_{EFC} = 16:3$

Ответ: 16:3



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}.$$

$\arcsin$ имеет это значение от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ включ.

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{где } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2}.$$

тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \\ -\pi \leq -x + 2\pi k \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -\pi \leq -x + 2\pi k \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -6\pi \leq -(2\pi + 10\pi k) + 12\pi k \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -4\pi \leq 2\pi k \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi + 10\pi k = 6x \\ k \in \mathbb{Z} \\ -2 \leq k \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi(1+5k)}{6} \\ k \in \mathbb{Z} \\ -2 \leq k \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ x=2\pi \\ k=0 \\ x=\frac{\pi}{3} \\ k=-1 \\ x=-\frac{4\pi}{3} \\ k=-2 \\ x=-3\pi \end{cases}$$

Ответ: $\left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

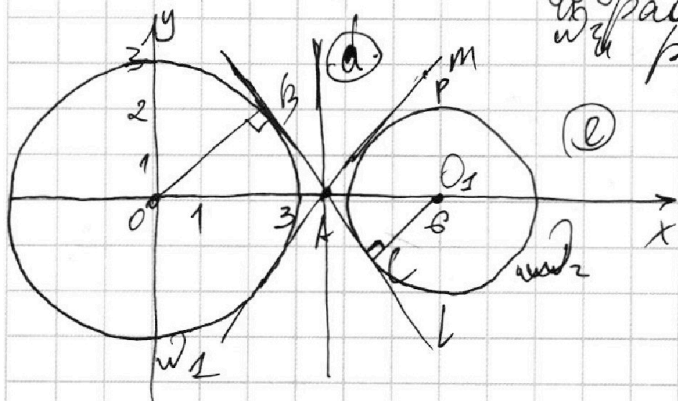
$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$(1) (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-9)((x-6)^2+32-36+y^2)=0,$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \Rightarrow \text{решения}$$

~~эти уравнения создают является множеством точек, представляющие~~

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases}$ - решения уравнения (1) будут окр. с центром $(0,0)$ и радиусом 3 и окр. с центром $(6,0)$ и радиусом 2.



2) $ax+2y-3b=0$ - уравнение прямой $y^2=0x+3b$ следовательно, чтобы было 4 решений. Прямая имеет с окр. макс. 2 общие точки, т.е. необходимо, чтобы прямая пересекала каждую окр. в двух точках.

Заметим, что параметр a задает наклон этой прямой, параметр b задает перенос на центр $(0; \frac{3b}{2})$.

~~Можно было рассмотреть также прямые, которые никаким парам.~~

3) Проверим взаимно касательные окружности. Каждая из окр. симметрична относ. Ox , т.е. их кас. точки будут симметри. относ. Ox и т. перес. кас., точка A , будет лежать на Ox .

Рассмотрим одну из кас., пусть она кас. w_1 в т. B_1 , w_2 в т. C_1 , $O_2(6,0)$ - центр w_2 . т.к. ради. окр. проведен. в т. кас., перпенд. кас., то $\angle B_1C_1O_2 = 90^\circ$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$OB \perp AB$, $O_1C \perp AC$. $\angle BAO = \angle O_1AC$ как вершин.
поэтому $\triangle OBA \sim \triangle O_1CA$, т.е. $\frac{OA}{AO_1} = \frac{OB}{OC} = \frac{3}{2}$ — радиусы.

$$OA + AO_1 = OB_1 = 6.$$

поэтому $\begin{cases} OA = 1,5 AO_1 \\ OA + AO_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OA = \frac{18}{5} \\ OA_1 = \frac{12}{5} \end{cases}$

$\triangle ACO_1$: по теореме $AC = \sqrt{AO_1^2 - OC^2} =$
 $= \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 4} = \sqrt{\frac{44}{25}} = \frac{2\sqrt{11}}{5}$

поэтому $\tan \angle O_1AC = \frac{OC}{AC} = 2 \cdot \frac{5}{2\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$

$\angle O_1AC$ — угол между кас. и OX .

$\angle(L; OX) = \angle(m; OX)$, т.е. угол наклона
и есть угол наклона прямой.

Поэтому кас. этой прямой с наклоном $\frac{5}{\sqrt{11}}$ к OX
проход. чрез $\left(\frac{18}{5}; 0\right)$.

т. $y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}$, $L: y = \frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}}$.

