МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

из условия $\Rightarrow a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$,
$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$ $ab \vdots 2^7 3^{11} 5^{14} \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 \geq 7$
$\beta_1+\beta_2 \geq 11$
$\gamma_1+\gamma_2 \geq 14$

Аналогично $\alpha_2+\alpha_3 \geq 13$ $\gamma_2+\gamma_3 \geq 18$
$\beta_2+\beta_3 \geq 15$

$\alpha_1+\alpha_3 \geq 14$, $\beta_1+\beta_3 \geq 17$, $\gamma_1+\gamma_3 \geq 43$ $abc =$
$= 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$, очевидно, что чтобы

$abc \to \min$, в пок-вах выше необходимо равенство
целых числа

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 7 \\ \beta_1+\beta_2 \geq 11 \\ \gamma_1+\gamma_2 \geq 14 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 13 \end{cases} \quad \beta_2+\beta_3 \geq 15 \quad \gamma_2+\gamma_3 \geq 18 \quad \alpha_1+\alpha_3 \geq 14 \quad \beta_1+\beta_3 \geq 17 \quad \gamma_1+\gamma_3 \geq 43$$ Исходно

~~Складывая и вычитая, находим~~, $\gamma_1 \geq \frac{39}{2}$,

$\alpha_3 \geq 10$ $\beta_3 \geq \frac{21}{2}$ $\gamma_3 \geq \frac{47}{2}$, ~~$\alpha$~~

~~В силу целочисленности задачи~~ $\alpha_3 = 10$, $\beta_3 = 11$, $\gamma_1 = 20$,
$\gamma_3 = 24 \Rightarrow$ ~~$\gamma_1 = 20$, $\gamma_2 = 0$~~ $(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \cdot 2 \geq 75$
$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \cdot 2 \geq 34$ сложили
$(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \cdot 2 \geq 43$ нер-ва $\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = \cancel{20}\ 38$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 17$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 22$
Например, такое возможно при $\alpha_1 = 4$ $\alpha_3 = 10$
$\alpha_2 = 3$

$\beta_1 = 6$ $\beta_2 = 5$ $\beta_3 = 11$ ~~$\gamma_1 = 19$ $\gamma_2 = 4$ $\gamma_3 = 24$~~

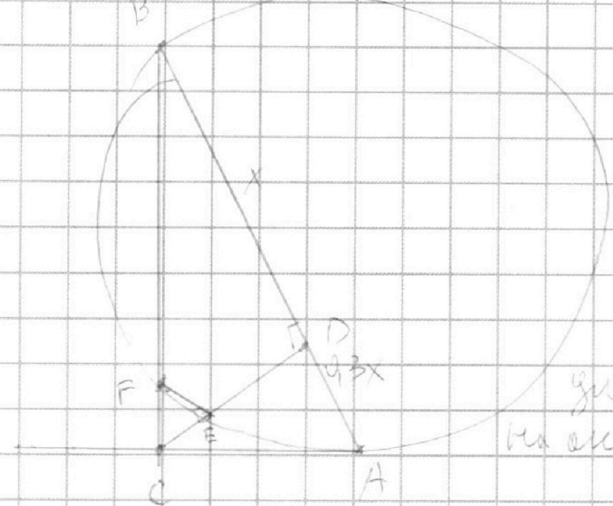
Однако в силу $\gamma_1+\gamma_3 \geq 43$ $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 43$ в силу
целочисленности задачи $\Rightarrow \gamma_1 = 14$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 29$,
при $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 43 \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение: 1) Из [illegible] => точка B либо лежит на окр-ти, либо лежит в ней, либо вне неё, но на ход решения это не влияет, будем считать для окр-ти что она лежит на окр-ти 2) Из $AB : BD = 1,3$ =>

=> $BD = x$ => $AB = 1,3x$ => $AD = 0,3x$; из м. отрезков отр. в пр. Δ => $CD^2 = 0,3x^2$; $BC^2 = BD \cdot BA = 1,3x^2$; $CA^2 = DA \cdot AB = 0,39x^2$ по теореме о кас. и сек. из одной т. $CA^2 = CE \cdot CD$ =>

=> $CE = \dfrac{0,39x}{\sqrt{0,3}}$ 3) В силу $FE \parallel BA$ $\Delta CEF \sim \Delta CDB$ (по 2-м ∠) =>

$$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{FE}{BD},\ FE = \frac{CE}{CD} \cdot BD = 1,3X$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot FE,\ S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DA \Rightarrow S_{ACD} : S_{CEF} = \frac{CD \cdot DA}{CE \cdot FE} =$$

$$= \frac{X\sqrt{0,3} \cdot 0,3X}{\frac{0,39X}{\sqrt{0,3}} \cdot 1,3X} = \frac{0,3\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{0,3}}{1,3 \cdot 0,39} = \frac{30}{169}$$

