



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Решение

Пусть $a = 2^{h_1} \cdot 3^{h_2} \cdot 5^{h_3} \cdot A$, где $A \in \mathbb{N}$, $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{N}_0$ (наименьшие числа или 0)

Аналогично $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot B$,
 $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot C$.

Тогда по условию:

$$\begin{cases} h_1 + \beta_1 \geq 8 \\ h_2 + \beta_2 \geq 14 \\ h_3 + \beta_3 \geq 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ h_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ h_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(h_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 8 + 12 + 14 = 34 \\ 2(h_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 14 + 20 + 21 = 55 \\ 2(h_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 12 + 17 + 39 = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ h_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 27,5 \\ h_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 34 \end{cases}$$

$$h_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow h_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28.$$

Тогда $abc = 2^{h_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{h_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{h_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot A \cdot B \cdot C \geq$
 $\geq \frac{2^{17}}{2} \cdot \frac{3^{28}}{3} \cdot \frac{5^{39}}{5} = 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{38}$

Равенство достигается при

$$\begin{cases} h_2 = 8 \\ \beta_2 = 6 \\ \gamma_2 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} h_3 = 22 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 = 5 \\ \beta_1 = 3 \\ \gamma_1 = 9 \end{cases}$$

Ответ: $2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{38}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2}$

Решение

1) $AD:DB = 5:2$.

Пусть $AD = 5x$, тогда
 $BD = 2x$, $AB = 7x$.

$$AC^2 = AD \cdot AB = 5x \cdot 7x = 35x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{35}x$$

Аналогично $BC^2 = 2x \cdot 7x = 14x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{14}x$ по св-ву прямо-угольного треугольника

~~CD~~ $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$ по св-ву прямо-угольного

треугольника.

2) $EF \parallel AD \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$; $EE' \perp \omega$; $FE' \perp \omega \Rightarrow \angle EFA$ опирается на диаметр ω .

3) Пусть O - центр описанной окружности.

$EE' \perp \omega \Rightarrow EO = r$. Пусть L точка пересечения окружности ω с AC - L . Если $OH \perp EL$, то $EH = HL$. по св-ву хорд и диаметров.

Используя т.с опис ω : $CE \cdot CL = CF \cdot (CH + HL) =$

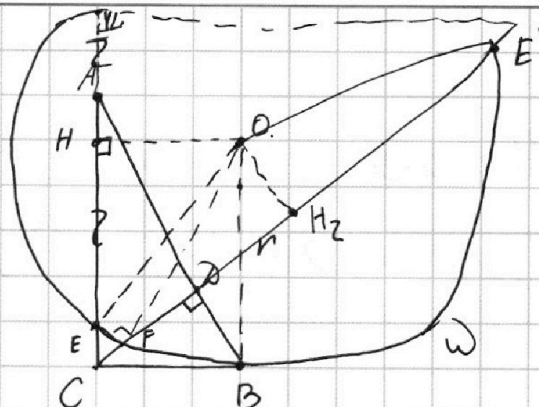
$$= CE \cdot (CE + 2HE) = CE \cdot (CE + 2(HC - CE)) = CE(2OB - CE) =$$

$$= CE \cdot (2r - CE) = CB^2 \Leftrightarrow 2rCE - CE^2 - CB^2 = 0$$

$$\Delta EHO: \text{ по т. Пифагора: } (r - CE)^2 + CB^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2rCE + CE^2 + CB^2 = 0$$

4) EE' - диаметр. $\Rightarrow$ по (3) $E'ECF$. Тогда Пусть $CE = k \cdot AC = k \cdot \sqrt{35}x = \sqrt{35}kx$
 $CF = k \cdot CD = k \cdot \sqrt{10}x = \sqrt{10}kx$
 $EF = k \cdot AD = k \cdot 5x = 5kx$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2.

