



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$f, a, b: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, \quad a, b, c: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}, \quad a, c: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

н.о.ч. a, b, c

Пусть $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ - степени в каноническом разложении a ;

Аналогично определим $\beta_2, \beta_3, \beta_5$ для b и $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ для c

$$U_3 \quad (1): \alpha_2 + \beta_2 \geq 8$$

$$(2): \beta_2 + \gamma_2 \geq 12$$

$$(3): \alpha_2 + \gamma_2 \geq 14$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{34}{2} = 17$$

$$\text{напр.: } \beta_2 = 3, \alpha_2 = 5, \gamma_2 = 9$$

$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 14$$

$$\beta_3 + \gamma_3 \geq 20$$

$$\gamma_3 + \alpha_3 \geq 21$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \frac{55}{2} \geq \frac{28}{2}, \text{ т.е. } \Sigma \leq \text{н.о.ч.}$$

$$\text{напр.: } \alpha_3 = 8, \beta_3 = 6, \gamma_3 = 14$$

$$U_5 \quad (1): \alpha_5 + \beta_5 \geq 12$$

$$(2): \beta_5 + \gamma_5 \geq 17$$

$$(3): \gamma_5 + \alpha_5 \geq 39$$

$$\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 35$$

$$\text{возьмем } \alpha_5 = 19, \gamma_5 = 20, \text{ тогда}$$

$$\alpha_5 + \beta_5 \geq 19 \text{ и } \beta_5 + \gamma_5 \geq 20 - \text{OK}$$

~~Минимум~~

$$a, b, c \geq 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

$$\text{Пример: } a = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19}$$

$$b = 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5} = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^{20}$$

$$c = 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3} \cdot 5^{\gamma_5} = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

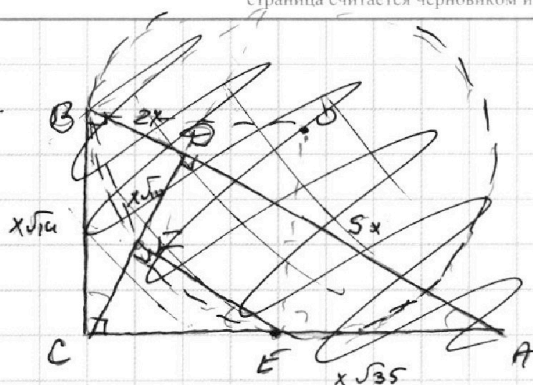
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



Пусть $AD = 5x$, тогда $BD = 2x$
 CD по формуле высоты из прямого угла — $x\sqrt{10}$

т.е. $FE \parallel AD$ $\angle CFE = 90^\circ$

По т. Пифагора $BC = x\sqrt{14}$

$$AC = x\sqrt{35}$$

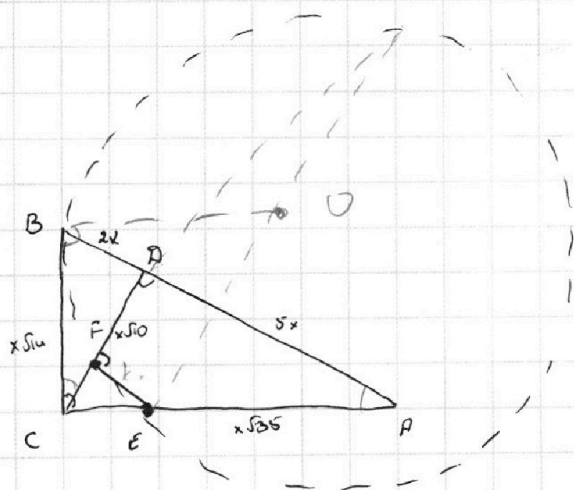
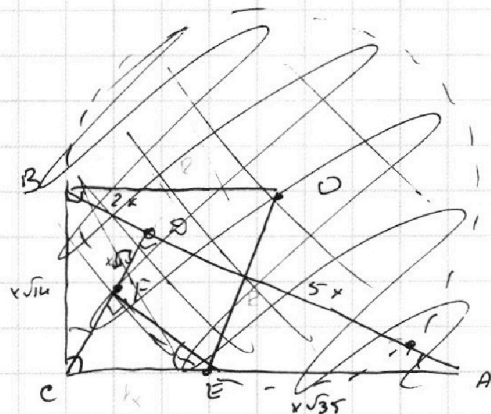
F лежит на окружности и
 $\angle EFD = 90^\circ \rightarrow \angle EFD$ опр. на диаметр

$$S_{\triangle BCE} = \frac{7}{5} \cdot S_{\triangle CED} \text{ по теореме о д. или площадей}$$