Ответ: 30 : 169

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1) Выр-е имеет смысл при $\frac{3\pi}{2}+x \in [0;\pi]$ $(x\in[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}])$

~~тогда~~ $\cancel{5\sqrt{1-\sin^2 x}=\frac{3\pi}{2}+x}$, $\cancel{5|\cos x|=\frac{3\pi}{2}+x}$ на

~~области~~ (1) [illegible]

$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{5}\right)$

$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{5}\right)$, $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2\cdot 5}+\frac{x}{5}\right)$

$\sin x = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{4\pi}{5}\right)$ $\quad 2\sin\frac{x-\frac{x}{5}-\frac{4\pi}{5}}{2}\cos\frac{x+\frac{x}{5}+\frac{4\pi}{5}}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{2x}{5}-\frac{2\pi}{5}\right)=0\\ \cos\left(\frac{3x}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)=0\end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l}\frac{2x}{5}-\frac{2\pi}{5}=\pi n\\ \frac{3x}{5}+\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l}x=\pi+\frac{5\pi n}{2}\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi n}{3}\end{array}\right.$

в силу (1) $\quad x=-\frac{3\pi}{2}$, $\cancel{x=\ldots}$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

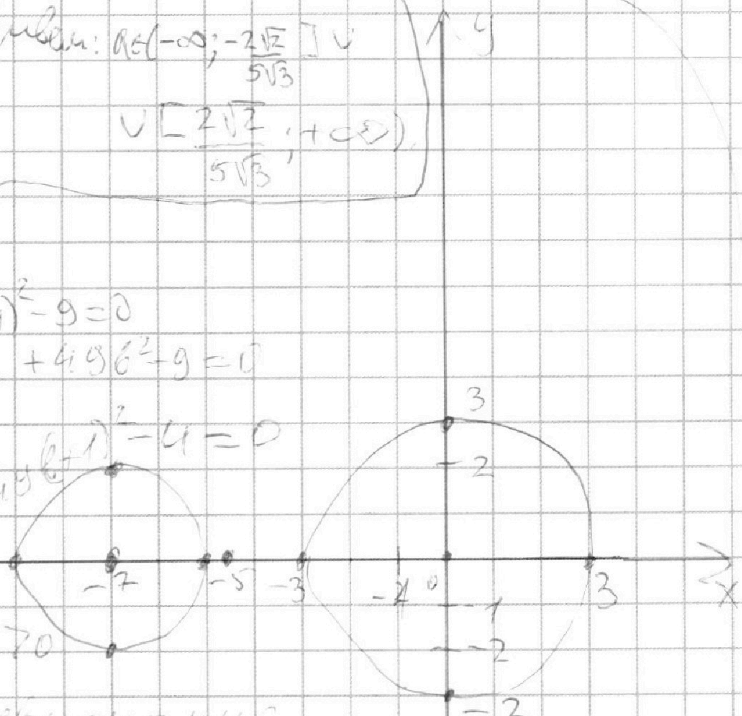
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

МФТИ

$$\begin{cases} 3ay = -x + 7b \\ \left[\begin{array}{l} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}; +\infty\right)$



I) $a \neq 0$ $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$

$x = 7b - 3ay$, $y^2 + (7b - 3ay)^2 - 9 = 0$

$(9a^2+1)y^2 - 2 \cdot 21aby + 49b^2 - 9 = 0$

$\frac{D}{4} = 81a^2 - 49b^2 + 9 > 0$

$(7(b+1) - 3ay)^2 + y^2 - 4 = 0$

$(9a^2+1)y^2 - 2 \cdot 21a(b+1)y + 49(b+1)^2 - 4 = 0$

$\frac{D}{4} = 36a^2 - 49(b+1)^2 + 4 > 0$

II) $a = 0 \Rightarrow x = 7b$, очевидно, что ~~...~~ имеем максимум 2 решения $\Rightarrow$ не подходит

$$\begin{cases} 81a^2 - 49b^2 + 9 > 0 \\ 36a^2 - 49(b+1)^2 + 4 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 > \frac{49b^2 - 9}{81} \\ a^2 > \frac{49(b+1)^2 - 4}{36} \end{cases}$$