4) Рассмотрим все прямые, проход. через т. A .
если это кас, то они имеют с окр. по 1
точку, всего 2 решения, т.е. подходит.

5) Если это прямые, которые проходят через
область $\odot$ (см. на рисунке), то они
не имеют точек т. $\odot$. Все прямые
окр. находятся по разные стороны от
касательной. Прямые, пар. прямой M
будут по одну сторону от прямой M , проход.
через A , т.е. по одну сторону с областью из
окр. и по другую с другой, т.е. могут быть
тоже две точки с областью, т.е. макс 2,
а не 4.

$\odot$ область между кас., в которую не входят
окр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) ^{каждой из} Прямых, кас. не имеют так же
расстояния до осей координат-но сфериче-
ски от осей, которой она кас. Окр. касаются
по разные стороны от кас. т.е. прямые
кас. по одну сторону только одной осей, т.е. прямые
прямые, кас. могут иметь макс. 2 общие
точки с осью, а не 4.

б) Если это прямая W , проходящая через область
(E), то они имеют две пересечения
каждую ось. В двух точках, т.е. есть
"решение". (Область (E) это область между
кас. осей W_1 и W_2). т.е.

Значит нам подходят прямые, проходящие
угловыми коэф. что если они проходят через
т. A , то они не имеют точек пересечения в
области (E).

т.е. это прямые с угл. коэф. от 0 до
 $\frac{5}{\sqrt{11}}$ (касательная m) и от $-\frac{5}{\sqrt{11}}$ (кас. l)
до 0. (0 касательная).

в) Коэф. прямой $y = \frac{-ax + 3b}{2}$ это $-\frac{a}{2}$
т.е. $-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$, $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8.$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$$

Пусть $\log_3 x = a, a \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} a^4 + 6 \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8 \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$2) \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8.$$

$$\log_3 5y = \frac{1}{\log_{5y} 3}$$

Пусть $\log_3 5y = b, b \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} b^4 + 2 \frac{1}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8 \\ b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b^5 + 16b - 7 = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

3) Рассмотрим функции $f(t) = 2t^5 + 16t + 7$
и $g(t) = 2t^5 + 16t - 7$.

$2t^5 \nearrow$ на $\mathbb{R}$, $16t + 7 \nearrow$ на $\mathbb{R}$, т.е.

$f(t) \nearrow$ на $\mathbb{R}$ как сумма возр. функций.

$$f(0) = 7 > 0, f(-1) = -2 - 16 + 7 = -11 < 0,$$

$f(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ как сумма непрерывных функций, тогда по т. Больцано-Вейерштрасса на $\mathbb{R}$ найдется такое c , что $f(c) = 0$.

А так как $f(t)$ строго монотонна, то такое c — единственное. $c = a$, т.к.

$$2a^5 + 16a + 7 = 0 \text{ из 1).}$$

Аналогично $g(t)$ имеет ед. корень и этот корень b .

1-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$$f(a) = 2(2a)^5 + 16(2a) + 7 = 2a^5 - 16a + 7 =$$~~