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CED}} = \left(\frac{FE}{5x}\right)^2 \rightarrow S_{\triangle CED} = S_{\triangle CEF} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$

$$S_{\triangle BCE} = \frac{7}{5} \cdot S_{\triangle CEF} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$

$$\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

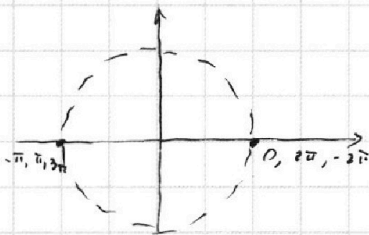
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 3. \quad 10 \operatorname{arcsin}(\cos x) &= \pi - 2x \\
 10 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos}(\cos x) \right) &= \pi - 2x \\
 5\pi - 10 \operatorname{arccos}(\cos x) &= \pi - 2x \\
 4\pi + 2x &= 10 \operatorname{arccos}(\cos x) \\
 2\pi + x &= 5 \operatorname{arccos}(\cos x) \\
 0 \leq \quad \leq 5\pi & \quad 0 \leq \quad \leq \pi
 \end{aligned}$$

$$x \in [-2\pi; 3\pi]$$



$$\begin{aligned}
 x \in [0; \pi] : \operatorname{arccos}(\cos x) &= x \\
 2\pi + x &= 5x; \quad 2\pi = 4x; \quad x = \frac{\pi}{2} - 0k \\
 x \in [\pi; 2\pi] : \operatorname{arccos}(\cos x) &= 2\pi - x \\
 2\pi + x &= 10\pi - 5x \\
 8\pi &= 6x; \quad x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} - 0k \\
 x \in [2\pi; 3\pi] : \operatorname{arccos}(\cos(x)) &= x - 2\pi \\
 2\pi + x &= 5x - 10\pi; \\
 12\pi &= 4x; \quad x = 3\pi - 0k
 \end{aligned}$$

$$x \in [-\pi; 0] : \operatorname{arccos}(\cos x) = -x; \quad 2\pi + x = -5x; \quad 2\pi = -6x; \quad x = -\frac{\pi}{3} - 0k$$

$$x \in [-2\pi; -\pi] : \operatorname{arccos}(\cos x) = x + 2\pi; \quad 2\pi + x = 5(x + 2\pi); \quad x = -2\pi - 0k$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi; -\frac{\pi}{3}; -2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