Макс. $\frac{49b^2 - 9}{81} - \frac{49(b+1)^2 - 4}{36}$

для имеет тот же знак, что и $(-7b - 21)(35b + 21)$

1) $\frac{49b^2 - 9}{81} - \frac{49(b+1)^2 - 4}{36} > 0 \Rightarrow (b+3)(5b+3) < 0$, $b \in \left(-3, -\frac{3}{5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 > \frac{49b^2 - 9}{81}$ подставляем концы отрезка

$\frac{8}{75} < a^2 < \frac{16}{3}$ $a \in \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ 2) знак в др. сторону $\Rightarrow$

$\Rightarrow b \in (-\infty; -3) \cup \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$. $\Rightarrow a^2 > \frac{49(b+1)^2 - 4}{36}$ $\left[\begin{array}{l} a^2 > \frac{8}{75} \\ a^2 > \frac{16}{3} \end{array} \right.$

$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}; +\infty\right)$ 3) р-во $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = -3 \\ b = -\frac{3}{5} \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} \\ a = \pm\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} \end{array} \right.$ Ответом будет объединение всех a Ответ: ~~$a \in ...$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ОДЗ: I $\begin{cases} 6x>0 \\ 6x\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \frac{1}{6} \end{cases}$

$$\underbrace{2\log_{7}^{5} 6x + 8\log_{7} 6x}_{\text{монотонно возр. ф-я}} = 7$$

монотонно возр. ф-я $\Rightarrow$ данное ур-е имеет не более 1-го решения

ОДЗ: II $\begin{cases} y>0 \\ y\neq 1 \end{cases}$

$$\underbrace{2\log_{7}^{5} y + 8\log_{7} y}_{\text{аналог. выше}} = -7$$

аналог. выше

Сложим два данных ур-я получив сумму двух монотонно↗ ф-й $\Rightarrow$ данное ур-е также имеет не более 1-го решения

$$2\left(\log_7^5 y + \log_7^5 6x + 4(\log_7 6x + \log_7 y)\right) = 0$$

$$(\log_7 6x + \log_7 y)(\log_7^4 6x - \log_7^3 6x\,\log_7 y + \log_7^2 6x\cdot\log_7^2 y - \log_7 6x\cdot\log_7^3 y + \log_7^4 y) +$$
$$+4(\log_7 6x + \log_7 y) = 0$$

$$(\log_7 6x + \log_7 y)(\log_7^4 6x - \log_7^3 6x\cdot\log_7 y + \ldots + \log_7^4 y + 4) = 0$$

$\Rightarrow$ только I скобка имеет реш. (см. монотонность выше) $\Rightarrow$

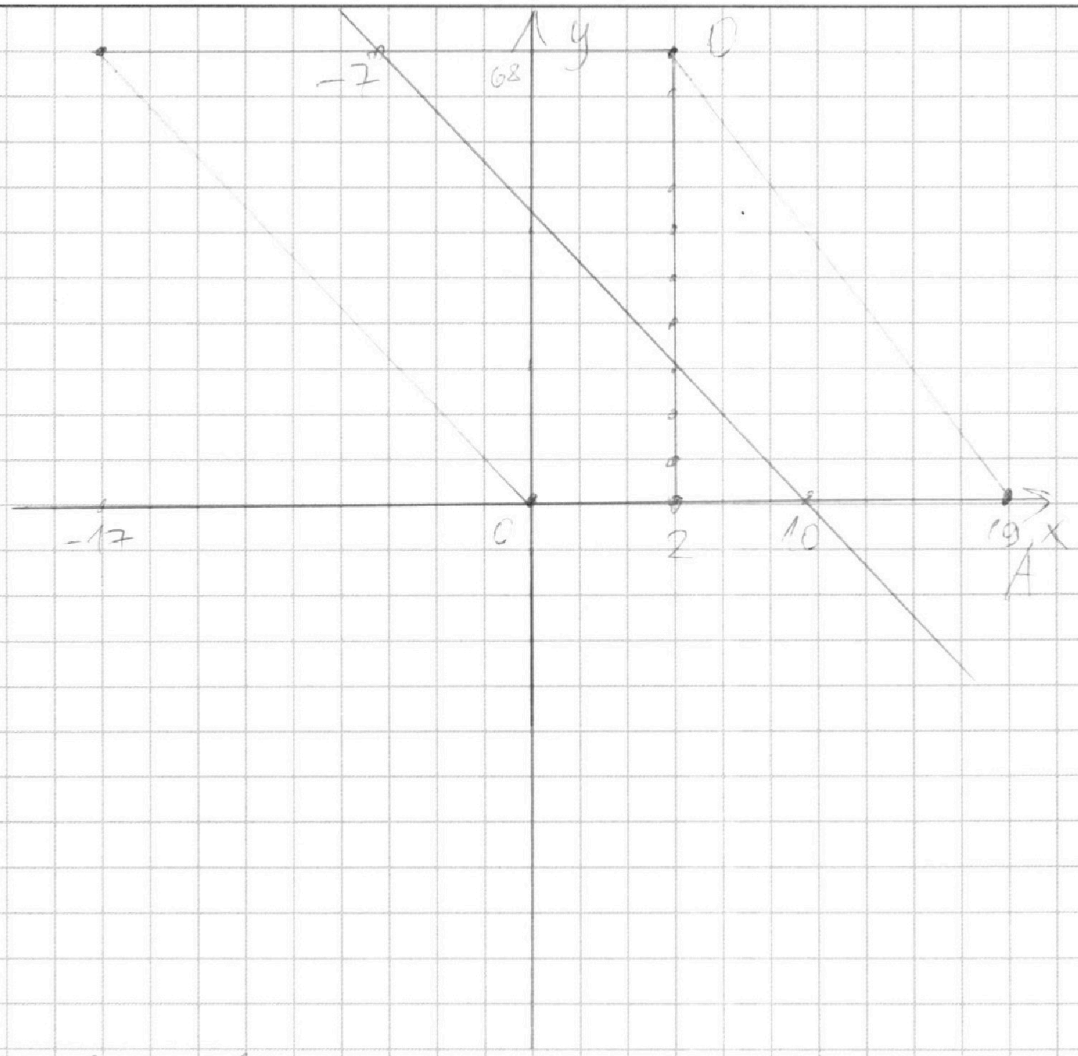
$$\Rightarrow \log_7 6x = \log_7 y^{-1},\quad 6x = \frac{1}{y},\quad 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