Пусть $Kx = z$, тогда, сменив т.с:

$$CE \cdot (2r - CE) = CF \cdot (CF + z \cdot \sqrt{r^2 - (0.4z)^2}) = CF \cdot (CF + 2\sqrt{r^2 - (\frac{EF}{2})^2})$$

$$\sqrt{35} z (2r - \sqrt{35} z) = \sqrt{10} z \cdot (\sqrt{10} z + 2\sqrt{r^2 - (2.5z)^2}) \Leftrightarrow$$

$$= 2\sqrt{35} r - 35z = 10z + 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{r^2 - (2.5z)^2} \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad (2\sqrt{35} r - 45z) = 2\sqrt{10} \sqrt{r^2 - (2.5z)^2} \quad (1)$$

$$(2) \quad 140r^2 - 45^2 z^2 - 4 \cdot 45 \cdot \sqrt{35} r z = 40(r^2 - (2.5z)^2) \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad 100r^2 - 45^2 z^2 - 4 \cdot 45 \sqrt{35} r z = -10 \cdot 25z^2 \quad (2)$$

$$(2) \quad 100r^2 - 2025z^2 - 180\sqrt{35} r z = -250z^2 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 100r^2 - 180\sqrt{35} r z - 1770z^2 = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad 10r^2 - 18\sqrt{35} r z - 177z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad \frac{r}{z} = \frac{18\sqrt{35} + 2\sqrt{207 \cdot 15}}{20} = \frac{9\sqrt{35} + \sqrt{307 \cdot 15}}{10}$$

$$BC^2 = 14x^2 = \sqrt{35} z \cdot (\sqrt{35} z + 2r) =$$

$$= \sqrt{35} \cdot (z) \cdot (\sqrt{35} z + 2 \cdot \frac{9\sqrt{35} + \sqrt{307 \cdot 15}}{10} z)$$

$$\text{Значит } \sqrt{14} x = \sqrt{-35 + \frac{18 + 5\sqrt{307 \cdot 15}}{10}} z$$

$$\text{Значит } K = \sqrt{\frac{14}{-35 + \frac{18 + 5\sqrt{307 \cdot 15}}{10}}}$$

$$\text{Значит } \frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \frac{14}{-35 + \frac{18 + 5\sqrt{307 \cdot 15}}{10}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{10} x \cdot 5x}{\sqrt{35} x \cdot \sqrt{14} x} = \frac{5\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{10}{-35 + \frac{18 + 5\sqrt{307 \cdot 15}}{10}} \quad \text{Ответ: } \frac{10}{-35 + \frac{18 + 5\sqrt{307 \cdot 15}}{10}}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \\ - 250 \\ \hline 1770 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \\ \times 35 \\ \hline 1620 \\ 972 \\ \hline 11340 \\ + 1800 \\ \hline 13140 \\ \times 137 \\ \hline 61403 \\ 614253 \\ 307253 \\ \hline 137 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

Решение

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \quad \left| \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \right.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq (\arcsin z) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(z) \quad -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \Leftrightarrow -6\pi \leq -2x \leq 4\pi \Leftrightarrow -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

Если $x \in [-2\pi; 0]$, то

$$x_0 = x + 2\pi \in [0; 2\pi]; \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x = \cos(x_0)$$

$$\pi - 2x = \pi - 2(x_0 - 2\pi) = 5\pi - 2x_0.$$

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \arcsin(\cos x_0) =$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 \in [0; 2\pi] \\ 10 \left(\frac{\pi}{2} - x_0 \right) = 5\pi - 2x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_0 \in [0; 2\pi] \\ 5\pi - 10x_0 = 5\pi - 2x_0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_0 \in [0; 2\pi] \\ x_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 = 0$$

$$\text{Тогда } x = x_0 - 2\pi = -2\pi.$$

Если $x \in [0; 2\pi]$, то

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \left(\frac{\pi}{2} - x \right), \text{ значит}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in [0; 2\pi] \\ 5\pi - 10x = \pi - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 4\pi = 8x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Если $x \in [2\pi; 3\pi]$, то $x - 2\pi \in$

Пусть $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$, где $k \in \mathbb{Z}; k \geq 2$, тогда (т.е. $k \in \{-2; 0; 2; 4\}$)

$$\cos(x - k\pi) = \cos x, \text{ где } x - k\pi \in [0; \pi], \text{ тогда}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} + k\pi - x, \text{ т.е.}$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) - 10x = \pi - 2x \Leftrightarrow 8x = (10k + 4)\pi \Leftrightarrow x = \frac{(10k + 4)\pi}{8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если $k = -2$, то

$$x = \frac{-10+2}{4}\pi = -2\pi.$$

Если $k = 0$, то

$$x = \frac{0+2}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$$

Если $k = 2$, то

$$x = \frac{12}{4}\pi = 3\pi.$$

~~Если~~ $(k \in \{-1; 1\})$

Если $k \neq 2$, то $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$

$$\pi \leq x - (k-1)\pi \leq 2\pi. \quad (\Leftrightarrow) \quad \pi \leq (k-1)\pi - x \leq -\pi \quad (*)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 0 \leq (k+1)\pi - x \leq \pi \quad \Rightarrow$$