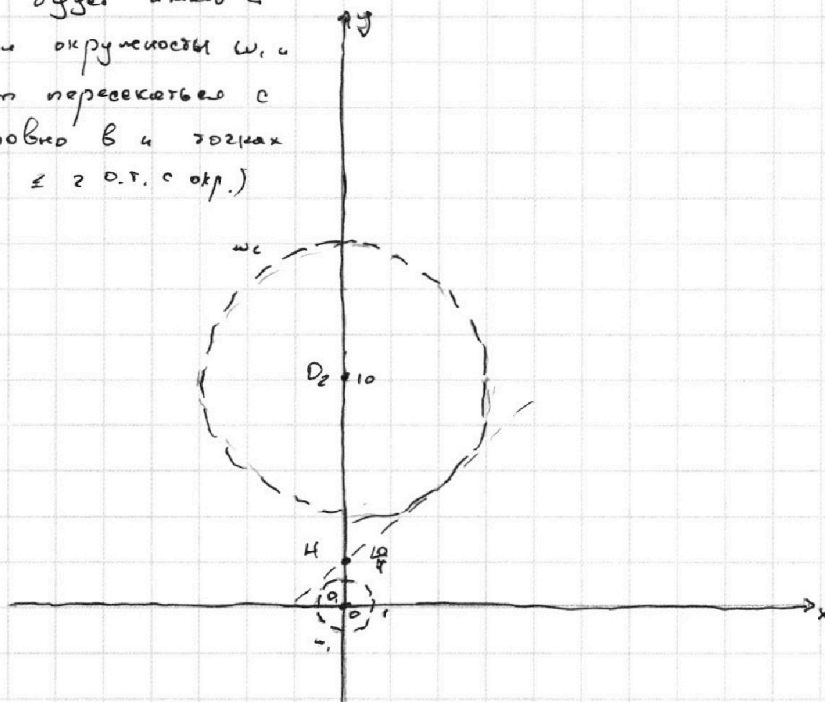


$$4. \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2ay + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

ω_1 ω_2

В системе координат xOy (1) задает прямую, (2) — две окружности (ω_1 и ω_2) $\omega_1: x^2 + y^2 = 1$ — центр $O(0;0)$ $R=1$, $\omega_2: x^2 + (y-10)^2 = 36$ — центр $O_2(0;10)$ $R=6$

система будет иметь 4 реш., если окружности ω_1 и ω_2 будут пересекаться с прямой ровно в 4 точках (у прямой ≤ 2 о.т. с окр.)



(1): $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$. Решим задачу для положительных a , получим также найденные a , но отрицательные (в силу симметрии картинки относительно Oz)

Графически, $\frac{4b}{3}$ отвечает за паралл. перенос прямой (1) вдоль Oz . Заметим, что при достаточно больших a у прямой точно будут 4 точки (общие) с окружностями. Найдем максимальное такое a , при котором будет не больше 3 о.т. с окружностями ω_1 и ω_2 . Проведем H — центр гомотетии окр-тей и через него общую касательную к крив. ω_1 . При $\frac{a}{3} > tg \varphi$ мы всегда сможем || перенести окружность ω_2 в центр гомотетии и будет 4 точки (при $\leq \frac{a}{3}$ будет не более 2-х общих точек ω_1 и ω_2 — видно графически)

$$\begin{aligned} O_1H : O_2H &= 1 : 6 ; O_1H = x, O_2H = 6x \rightarrow \\ O_1H + O_2H &= 10 ; 7x = 10 ; x = \frac{10}{7} \\ \rightarrow \text{исходн. т. } H &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

у координат $\tau \cdot H = \frac{10}{\sqrt{3}}$ прямая, проходящая через нее: $y = kx + \frac{10}{\sqrt{3}}$ -
имеет 2 общие точки с ω , (с ω_2 совп.)

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = kx + \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$x^2 + k^2 x^2 + \frac{20k}{\sqrt{3}} x + \frac{100}{48} = 1$$

$$x^2(1+k^2) + \frac{20k}{\sqrt{3}} x + \frac{51}{48} = 0$$

$$D = \frac{400k^2}{48} - 4 \left(\frac{51}{48} \right) \cdot (1+k^2) = 0$$

$$\frac{400k^2}{48} - \frac{204}{48} k^2 - \frac{204}{48} = 0$$

$$196k^2 = 204; \quad k^2 = \frac{51}{48} \quad k = \pm \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{3}}$$

Так, при $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{\frac{51}{3}}$ ω , где кот. (1) имеет 4 общие точки
при $\frac{a}{3} \leq \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{3}}$ (1) имеет ≤ 2 общие точек с ω .

(строгое это обосновать можно так: // перенесем прямую
(1) в центр тяжести. При перемещении её вниз
общие точки могут быть только с ω , выше - только с ω_2)

Поэтому а: $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{3}}; \quad a > \frac{3\sqrt{51}}{\sqrt{3}}$ (вкл. также случаи на отрезке
знамени)

Итак, ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{\sqrt{3}}; +\infty)$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5. $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4 \log_{2x} 5}{\log_{2x} 3 \log_{2x} 5} - 3$; ОДЗ: $x > 0$; $x \neq \frac{1}{2}$
 $y > 0$; $y \neq 1$

$\log_5^4 y - 4 \log_y 5 = \frac{\log_{y^3} 5}{-\frac{1}{3} \log_y 5} - 3$;

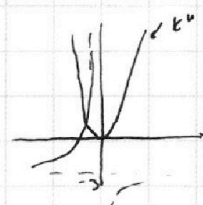
$\log_5^4(2x) = \frac{13}{3} \log_{2x} 5 - 3 = \frac{13}{3 \log_5(2x)} - 3$
 возр. на Д убыв на Д

если решение и существует, то оно единственно.