между 0 и 2 69·3 целочисл. точек, затем между 2 и 19 $\frac{69+1}{2}$ · 18 = 9·70 точек и между 0 и −17 — 18 · $\frac{69+1}{2}$ = 9·70 точек. Всего целочисл. точек — 9·70·2 + 69·3 − 69·2 = 9·70·2 + 69 = 1329 точек, $4(x_2-x_1)+y_1-y_2=40 \Leftrightarrow 4x+y=40$

$y=40-4k$

т. е. это мн-во целочисл. точек данной прямой. Заметим, что CA ∥ $y=40-4x$ в силу р-ва коэф-ов при X ⇒ кол-во узлов. цел-ых точек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{(19+17)\cdot(19+17-1)}{2} = 18\cdot 35 = 630$$

Ответ: 630

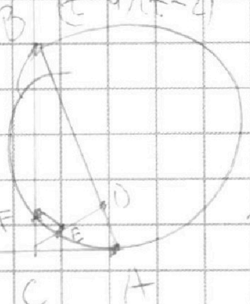
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(2t^3-4)(t-2)$



$\gamma_3-\gamma_1 \geqslant 4$

$\gamma_3+\gamma_1 \geqslant 43$

$\gamma_1-\gamma_2=25$

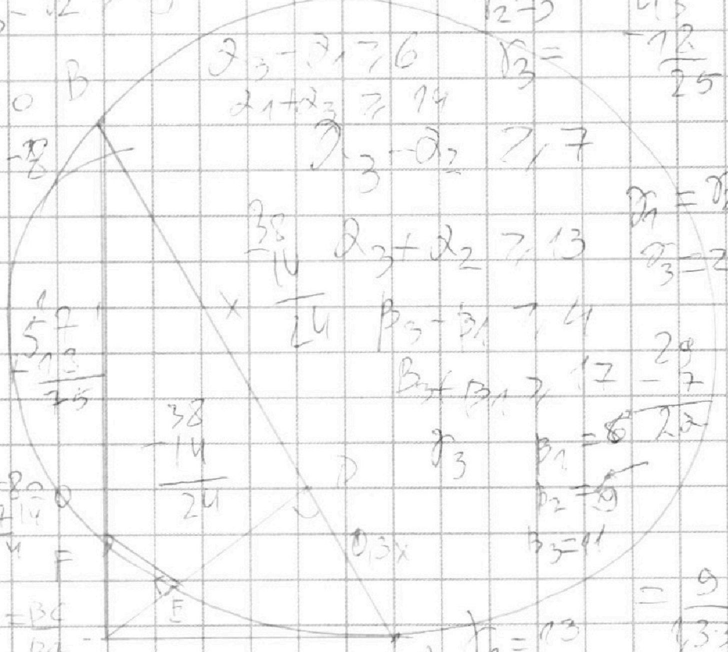
$\gamma_1+\gamma_2=14$

$(x+7)^2+y^2=4$

$\gamma_1=11$

$\gamma_2=3$

$\gamma_3-\gamma_2 \geqslant 29$



$\frac{10}{13}\cdot\frac{9}{39}= \frac{10}{13}\cdot\frac{3}{13}$

$AC^2=CF\cdot BC$

$\triangle BDC \sim \triangle CDA$

$\frac{x}{CD}=\frac{CD}{0,3x}$

$CD^2=0,3x^2$

$t^4-7t+t^4+8=0$

$CE\cdot CD=CA^2$

$BC^2 = x\cdot 1,3x = 1,3x^2$

$CA^2=(1,3x)^2-1,3x^2=1,3x^2(1,3-1)=1,3\cdot 0,3x^2 = 0,39x^2$

$a=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$

$b=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$

$c=2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}$

$\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 7$

$\gamma_2=0$

$\gamma_1=14$

$\gamma_3=29$