~~$$= -7$$~~

$$z \in \mathbb{R}: f(z) = 2(-z)^5 + 16(-z) + 7 =$$

$$= -2z^5 - 16z + 7 = -(2z^5 + 16z - 7) = -g(z).$$

т.е. $f(-z) = -g(z).$

$$g(b) = 0, \text{ т.е. } 0 = g(b) = -g(b) = f(-b).$$

$$f(-b) = 0, \text{ но } a - \text{ ед. корень } f(t) = 0$$

т.е. $a = -b.$

4) т.е. $\log_3 x = -\log_3 5y$

$$\log_3 x = \log_3 (5y)^{-1}$$

$$x = \frac{1}{5y}$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}.$

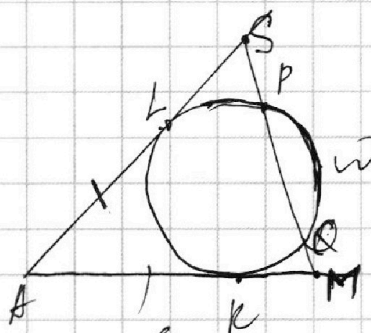
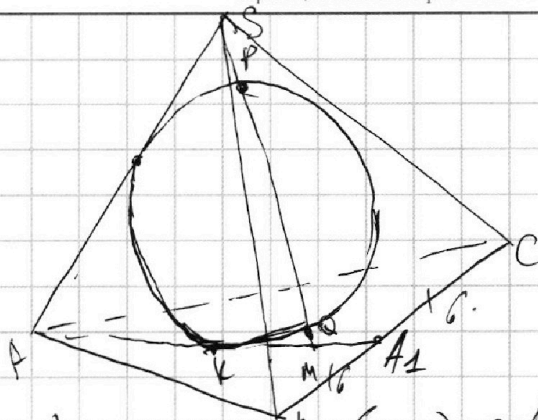
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- а) 1) **Решение!**
 $(AMS) \cap SL$ по оар.
 $L, K, Q, P \in (AMS)$ и $\in SL$, т.е. L, P, Q, K
 лежат на одной оар. ω
 AL и AK - кас. к SL , т.е. кас. к ω
 $AL = AK$ - как отрезки кас, проведен. из L .

Запишем равенства мощей S и M :

$$SL^2 = SP \cdot SQ, \quad MK^2 = MQ \cdot MP, \quad (SL \text{ и } MK \text{ - кас.})$$

$$SP = QM \text{ - по усл. } SQ = SP + PQ, \quad MP = SP + QM, \quad \text{т.е. } QS = MP.$$

$$\text{т.е. } SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = KM, \quad SL = MK.$$

$$\text{т.е. } AS = AM = 12$$

- 2) M - т перес. ~~перес.~~ ^{т.е.} $AM = \frac{2}{3} AA_1$, т.е.
 $AA_1 = 18$.

$$S_{BAA_1} = S_{CAA_1}, \text{ т.к. } AA_1 \text{ - высота, } S_{ABC} = 2S_{BAA_1}.$$

$$S_{AAB} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin \angle (AA_1, AB) / 2.$$

$$\text{Пусть } \angle (AA_1, AB) = \alpha, \text{ тогда}$$

$$S_{ABC} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha.$$

$$18 \cdot \frac{12}{2} \cdot \sin \alpha = 90^\circ, \quad \sin \alpha = \frac{5}{6}.$$

Пусть, учитывая условие $AB \perp AC$, тогда.

$$\text{В } \triangle AA_1B \quad \angle AA_1B \text{ - острый, } \cos \angle AA_1B =$$

$$= 1 - \sin^2 \angle AA_1B = \frac{11}{6}.$$

$$\triangle AA_1B \text{ по т. косинусов: } AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2 \cos \angle AA_1B \cdot AA_1 \cdot A_1B$$

$$AB^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot \frac{11}{6} \cdot 18 \cdot 6 = 2(9^2 + 3^2 - 11 \cdot 9) =$$

$$= 6^2(3^2 + 1^2 - 11) \quad AB = 6 \sqrt{10 - 11}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ABC$ по косинусов $\cos \angle A_1 C = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2 \cos \angle A_1 \cdot AA_1 \cdot A_1C$

$AC^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot 18 \cdot 6$

$AC^2 = 6^2(9+1+\sqrt{11})$ $AC = 6\sqrt{10+\sqrt{11}}$

3) $\triangle ABC$ по косинусов $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cos \angle A \cdot AC \cdot AB$
 $12^2 = (6\sqrt{10-\sqrt{11}})^2 + (6\sqrt{10+\sqrt{11}})^2 - 2 \cos \angle A \cdot 6\sqrt{10-\sqrt{11}} \cdot 6\sqrt{10+\sqrt{11}}$
 $4 = 10 - \sqrt{11} + 10 + \sqrt{11} - 2 \cos \angle A \cdot \sqrt{100-11}$
 $\cos \angle A = \frac{10+10-4}{2 \cdot 89} = \frac{16}{178} = \frac{8}{89}$

$\triangle ACC_1$ по косинусов:

$CC_1^2 = AC^2 + AC_1^2 - 2 \cos \angle A \cdot AC \cdot CA$

$CC_1^2 = 6^2(10+\sqrt{11}) + 3^2(10-\sqrt{11}) - 2 \cos \angle A \cdot 6 \cdot 3 \sqrt{10+\sqrt{11}} \cdot \sqrt{10-\sqrt{11}}$

$CC_1^2 = 8^2(10+\sqrt{11}) + 3^2(10-\sqrt{11}) - 2 \cdot \frac{8}{89} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 89$