Пусть $\log_5(2x) = t$; $3t^5 + 9t - 13 = 0$

$\log_5^4 y = -\frac{13}{3} \log_5 5 - 3 = -\frac{13}{3 \log_5 y} - 3$; $k^4 = -\frac{13}{3k} - 3$
 Пусть $\log_5 y = k$ $3k^5 + 9k + 13 = 0$

$3t^5 + 9t - 13 = 0$
 $+ 3t^5 + 9t + 13 = 0$



$t^5 + k^5 + 3(t+k) = 0$; $(t+k)(t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3) = 0$

$t+k=0$

$t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3 = 0$

$\log_5 2xy = 0$
 $xy = \frac{1}{2}$

Относ. t и k , как доказано выше, могут иметь ровно 1 действительное решение, значит, в силу монотонного возрастания логарифма, существует только одно значение xy .

Проверим, что $xy = \frac{1}{2}$ - порх. $t = -k$; $3t^5 + 9t - 13 = 0$
 $-3t^5 - 9t + 13 = 0$

Если относ. t ур-е решено, то относ. k и $-t$ тоже

$f(t) = 3t^5 + 9t - 13$ $f(2) > 0$ - пох функции пересек на $(1; 2)$ - t_0

найдём x^* - корни $\log_5 2x = x_0$ $x = \frac{1}{2}$ - не корень, т.к. $x_0 > 1$

$\log_5 2x = -\log_5 y$ (подег. корень x^* юго и найдем y^*)
 пох. - $x^* = \frac{1}{2}$ $y^* = 1$

Ответ: $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

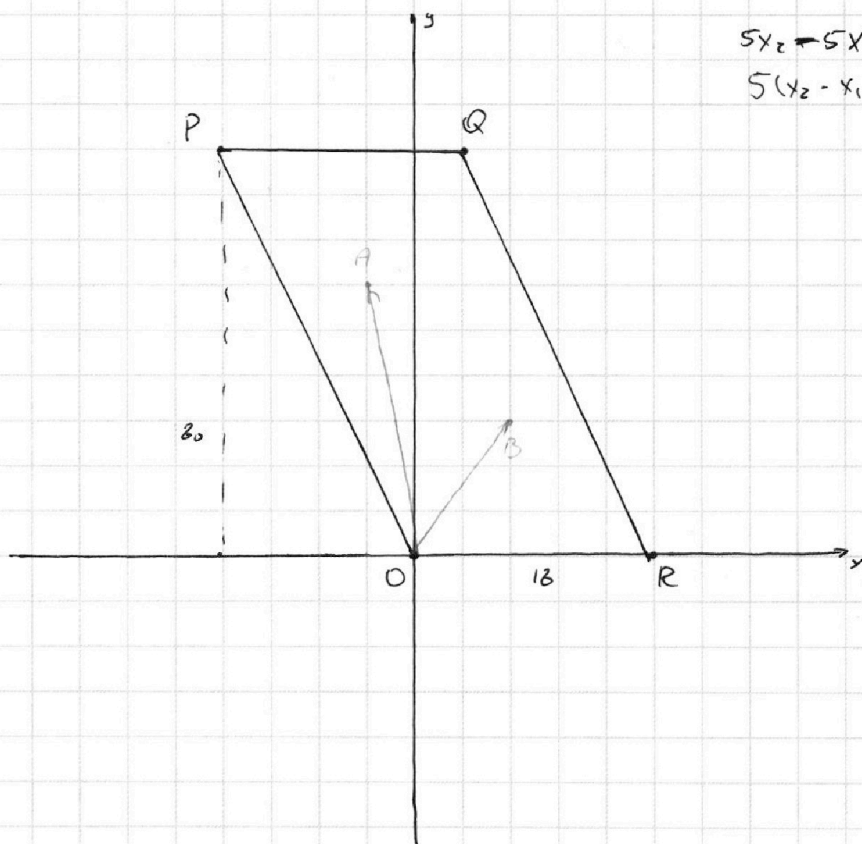
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$
$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$-b_0 \leq y_2 - y_1 \leq b_0$$

