МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{cases}$$

Пусть $abc = 2^x 3^y 5^z t$ где x, y, z, t - натур. числа.

$t \not\vdots 2$, $t \not\vdots 3$, $t \not\vdots 5$.

С одной стороны, $abc \vdots ab, bc, ac \Rightarrow abc$ делится на каждое из чисел $2^6 3^{13} 5^{11}$, $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, $2^{16} 3^{25} 5^{28}$

Откуда $x \geqslant 16$, $y \geqslant 25$, $z \geqslant 28$.

С другой стороны, перемножив делимости, получим

$a^2 b^2 c^2 \vdots 2^{36} 3^{59} 5^{52}$ Откуда $2x \geqslant 36$ $2y \geqslant 59$ $2z \geqslant 52$

$\Rightarrow x \geqslant 18$ $y \geqslant 30$ $z \geqslant 26$

Объединяя ограничения, получим

$x \geqslant 18$ $y \geqslant 30$ $z \geqslant 28$. Число $t \geqslant 1$, поэтому взяв наименьш. x, y, z, t, получим наименьшее возможное $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$, которое достигается при

$$\begin{cases} a = 2^4 3^8 5^{15} \\ b = 2^2 3^5 \\ c = 2^{12} 3^{17} 5^{13} \end{cases}$$

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

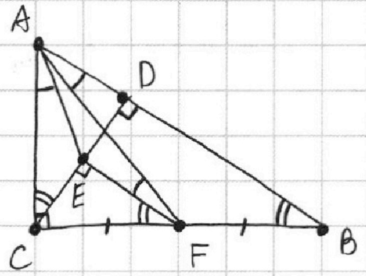
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



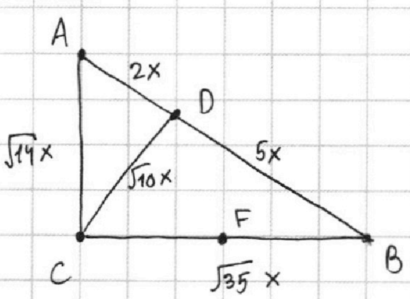
Поймем, что $\angle C$ - прямой и нарисуем чертёж. Из $EF \parallel AB$ следует $\angle ABC = \angle CFE$. Высота CD к гипотенузе делит $\triangle ABC$ на 2 подобных ему, поэтому $\angle ACD = \angle ABC$. Из $AB \perp CD$ следует $EF \perp CD$

откуда ACD и CEF подобны по 2-ум углам, и ответ на задачу: $\left(\frac{AC}{CF}\right)^2$. $\angle CAE = \angle EFA$ т.к. оба опираются на одну ~~за~~ дугу окр-сти AE (EFA - вписанный, $\angle CAE$ - угол между касательной и хордой). $\angle EFA = \angle FAB$ из параллельности $EF \parallel AB$

Из подобия CEA и AFB по двум углам следует $\frac{CE}{AC} = \frac{BF}{AB}$

Из подобия ACD и ABC следует $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC}$. Перемножив получим $\frac{CE}{CD} = \frac{BF}{BC}$. Но $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BC}$ из т. Фалеса (или подобия CEF и CDB)

Значит $BF = CF$ т.е. F - середина BC.



Пусть $AD = 2x$. Из $\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$ следует $\frac{AD+BD}{BD} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow BD = 5x$

Из подобия ACD и BCD: $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$

$\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD = 10x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{10}\,x$

Из т. Пифагора $AC = \sqrt{14}\,x$ $BC = \sqrt{35}\,x$. Из $BF = FC$ следует $CF = BF = \frac{1}{2}BC = \sqrt{\frac{35}{4}}\,x$. Отсюда $\left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{AC^2}{CF^2} = \frac{14x^2}{(35/4)\cdot x^2} = \frac{56}{35} = \frac{8}{5}$

Ответ: 8 : 5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ab \,\vdots\, 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc \,\vdots\, 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac \,\vdots\, 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{cases} \Rightarrow a^2b^2c^2 \,\vdots\, 2^{36} 3^{59} 5^{52}$$