$$* \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \arcsin(\cos(-(k+1)\pi - x)) = \arcsin(\cos((k+1)\pi - x)) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + x - (k+1)\pi.$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x - (k+1)\pi\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi + 10x - 10(k+1)\pi = \pi - 2x \quad (**)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 12x = (10k+11-5)\pi \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \left(\frac{10k+11-5}{12}\right)\pi$$

$$\text{Если } k = -1, \text{ то } x = \frac{1-5}{12}\pi = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Если } k = 1, \text{ то } x = \frac{16}{12}\pi \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}\pi.$$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi; 3\pi.$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

54.

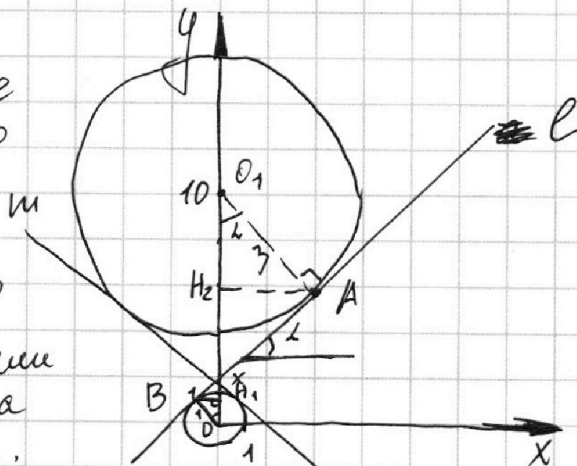
Решение.

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & - \text{график данного уравнения -} \\ & \text{окружность с ц. в ш. (0; 0) и} \\ & \text{радиусом 1} \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 & - \text{график данного уравнения -} \\ & \text{окружность с ц. в ш. (0; 10) и} \\ & \text{радиусом 6} \end{cases}$

1-ым уравнением в данной системе задается невершикальная прямая. Нам нужно определить угол наклона данной прямой, а параметр b - точку, через которую она будет проходить.

Чтобы прямая могла пересекать обе окружности необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициент a был или больше, или меньше тангенса угла наклона прямой ℓ или тангенса угла наклона прямой m .



Т.к. графики симметричны относительно оси Oy , то $|a| > 3 \tan \alpha$

$$AH_1 = 3h$$

$$BH_1 = h, \text{ тогда } 1 + h^2 + 3 + 9h^2 = 16 \Rightarrow \Delta OBX \sim \Delta O_1AX; k = \frac{1}{3}.$$

$$x_{O_1} = \frac{10 \cdot 3}{4} = \frac{15}{2} = 7.5, \text{ тогда}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{7.5} = \frac{2}{5}, \quad \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 1}$$

$$\text{Тогда } |a| \geq \frac{3\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\frac{3\sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{3\sqrt{21}}{2}; +\infty)$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

25.

Решение

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3 \Leftrightarrow$$

$$(2) \left(\frac{1}{\log_{2x} 5}\right)^4 - 3\log_{2x} 5 = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_{2x} 5}\right)^4 = 4\frac{1}{3}\log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3 \Leftrightarrow$$

$$(2) \left(\frac{1}{\log_y 5}\right)^4 + 4\frac{1}{3}\log_y 5 = -3$$

Пусть $\log_{2x} 5 = a$; $-\log_y 5 = b$. Тогда
а и b - корни уравнения

$$\left(\frac{1}{z}\right)^4 = 4\frac{1}{3}z - 3 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^4 = \frac{13}{3}z - 9 \Leftrightarrow$$

$$(2) 3 = 13z^5 - 9z^4 \Leftrightarrow 13z^5 - 9z^4 - 3 = 0.$$

$$\log_{2x} 5 = a \Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 2x} = a \Leftrightarrow \log_5 2x = \frac{1}{a} \quad | \quad (2)$$

$$\log_5 y = \frac{1}{b}$$

$$(2) \log_5 2xy = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow xy = \frac{1}{2} \left(5^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right), \text{ где } a, b - \text{ произвольные корни } 13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

$$f(z): 13z^5 - 9z^4 - 3$$

$$\begin{aligned} f(0) &= -3 < 0 \\ f(1) &= 1 > 0 \end{aligned} \Rightarrow f(x) \text{ имеет корни на промежутке } [0; 1].$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \left(5^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right), \text{ где } a, b - \text{ корни } 13x^5 - 9x^4 - 3 = 0, \text{ возможно } (a=b)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Решение