$CC_1^2 = 3^2(40+4\sqrt{11}+10-\sqrt{11}) - 4 \cdot 8$

$CC_1^2 = 3^2(3\sqrt{11}+50-32)$ $CC_1 = 3\sqrt{3\sqrt{11}+18}$

$\triangle BB_1$ по косинусов:

$BB_1^2 = BA^2 + AB_1^2 - 2 \cos \angle A \cdot BA \cdot AB_1$

$BB_1^2 = 6^2(10-\sqrt{11}) + 3^2(10+\sqrt{11}) - 2 \cos \angle A \cdot 6 \cdot 3 \sqrt{10-\sqrt{11}} \cdot \sqrt{10+\sqrt{11}}$

$BB_1^2 = 3^2(40-4\sqrt{11}+10+\sqrt{11}) - 2 \cdot \frac{8}{89} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 89$

$BB_1^2 = 3^2(50-3\sqrt{11}-32)$ $BB_1 = 3\sqrt{18-3\sqrt{11}}$

поэтому $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 3\sqrt{11+18} \cdot 3\sqrt{18-3\sqrt{11}} =$

$= 18 \cdot 9 \sqrt{18^2 - (3\sqrt{11})^2} = 18 \cdot 9 \cdot 3 \sqrt{6^2 - 11} = 18 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5 =$

$= 2 \cdot 81 \cdot 3 \cdot 5 = 2430$

Ответ: 2430.

6) SN кас. SL , т.е. $SL = SN = 4$.

$AL = AR = 8$

$BN = BK$, $CN = CK$. $\triangle KBC = \triangle NBC$.

По косинусов можно найти BK , CK .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + 32 + y^2 = 0.$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$$

$$y = \frac{-ax + 3b}{2}$$

$$-\frac{a}{2}$$

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$x = \frac{3b - 2y}{a}$$

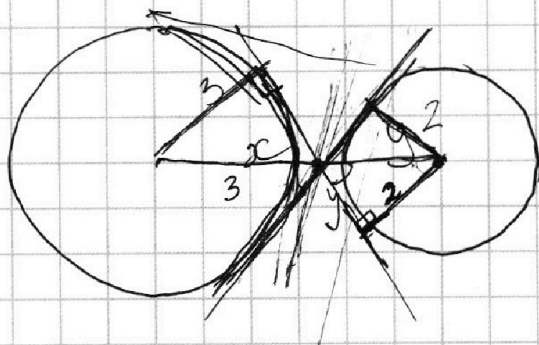
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

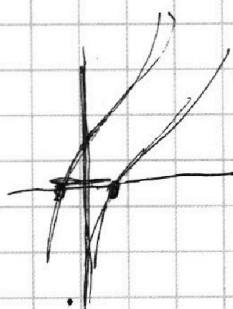
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~3+20~~

$$\begin{aligned} x+y &= 6 \quad | \cdot 2 \\ \frac{x}{y} &= \frac{3}{2} \quad | \cdot 2 \Rightarrow 2x=3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y+2y &= 12 \\ 4y &= 12 \\ y &= \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{12}{5} \cdot \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}} &= \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{140}{25}} = \frac{2\sqrt{35}}{5} \end{aligned}$$

$$tg = \frac{\frac{2}{2\sqrt{35}}}{\frac{5}{5}} = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8.$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8.$$

$$a^4 + 6 \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \frac{1}{a} - 8$$