ПЕРЕМНОЖИМ ДЕЛИМОСТИ

если $abc = 2^x 3^y 5^z t$, где x, y, z, t - НАТУРАЛЬНЫЕ, то необходимо, чтобы выполнялось

$$\begin{cases} 2x \geqslant 36 \\ 2y \geqslant 59 \\ 2z \geqslant 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 18 \\ y \geqslant 30 \\ z \geqslant 26 \end{cases}$$

Беря наименьшие x, y, z, t получаем наименьшее abc

$abc = 2^{18} 3^{30} 5^{26}$ $\qquad abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$

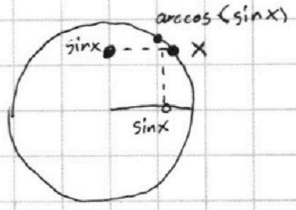
$a = 2^4\ 3^8\ 5^{15}$

$b = 2^2\ 3^5$

$c = 2^{12}\ 3^{17}\ 5^{13}$

$$\begin{cases} 5x + 6ay = b \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$



$\log_{11} x = a \quad \log_{11} y = b$

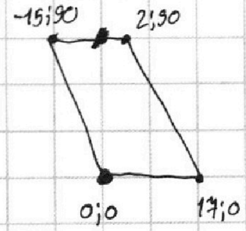
$a^4 - \frac{6}{a} =$

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$y = \frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

$6\Delta x + \Delta y = 48$

$\Delta y \,\vdots\, 6$



$17; -9$

$\Delta x \ \Delta y =$ $0; 48$

$-1; 54$

$-2; 60$

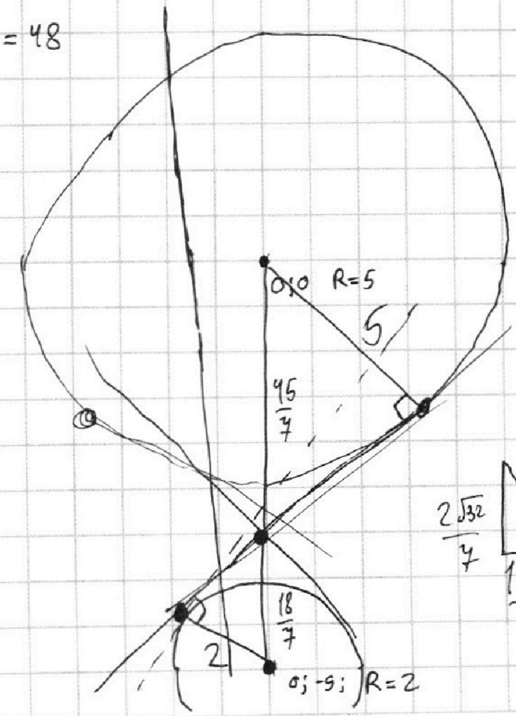
$-3; 66$

$-4; 72$

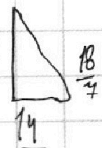
$-5; 78$

$-6; 84$

$-7; 90$



$9; 7$



$\frac{81 - 49}{32}$

$\sqrt{32}$ $\quad 9$

7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

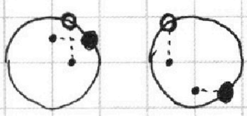
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $x \in \left[2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right]$ (т.е. лежит на правой полуокр-сти триг. окр-сти).

Тогда $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n)$



И уравнение принимает вид

$10\left(\frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n)\right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 20\pi n - 4\pi$

$\Rightarrow x = \frac{5}{2}\pi n - \frac{1}{2}\pi$. С учётом принадлежности отрезку

$2\pi n - \frac{\pi}{2} \le \frac{5}{2}\pi n - \frac{1}{2}\pi \le 2\pi n + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi n \le \frac{5}{2}\pi n \le 2\pi n + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2n \le \frac{5}{2}n \le 2n + \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}n \ge 0 \\ \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}n \end{cases} \Rightarrow 0 \le n \le 1$ т.е. есть решения $-\frac{\pi}{2}$; 2π

Если же $x \in \left[2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right]$, то

$\arccos(\sin x) = (x - 2\pi n) - \frac{\pi}{2}$ и

$10\left(x - 2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 10x - 20\pi n - 5\pi = 9\pi - 2x \Rightarrow 12x = 14\pi + 20\pi n$

$\Rightarrow x = 7/6\,\pi + \frac{5}{3}\pi n$. С учётом принадлежности отр-ку:

$2\pi n + \frac{\pi}{2} \le \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n \le 2\pi n + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 12\pi n + 3\pi \le 7\pi + 10\pi n \le 12\pi n + 9\pi$

$\Rightarrow 12n + 3 \le 10n + 7 \le 12n + 9 \Rightarrow \begin{cases} 2n \le 4 \\ 2n \ge -2 \end{cases} \Rightarrow n = -1, 0, 1, 2$

Что даёт решения $-\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$.