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45.$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} x_2 - x_1 = \Delta x \\ y_2 - y_1 = \Delta y \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow 5\Delta x + \Delta y = 45, \quad \Delta x \in \mathbb{Z}; \Delta y \in \mathbb{Z}$$

$$|\Delta x| \leq 34$$

$$|\Delta y| \leq 50; \quad 5\Delta x \leq 45; \quad 45:5 \Rightarrow \Delta y \leq 5.$$

Прямая, заданная этим уравнением
параллельна стороне параллелограмма. Каждый
раз на этой прямой лежат
 $\left(\frac{80}{5} + 1\right) = 17$ точек с целыми координатами,
лежащими на сторонах или внутри
параллелограмма, если координата удаленной
точки делится на 5 и 16 точек, если не
делится. Значит всего пар. $3 \cdot 17 \cdot 17 + 13 \cdot 16 \cdot 16$.

$$3 \cdot 289 + 13 \cdot 256 = 4195$$

$$\begin{array}{r} \times 256 \\ 13 \\ \hline 768 \\ 256 \\ \hline 3328 \\ 852 \\ \hline 4195 \end{array}$$

Ответ: 4195



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

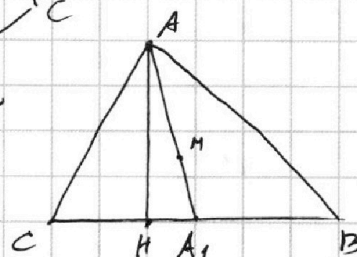
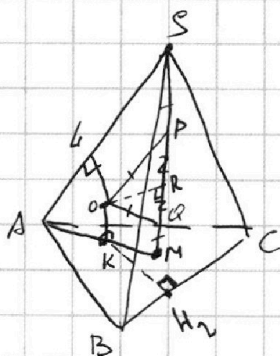
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.

Решение

1) Рассмотрим

$\triangle SAM$. Вспомогательная сфера
плоскостью шреугольника!
околошисх КЛРQ.



Синусы т. М: $MK \cdot MP =$

$$\Rightarrow KM^2 = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM = SL$$

$$AL = AK$$

$\Rightarrow$

как окружности касательных

$$\Rightarrow AS = AM = BC.$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24.$$

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = 100 \Rightarrow AH = \frac{200}{16} = \frac{25}{2}$$

$$\sin \angle AA_1C = \frac{25}{2} : 24 = \frac{25}{48};$$

$$|\cos \angle AA_1C| = \sqrt{1 - \frac{25^2}{48^2}} = \sqrt{\frac{48^2 - 25^2}{48^2}} = \sqrt{\frac{(48-25)(48+25)}{48^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{23 \cdot 72}{48^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 23}{48^2}} = \frac{6}{48} \cdot \sqrt{46} = \frac{1}{8} \sqrt{46}.$$

$$A_1M = 8, \text{ тогда } CM = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} \sqrt{46}} =$$

$$BM = \sqrt{8^2 + 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} \sqrt{46}} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{7}$

$$\begin{aligned}
 AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 &= AA_1 \cdot \frac{9}{4} \cdot BM \cdot CM = \\
 &= 24 \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{128 - 16\sqrt{46}} \cdot \sqrt{128 + 16\sqrt{46}} = \\
 &= 54 \cdot \sqrt{(128)^2 - 256 \cdot 46} = 54 \cdot \sqrt{128^2 - 11904} = \\
 &= 54 \cdot \sqrt{128 \cdot 36} = 54 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 2592\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 \times 54 \\
 \hline
 162 \\
 216 \\
 \hline
 2592
 \end{array}$$

2) Ω касается (ABC) и (BSC) , значит
О лежит на ~~се~~ биссектрисе $\angle A(BC)S$.

$$SP = MQ.$$

Если R - середина SM , то $QR = RP$, т.е. ~~тогда~~

$\triangle MOS$ - p/θ с осн MS . Тогда $OS = OM$.