$$a^5 + 6 = 2,5 - 8a.$$

$$a^5 + 8a + 3,5 = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0.$$

$$\log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8.$$

$$b^4 + 2 \frac{1}{b} = \frac{11}{2} \frac{1}{b} - 8$$

$$b^5 + 8b - 3,5 = 0$$

$$b^5 + 8b - 3,5 = 0 \quad 2b^5 + 16b - 7 = 0.$$

$$a = -b$$

$$\frac{2}{25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

$$\frac{2(a^5+b^5)}{(a+b)(a^4-b^4+b^2a^2-b^2a+b^4)} = 0.$$

$$a = -b$$

$$\log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} 5y^{-1}$$

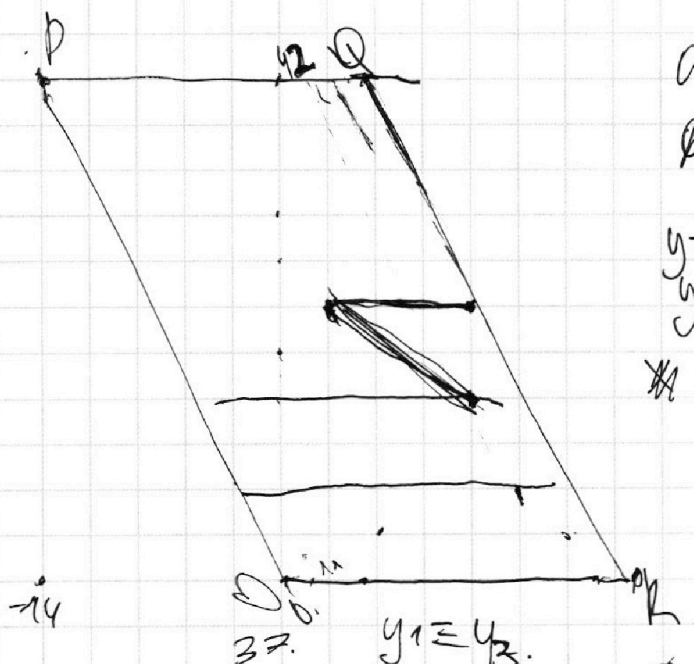
$$y_1 = y_2$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y}$$

5

$$3 \cdot (x_1, y_1)$$

$$f(z) = -z^5 - 16z + 7 = -(z^5 + 16z - 7) = -g(z)$$



$$0 \leq y \leq 42$$

~~14~~ $-14 \leq 20$

yz42
y 20.

$$42 = -14x + 6$$

$y = -3x$

$$y = -3x + 60$$

$$33 + 3x_1 + y_1 = 33 + 3x_2 + y_2$$

$$y \leq 4z$$

$$y \geq -3$$

$$y \leq -3x + 60$$

2



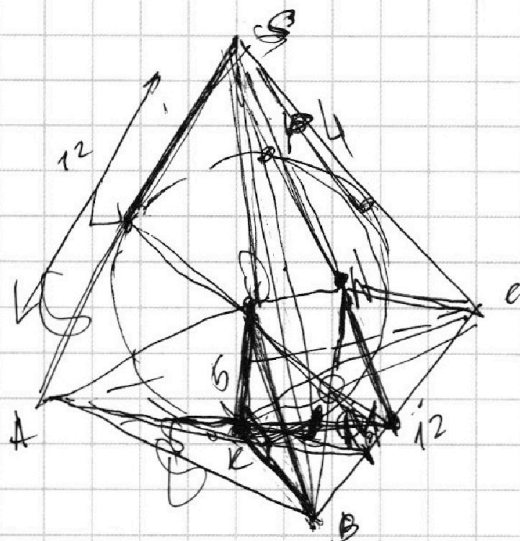
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

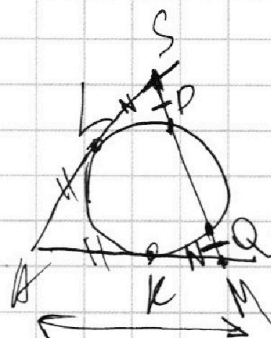
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$$

$$AB = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$



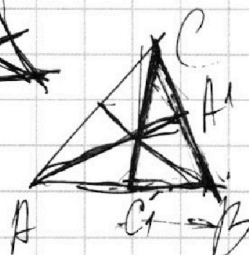
$$AA_1 = 18$$



$$18 \cdot \sin \angle \cdot 6 \neq 90$$

$$\sin \angle \neq \frac{5}{6}$$

$$2 \frac{\sqrt{11}}{4}$$



$$1 - \frac{25}{36}$$

$$\left(3 + \frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2$$

$$9 + \sqrt{11} + \frac{11}{36} + \frac{25}{36}$$

$$\frac{45^2 \pm 90 \pm 6}{2} \times$$

$$\frac{5}{6}$$

$$AB = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$

9

$$6(10 - \sqrt{11})$$

$$x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$45^2 = \frac{\sqrt{10 - \sqrt{11}} + 6}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10 - \sqrt{11}} + x + 6}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot r$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m$$