В объединении получаем 5 решений: $-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

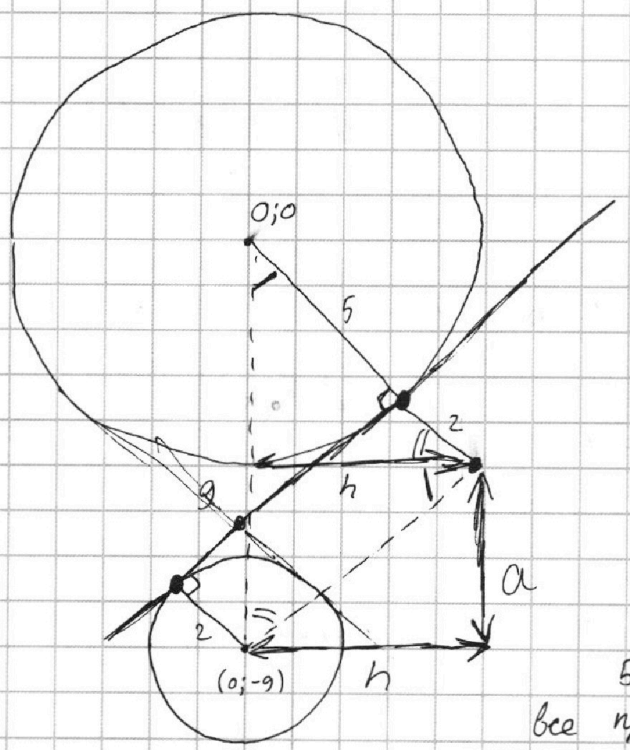
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нарисуем на графике xy все решения $(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0$

Равносильно $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right.$, то есть это 2 окружности.

Одна имеет центр $0;0$ и радиус 5. Другая имеет центр $(0;-9)$ и радиус 2. Найдем уравнения внутренних касательных.



$9^2-7^2=81-49=32 \to 4\sqrt{2}$

$h=\frac{7\cdot 4\sqrt{2}}{9}=\frac{28\sqrt{2}}{9}$

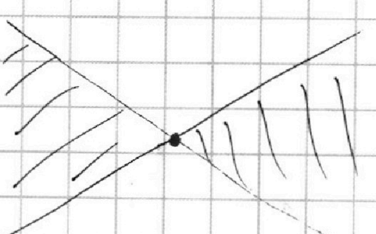
$a=\frac{28\sqrt{2}}{9}\cdot\frac{9}{7}=4\sqrt{2}$

Получаем, что одна касательная имеет вид

$y=\frac{9}{7}x+b$, а другая

$y=-\frac{9}{7}x+b$ (симметрия.)

$5x+6ay-b$ - прямая. При фикс. a все прямые будут параллельны. Проведем одну из них через точку пересечения внут. касательных. Если прямая проходит через ~~сер~~ штрих. область, то она не может пересечь обе окр-сти в 2-ух точках (при любом параллельном сдвиге) иначе может.



при $a=0$ прямая вертикальная. ✓

иначе делим на $6a$: $y=-\frac{5}{6a}+b'$ где $b'=b/6a$ принимает любое знач.