$$OS = \sqrt{SN^2 + NO^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM = \sqrt{39} = 4 \text{ (из } \triangle KOM)$$

$$\text{Тогда } KA_1 : AA_1 = 12/24 = \frac{1}{2} \Rightarrow KH_2 = \frac{1}{2} AH = \frac{25}{4}.$$

$$\text{Тогда } \angle A(BC)S = 2 \arctg \frac{5}{\frac{25}{4}} = 2 \arctg \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ответ: } 2592\sqrt{2}; 2 \arctg \frac{4}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

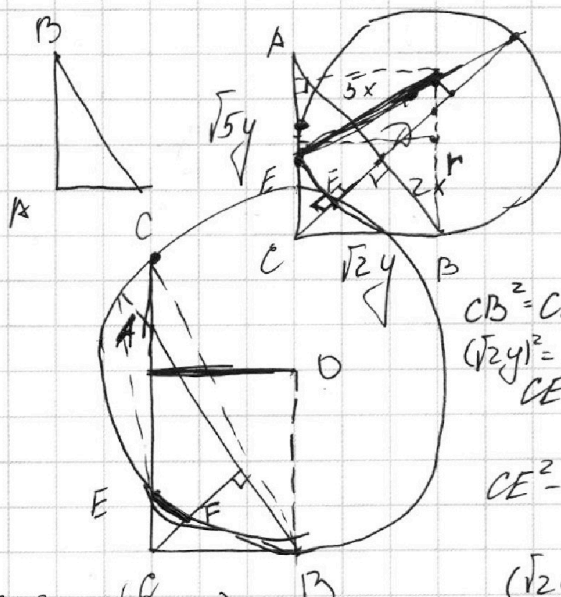
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2^{1/4} \cdot 3^{1/2} \cdot 5^{1/3}$
 $b = 2^{3/4} \cdot 3^{1/2} \cdot 5^{1/3}$
 $c = 2^{1/4} \cdot 3^{1/2} \cdot 5^{1/3}$

$d_1 + p_1 \geq 8$
 $d_2 + p_2 \geq 14$
 $d_3 + p_3 \geq 12$

$d_1 + p_1 \geq 14$
 $d_2 + p_2 \geq 21$
 $d_3 + p_3 \geq 39$

$p_1 + p_1 \geq 12$
 $p_2 + p_2 \geq 20$
 $p_3 + p_3 \geq 17$



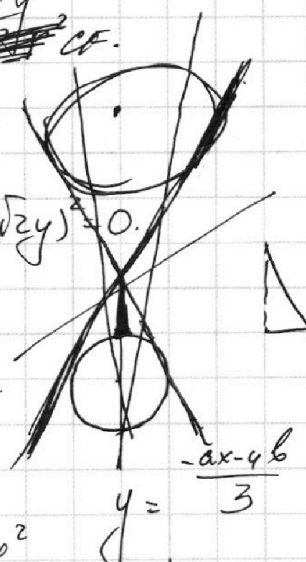
$CD =$
 $(7x)^2 = 7y^2$
 $7x^2 = y^2$

$(13x^3 + 1)(x^2 + 3)$
 $13x^5 + x^2 + 39x^3 + 3$
 $9x^4 + 27x^2$
 $28x^4 + 39x^3$
 $-39x^3 - 39 \cdot 3x$

$CB^2 = CE \cdot (r - CE) = CE \cdot CF$
 $(\sqrt{2}y)^2 = CE(\sqrt{2}y) - CE^2$
 $CE : AC = CF : FD$

$CE^2 - CE(\sqrt{2}y) + (\sqrt{2}y)^2 = 0$
 $(\sqrt{2}y)^2 - 4(\sqrt{2}y)^2$

$(r - CE)^2 = r^2 - (\sqrt{2}y)^2$
 $CE(r - CE) = (\sqrt{2}y)^2$
 $r^2 - 2rCE + CE^2 = r^2 - 2y^2$
 $-CE \cdot r + CE^2 = 2y^2$
 $-CE^2 = -2y^2$
 $CE = \sqrt{2}y$



$(ax^3 + bx^2 + cx) / (dx^2 + ex + f)$

$(13x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + 3)$
 $13x^5 + 3x^2 + 3x + 3 + 13x^5 + x^4 + x^3 + x^2 -$
 $-169x^3 - 1$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$
 $\arcsin(\cos x) =$
 $= -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$

$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$

$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$

$(3x^5 - 9x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 3) / (13x^2 + 1)$