$$ac = 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot q$$

$$9+14+19 = 14+18 = 18$$

$$(abc)^2 = 2^{32} \cdot 3^{44} \cdot 5^{53} \cdot r \cdot m \cdot q$$

$$abc = 2^{24} \cdot 3^{22} \cdot 5^{27}$$

$$a = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13}$$

$$ca =$$

$$abc = 2^{24} \cdot 3^{22} \cdot 5^{27}$$

$$2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

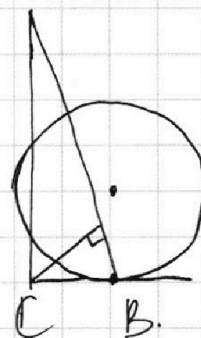
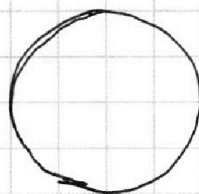
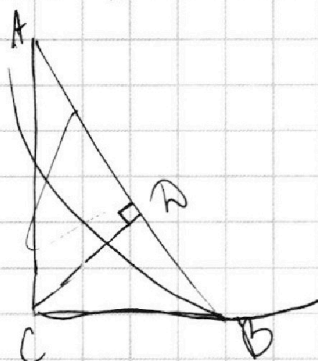
$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$a = 2^7 \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

$$b =$$

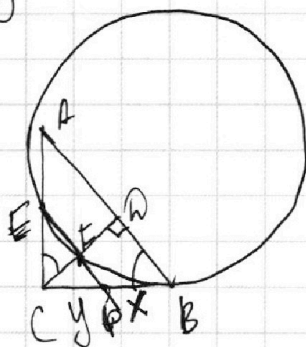
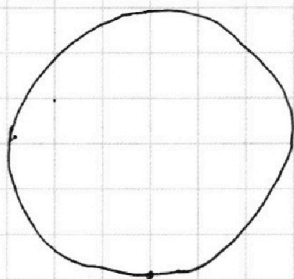
$\sqrt{2}$



$$FP = \frac{y}{2}$$

$$\angle B = 60^\circ$$

$$EP = 2y$$



$$AD = \frac{AC^2}{AB}$$

$$DB = \frac{CB^2}{AB}$$

$$\left(\frac{AC}{CB}\right)^2 = 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} \\ 5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq -x + 2\pi k \leq 0 \\ \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq -x + 2\pi k \leq 0 \\ \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow 2\pi + 10\pi k = 6x$$

$$x = \frac{2\pi(1+5k)}{6}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{2\pi(1+5k)}{6} + 2\pi k \leq 0$$

$$-3\pi \leq -2\pi - 10\pi k + 12\pi k \leq 0$$

$$-\pi \leq 2\pi k \leq 2\pi$$

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq 1$$

0, 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

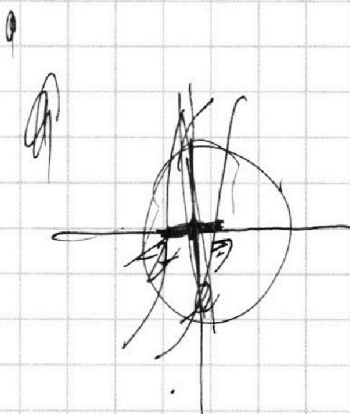
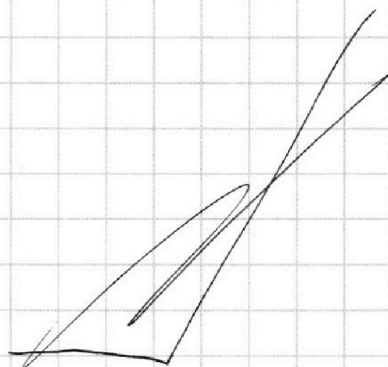
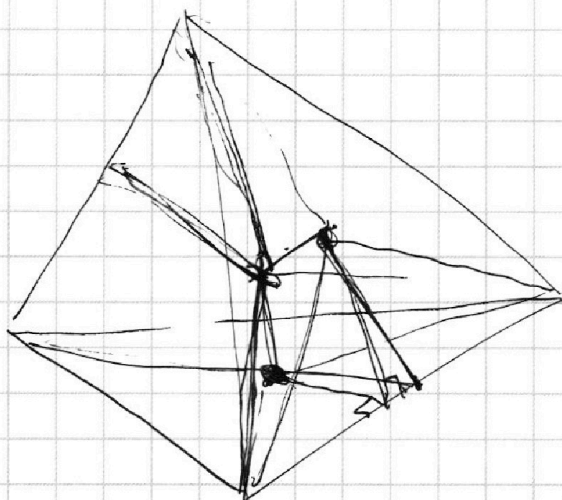
5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$aH - 2y + b.$$

$$\log \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}.$$

$$\frac{27 - 34}{6}.$$

$$\frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