Необходимо $\left[\begin{array}{l} -\frac{5}{6a}>\frac{9}{7} \\ -\frac{5}{6a}<-\frac{9}{7} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a<0 \text{ и } -35<54a \\ a>0 \text{ и } -35>-54a \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{35}{54}<a<\frac{35}{54}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если обозначить $\log_{11} x = a$ $\log_{11}(0{,}5y) = b$

То первое равенство перезапишется как

$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \Rightarrow a^4 + 5 = \frac{18}{3a} - \frac{2}{3a} \Rightarrow a^4 + 5 = \frac{16}{3a}$

поскольку $a \neq 0$, домножим на $3a$: $3a^5 + 15a = 16$

Второе равенство перезапишется как

$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \Rightarrow b^4 + 5 = -\frac{1}{b} - \frac{13}{3b} \Rightarrow b^4 + 5 = -\frac{16}{3b}$

поскольку $b \neq 0$, домнотим на $3b$: $3b^5 + 15b = -16$

Пусть $f(x) = 3x^5 + 15x$. $f(x)$ монотонно и неограниченно растёт, поэтому $f(x) = c$ имеет ровно 1 решение при любом значении c. Значит $\begin{cases} 3a^5 + 15a = 16 \\ 3b^5 + 15b = -16 \end{cases}$ обладает единственным решением (a, b). Обозначим его за (a_1, b_1) т.е. $f(a_1) = 16$, $f(b_1) = -16$.

Кроме того, $f(x)$ нечётна, поэтому $f(a_1) = 16 \Rightarrow f(-a_1) = -16$. Отсюда $-a_1 = b_1$ ввиду единственности решения $f(x) = c$. Итак, $-a_1 = b_1 \Rightarrow a_1 + b_1 = 0$ т.е. $a + b$ может быть равно только 0. Значит $\log_{11} x + \log_{11} 0{,}5y = 0 = \log_{11} 0{,}5xy$

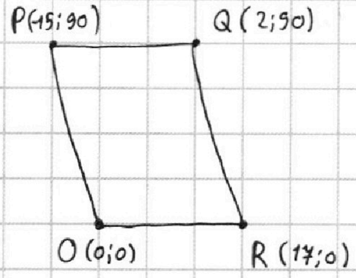
Откуда $0{,}5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Параллелограмм образуется прямыми вида $y=b$ и $y=-6x+b$.
Лемма: если точка $M=(x,y)$ лежит внутри параллелограмма и $0\le y-6k\le 90$, то точка $N(x+k,\ y-6k)$ тоже лежит в нём. Док-во: прямая MN имеет вид $y=-6x+b$ и не может пересечь (пройти сквозь) боковые стороны. По ограничению на $y-6k$ прямая MN не может пройти сквозь горизонтальные стороны. Значит MN внутри параллелограмма.

Зафиксируем y_1 ($0\le y_1\le 90$) и посчитаем, сколько пар точек (A,B) подходит. Пусть $A=(x_1;y_1)$. Тогда подходящие точки B имеют вид $(x_1+8+k;\ y_1-6k)$, остается проверить, что обе точки лежат внутри.
$x_1\ge -\frac{y_1}{6}$ т.к. иначе A лежит левее прямой PO. Если точка $B_1=(x_1+8;\ y_1)$ лежит правее QR (т.е. вне параллелограмма), то по лемме ни одна подходящая точка B не внутри, а тоже снаружи.

Значит нужно одновременное $-\frac{y_1}{6}\le x_1\le 9-\frac{y_1}{6} \Rightarrow 0\le x_1+\frac{y_1}{6}\le 9$
Если $y_1 ⋮ 6$, то есть 10 значений x_1, иначе их 9.
Далее, из леммы подходящей точке B достаточно $0\le y_1-6k\le 90$
$\Rightarrow 0\le \frac{y_1}{6}-k\le 15$. Если $y_1 ⋮ 6$, то есть 16 значений k, иначе их 15. По x_1 и k восстанавливается пара $(A;B)$. Итак, если $y_1 ⋮ 6$, то есть $10\cdot 16$ пар $(A;B)$, иначе есть $9\cdot 15=135$ пар $(A;B)$.

Среди $0\le y_1\le 90$ есть 16 значений y_1, кратных 6, и 75 не кратных. Значит всего подходящих пар

$16\cdot 160+75\cdot 135=2560+10125=12685$

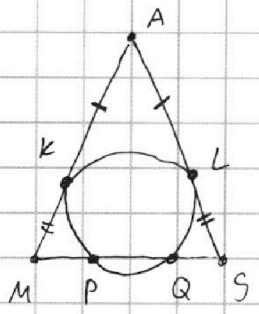
Ответ: 12685 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на сечение сферы плоскостью AMS.