$13x^5 - 9x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 3$

$2\pi \leq x \leq 3\pi$

$0 \leq 1 - 2\pi \leq \pi$

$\sin \frac{\pi}{2} - x$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$

$13x^5 - 9x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 3 = 0$

$2^4 \cdot (13x^5 - 9x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 3)$

$13x^5$

$\arcsin(\cos x)$

$\sin \frac{\pi}{2} - x = \cos x$

$10(\frac{\pi}{2} - x) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$8x = 4\pi; x = \frac{\pi}{2}$

$(13x^5 - 9x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 3) / (13x^2 + 1)$
 $13x^5 - 9x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 3$
 $13x^5 + 13x^3$
 $-22x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 3$
 $9x^4 + 13x^3$
 $-13x^3 - 9x^2 - 3x - 3$
 $9x^4 - 13x^3 - 9x^2 - 3x - 3$
 $x \leq \frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, including diagrams and calculations.

Top section:

- Equations: $-2\pi \leq x \leq 3\pi$, $\cos x = a$, $K\pi \leq x \leq (K+1)\pi$, $x - K\pi$, $\frac{\pi}{2} - x + K\pi = \frac{2K+1}{2}\pi - x$.
- Diagram of a triangle with vertices A, B, C and a point S.
- Equation: $5x_2 - 5x_1 + (y_2 - y_1) = 45$.
- Equation: $5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$.
- Equation: $\frac{3}{2} \cdot 16 = 24$.
- Equation: $5x + 2y = 45$, $\Delta x = 9 - \frac{4y}{5}$.
- Equation: $\log_5 2x - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 - 3$.
- Equation: $(\log_{2x} 5)^4 - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 - 3$.
- Equation: $\frac{1}{z^4} - 3z = \frac{4}{3}z - 3$.
- Equation: $1 - 3z^5 = \frac{4}{3}z^5 - 3z^4$.
- Equation: $3 - 9z^5 = 4z^5 - 9z^4$, $13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$.
- Equation: $13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$.
- Equation: $\frac{13}{32} - \frac{9}{16} - 3 = 0$.
- Equation: $K \times \sqrt{x}$.
- Equation: $CF \cdot CE' = CF \cdot (CF + 2(\sqrt{v^2 - (EE')^2}))$.
- Equation: $135z \cdot (2v - \sqrt{35}z) = \sqrt{10}z \cdot (\sqrt{10}z + 2\sqrt{v^2 - (\frac{5}{2}z)^2})$.
- Equation: $2v\sqrt{35}z - 35x^2 = 10z^2 + 2\sqrt{10} \cdot z \cdot \sqrt{v^2 - 9.5z^2}$.
- Equation: $4 \cdot 35 \cdot v^2 \cdot z^2 = (45z^2 + 2\sqrt{10} \cdot z \cdot \sqrt{v^2 - 35z^2})$.

Bottom section:

- Diagram of a triangle with vertices A, B, C and a point S.
- Equation: $5x_2 - 5x_1 + (y_2 - y_1) = 45$.
- Equation: $5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$.
- Equation: $\frac{3}{2} \cdot 16 = 24$.
- Equation: $5x + 2y = 45$, $\Delta x = 9 - \frac{4y}{5}$.
- Equation: $\log_5 2x - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 - 3$.
- Equation: $(\log_{2x} 5)^4 - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 - 3$.
- Equation: $\frac{1}{z^4} - 3z = \frac{4}{3}z - 3$.
- Equation: $1 - 3z^5 = \frac{4}{3}z^5 - 3z^4$.
- Equation: $3 - 9z^5 = 4z^5 - 9z^4$, $13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$.
- Equation: $13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$.
- Equation: $\frac{13}{32} - \frac{9}{16} - 3 = 0$.
- Equation: $K \times \sqrt{x}$.
- Equation: $CF \cdot CE' = CF \cdot (CF + 2(\sqrt{v^2 - (EE')^2}))$.
- Equation: $135z \cdot (2v - \sqrt{35}z) = \sqrt{10}z \cdot (\sqrt{10}z + 2\sqrt{v^2 - (\frac{5}{2}z)^2})$.
- Equation: $2v\sqrt{35}z - 35x^2 = 10z^2 + 2\sqrt{10} \cdot z \cdot \sqrt{v^2 - 9.5z^2}$.
- Equation: $4 \cdot 35 \cdot v^2 \cdot z^2 = (45z^2 + 2\sqrt{10} \cdot z \cdot \sqrt{v^2 - 35z^2})$.