$$x_2 - x_1 = \frac{45 - (y_2 - y_1)}{5}$$
$$-18 \leq x_2 - x_1 \leq 18$$

$$-90 \leq 45 - (y_2 - y_1) \leq 90$$
$$-135 \leq y_1 - y_2 \leq 45$$



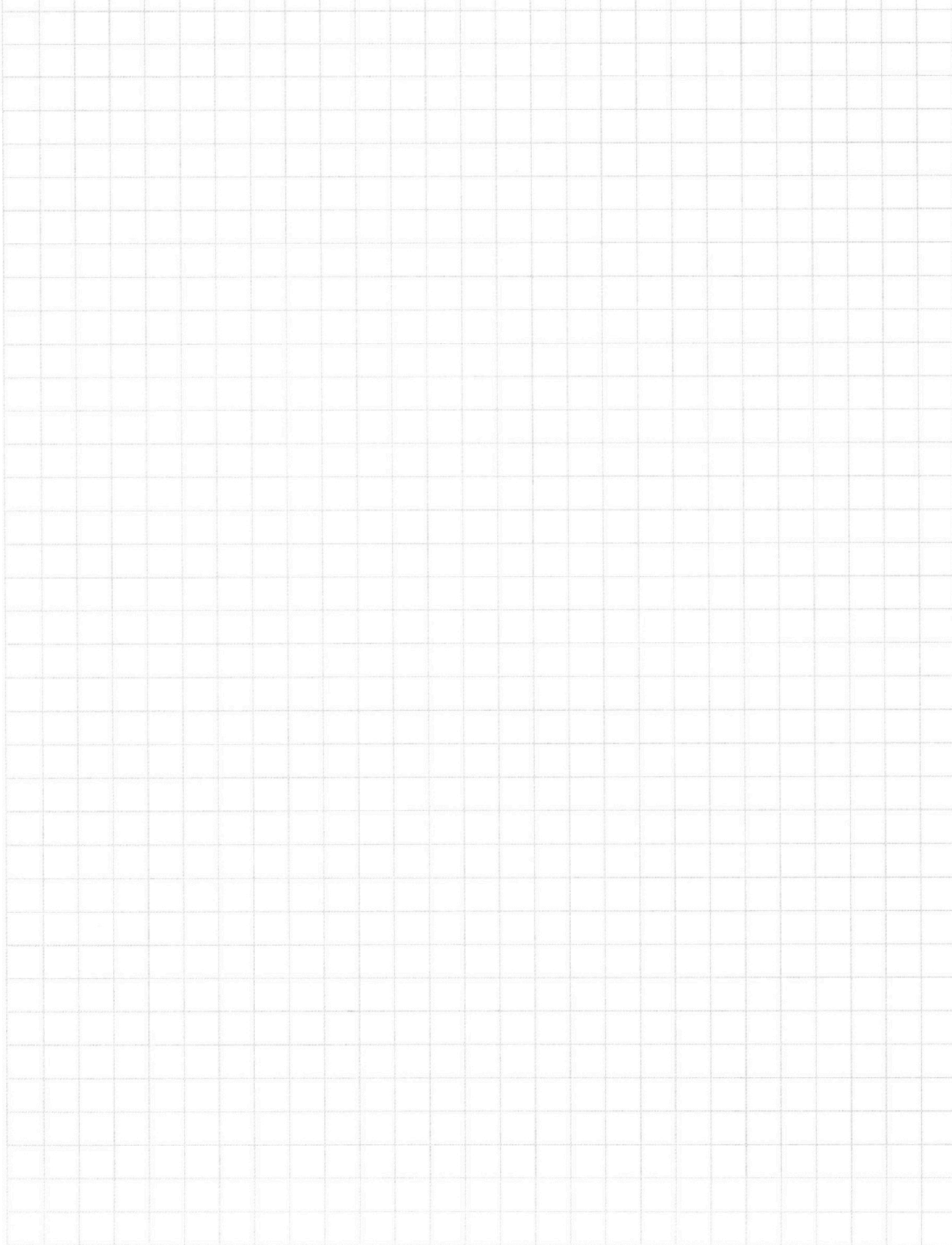
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