Сфера касается AS и ABC, поэтому окр-сть касается AM и AS, откуда $AK = AL$

Из $SP = MQ$ следует $SQ = MP$, поэтому

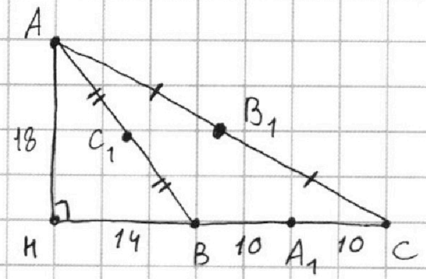
$MK^2 = MP \cdot MQ = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow MK = SL$.

Отсюда $AM = AS = 20 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$.

Посмотрим на основание ABC. Высота AH равна $180 \cdot 2 : 20 = 18$ (по формуле $S = \frac{ah}{2} \to h = 2S/a$)

По т. Пифагора $A_1H^2 = AA_1^2 - AH^2 = 30^2 - 18^2 = 24^2 \Rightarrow A_1H = 24$.

Зная, что $BA_1 = A_1C = BC/2 = 10$, нарисуем чёртёж.



Проекции C_1 и B_1 на прямую BC попадают в середины BH и CH соответственно.

Отсюда $BB_1^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$

$CC_1^2 = 27^2 + 9^2 = 3^2 \cdot (9^2 + 3^2) = 9 \cdot 90 = 810$

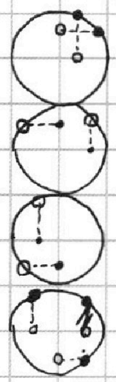
Отсюда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot \sqrt{90} \cdot 3\sqrt{90} = 90^2 = 8100$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

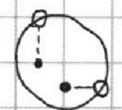
МФТИ



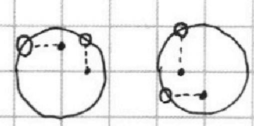
$x \in \left[2\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \cancel{\sin x}\ x$

$x \in \left[2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$

$x \in \left[2\pi n + \pi; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow$



$x \in \left[2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$



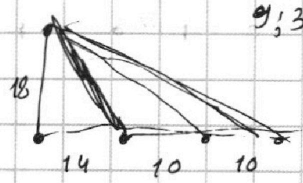
$x \in \left[2\pi n + \pi - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi + \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$

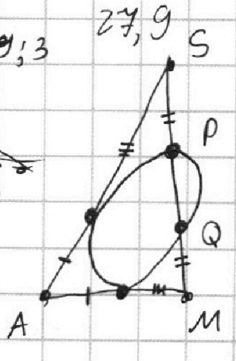
$10\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 10x - 5\pi = 9\pi - 2x \Rightarrow 12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{14}{12}\pi$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

$10(x -$

$9;3$ $27,9$

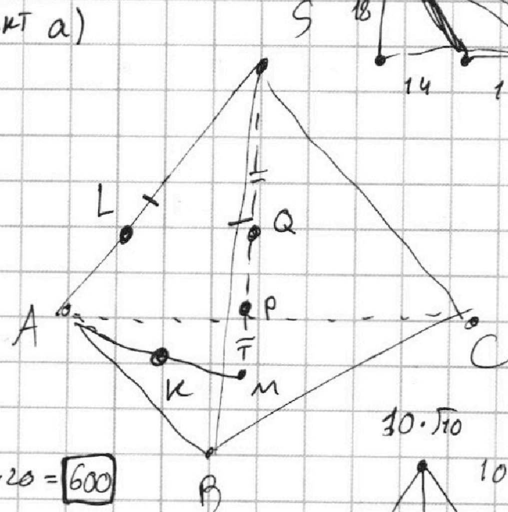


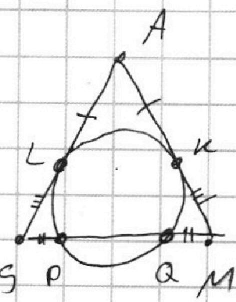


Пункт а)

AM=20!

№7



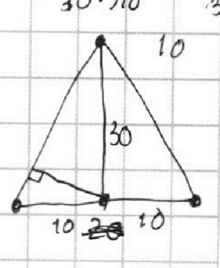


$20 = SA = BC = AM$

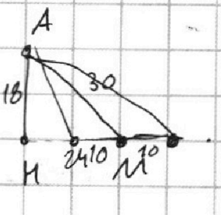
$10 \cdot \sqrt{10}$ 30

$BC = 20$
$AA' = 30$ $\boxed{180}$

$30 \cdot 20 = \boxed{600}$



$\frac{30}{\sqrt{10}} = \boxed{3 \cdot \sqrt{10}}$ $6 \cdot \sqrt{10}$!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

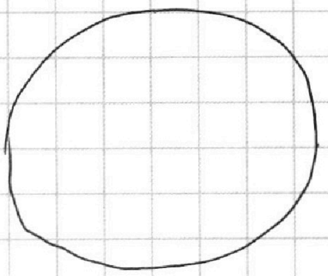
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

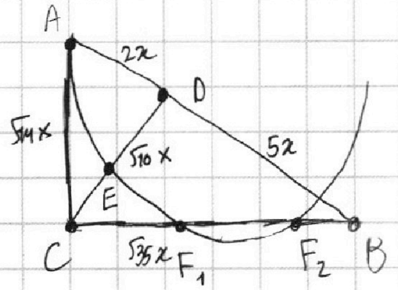
МФТИ

$34+25=59$
$24+28=52$

$ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}$ $bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ $ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{36} 3^{59} 5^{52} \Rightarrow abc \vdots 2^{18} 3^{30} 5^{26}$





$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$

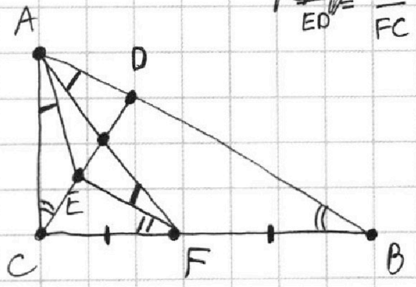
$a = 2^4 3^8 5$
$b = 2^2 3^5 5$
$C = 2^{12} 3^{17} 5^{15}$

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \to 10\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = 9\pi - 2x$

$\pi = \sin x - 2x$

$\frac{CE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow F$ сер.



$\log_{11} x = a$

$\log_{11} x^3 = 3a$

$\log_{x^3} 11 = \frac{1}{3a}$

$\log_{x^3} \frac{1}{121} = -\frac{2}{3a}$

S_{ADC} S_{ADB} $S_{CEF} = a$

~~$\log_{11} y = b$~~

$f(a_1) = 16 \Rightarrow f(-a_1) = -16$

$f(b_1) = -16$

$b_1 = -a_1$

$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5$

$\log_{11} 0{,}5y = b$

$a^4 = \frac{18-2}{3a} - 5$

$\log_{0{,}5y} 11 = \frac{1}{b}$ $\log_{11} 0{,}125y^3 = 3b$

$a^4 = \frac{16}{3a} - 5$ $a \ne 0$

$\log_{0{,}125y^3} 11 = \frac{1}{3b}$

$3a^5 = 16 - 15a$

$\log_{0{,}125y^3} (11^{-13}) = -\frac{13}{3b}$

$\boxed{xy = 2}$

$\boxed{3a^5 + 15a = 16}$

$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$ $b^4 + \frac{13}{3b} + \frac{3}{3b} + 5 = 0$

$a + b = 0$

$\log_{11} 0{,}5xy = 0$

$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0$ $\boxed{3b^5 + 15b = \boxed{-16}}$

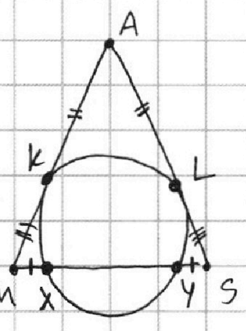
$\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



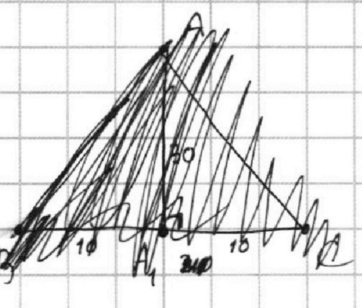
Пусть точки M P Q S идут на отрезке MS в порядке M, X, Y, S, то есть $\left[\begin{array}{l}P=X\\ Q=Y\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}P=Y\\ Q=X\end{array}\right.$

Из $SP=MQ$ можно получить $SY=MX$ в любом из двух случаев.