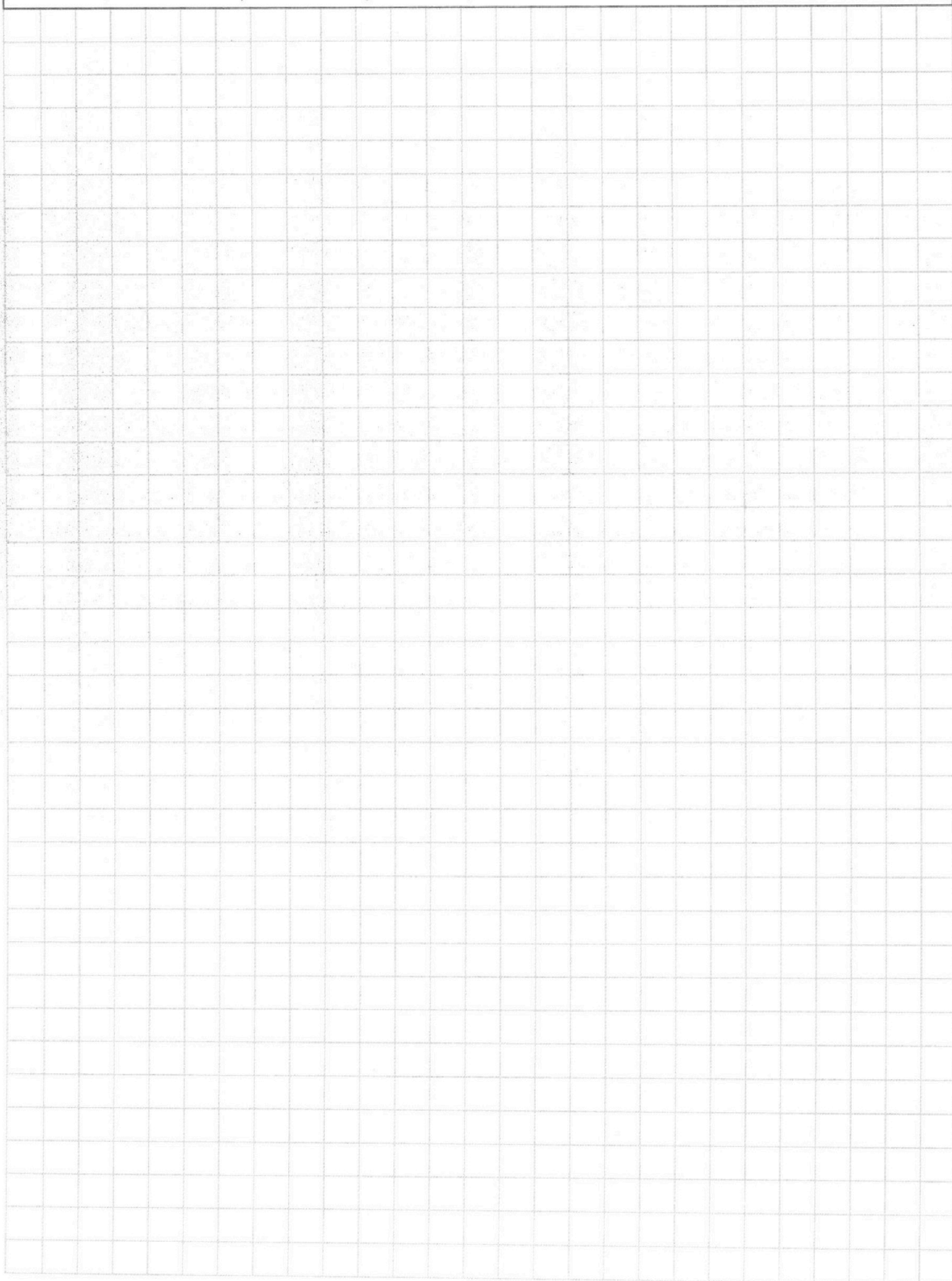
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





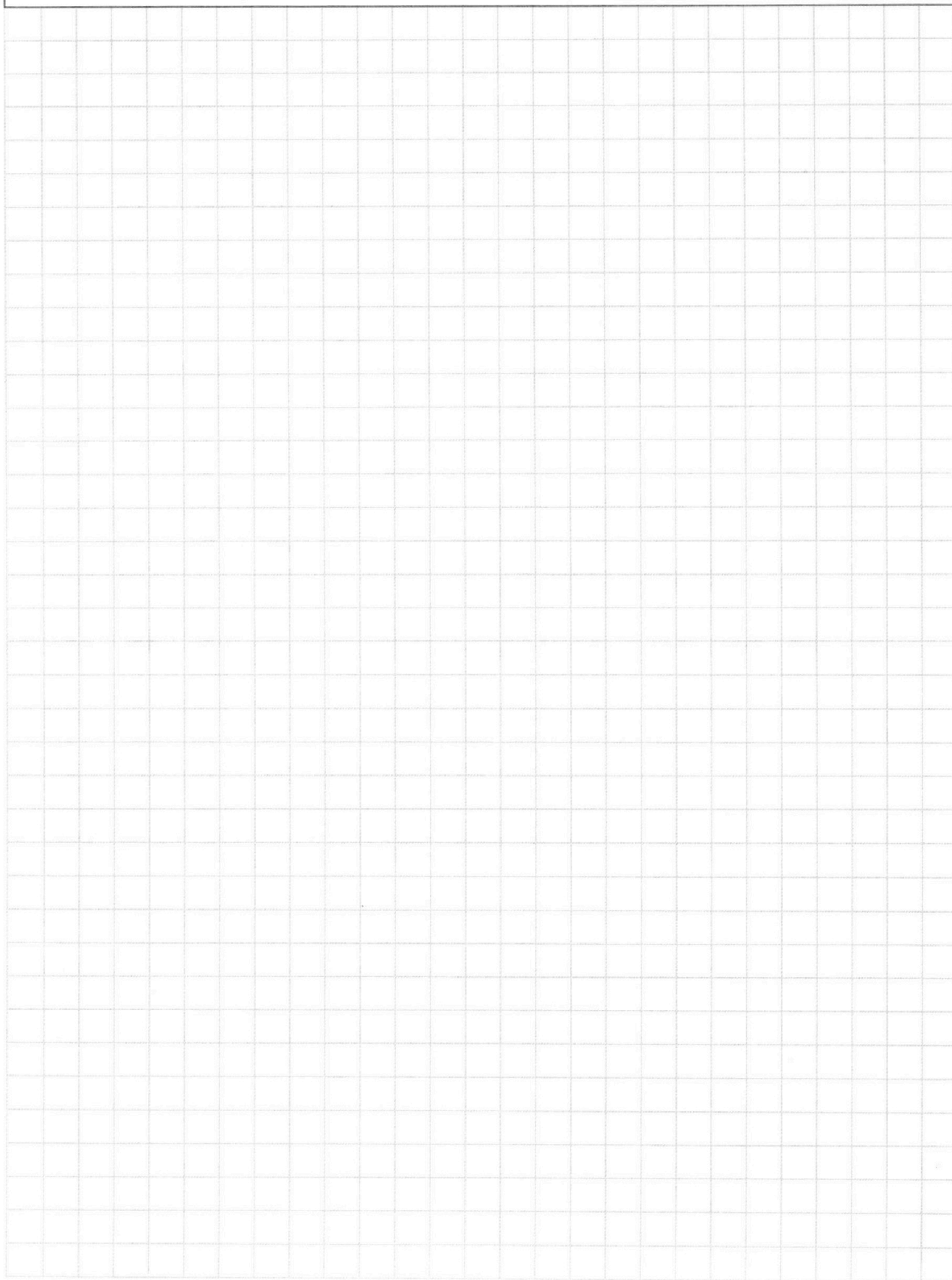
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