Поскольку Ω касается AS и ABC, то сечение Ω плоскостью AMS будет касаться AM и AS. Сечение - окр-сть. Из-за касания $AK=AL$. Далее

$MK^2=MX\cdot MY=SY\cdot SX=SL^2$, поэтому $MK=SL$. Отсюда $AM=AS = 20$.

Посмотрим теперь на $\triangle ABC$. $AA_1=\frac{3}{2}AM=30$, $BC=20$.



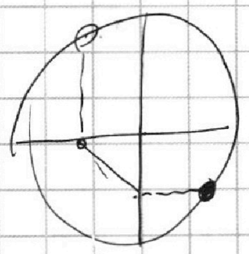
Высота AH в $\triangle ABC$ из формулы $S=\frac{ah}{2}$ должна быть равна $180\cdot 2:20=18$

Из т. Пифагора $A_1H^2=AA_1^2-AH^2=30^2-18^2=24^2$

Знаця, что ~~AH~~ = ~~24~~,

$\frac{7\pi}{6}+\frac{10}{6}\pi n$

$x\in\left[2\pi n-\frac{\pi}{2};\ 2\pi n+\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\sin x)=\frac{\pi}{2}-(x-2\pi n)$



$16\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n-x\right)=9\pi-2x \Rightarrow 5\pi+20\pi n-10x=9\pi-2x$

$4+5+4+5+5+5+6$

9 9 10 6

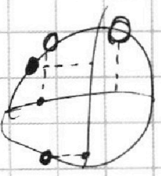
18 16

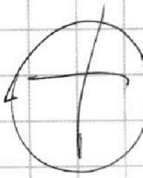
34 → 26

$8x=20\pi n-4\pi$

$x=\frac{5}{2}\pi n-\frac{\pi}{2}$

$x\in\left[2\pi n-\frac{\pi}{2};\ 2\pi n+\frac{\pi}{2}\right]$





$2\pi n-\frac{\pi}{2}\le\frac{5\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\le 2\pi n+\frac{\pi}{2}$

$2\pi n\le\frac{5}{2}\pi n\le 2\pi n+\pi \qquad \frac{\pi n}{2}\le\pi$

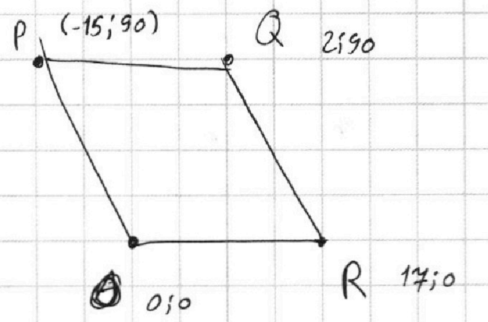
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$6\Delta x + \Delta y = 48.$ $\Delta x = 8 \Rightarrow \Delta y = 0$ $M=(x;y)$ $N=(x+k;y-6k)$



$A=(x_1;y_1)$ $B_1=(x_1+8;y_1)$

$x_1 \geq -\frac{y_1}{6}$ $x_1+8 \leq -\frac{y_1}{6}+17$

$-\frac{y_1}{6} \leq x_1 \leq 9-\frac{y_1}{6}$

$0 \leq x_1+\frac{y_1}{6} \leq 9$ если $y_1 \vdots 6$, то 10 x_1 иначе 9 x_1

$A=(x_1;y_1)$ $B=(x_1+8+k;y_1-6k)$

$0 \leq y_1-6k \leq 90$

$0 \leq \frac{y_1}{6}-k \leq 15$

если $y_1 \vdots 6$ то 16 реш иначе 15 реш

$0 \leq y_1 \leq 90$ $y_1 \vdots 6 \to 16$ вар

$16\cdot 10\cdot 16 + 75\cdot 9\cdot 15$

$2^9\cdot 5 + 3\cdot 5^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 5$

$2^9\cdot 5 + 3^4\cdot 5^3$

$5\cdot(2^9+3^4\cdot 5^2)$ $5\cdot(512+2025)$

$16\cdot 160 = 2560$

$135 \cdot 75$: 675, 945, 10125

$10125 + 2560 = 12685$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