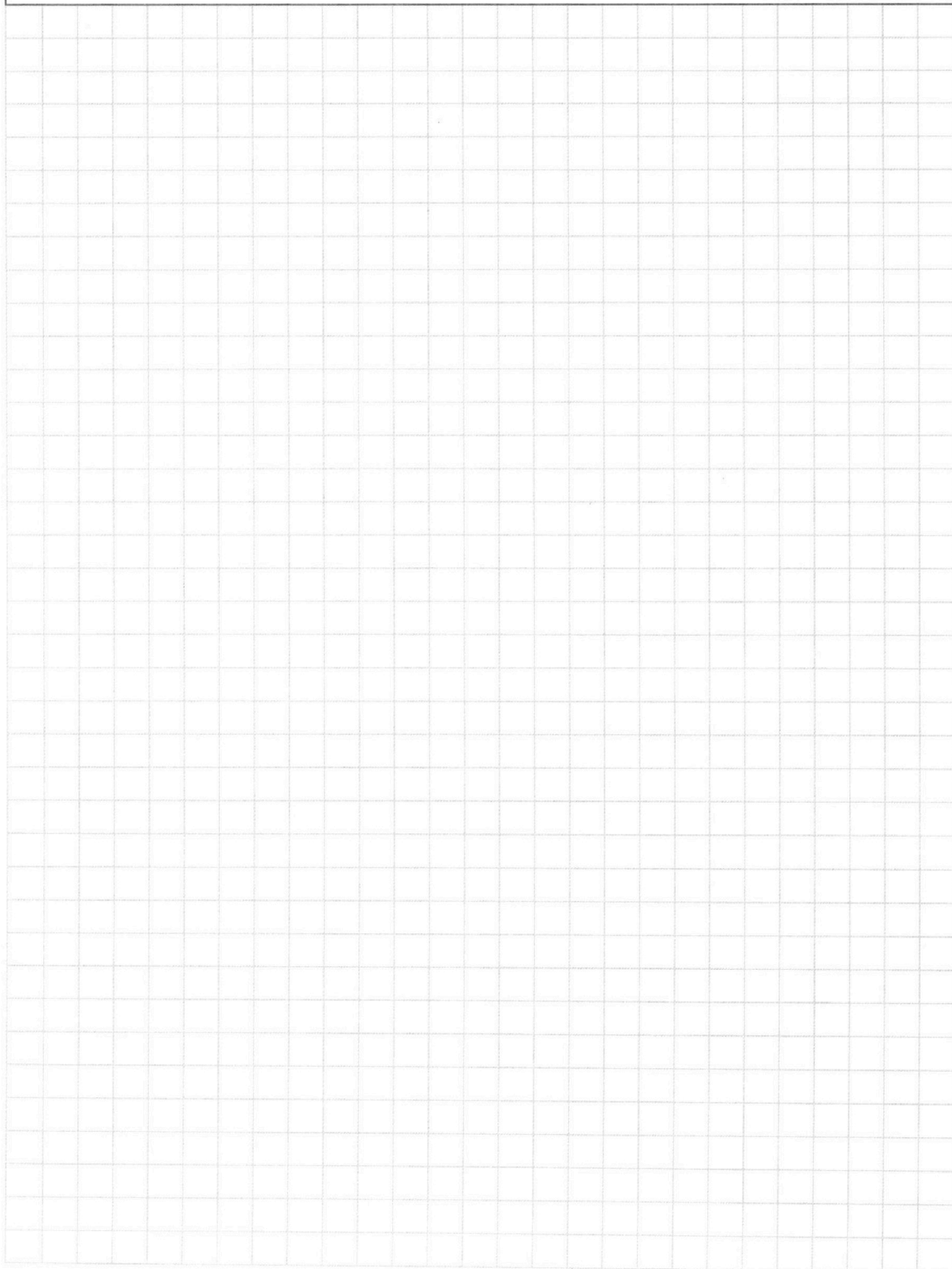
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