$\triangle CEF \sim \triangle ACB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Ответ: а) 1350

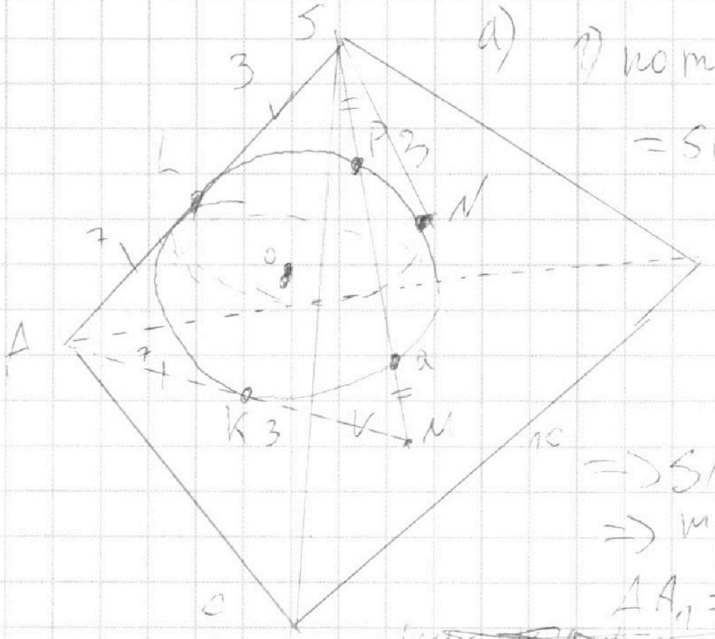
Ответ: а) 1350

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

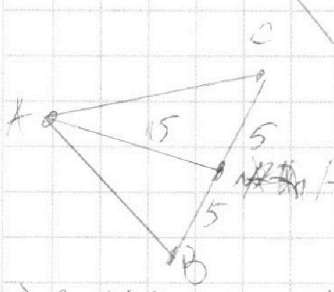
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



а) 1) по т. о кас. и сек. $SL^2 = SP(SP+PQ)$, $MK^2 = MQ(MQ+PQ) = SP(SP+PQ) \Rightarrow SL = MK$

$AL = AK$ (как внутр. кас.) $\Rightarrow SA = AM = BC = 10 \Rightarrow$ т.к. $AM = \frac{2}{3}AA_1$ (с-во т. пер. мед.) $AA_1 = 15$ 2) рассм. $\triangle ABC$, ~~[illegible]~~ $\Rightarrow S_{ABC} = 2S_{ABA_1} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 15\cdot \sin AA_1B = 60 \Rightarrow \sin AA_1B = \frac{4}{5}$, $|\cos AA_1B| = \frac{3}{5}$



1) $\cos AA_1B = \frac{3}{5} \Rightarrow AB^2 = 160$
$\cos AA_1C = -\frac{3}{5} \Rightarrow AC^2 = 340$ $\Big\}$ $CC_1^2 = \frac{2(AC^2+BC^2)-AB^2}{4} = 180$
$BB_1^2 = 45$

$AA_1\cdot CC_1\cdot BB_1 = \sqrt{45}\cdot\sqrt{180}\cdot 15 = 90\cdot 15 = 1350$

2) Аналогично 1, только длины CC_1 и BB_1 поменяются местами, а произведение останется тем же

б) 1) по с-ву отр. кас. $SL = 3 = SN$, $AL = 7 = AK$ из с-ва рад. и кас. $\Rightarrow \triangle SON$ - прямоуг. $\Rightarrow$ по т. Пифагора $SO = 5$, аналогично $AO = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$ из п. а очевидно, что неважно в каком порядке расположены AB и AC, будем считать $AB = 4\sqrt{10}$, $AC = 2\sqrt{35}$, $MK = 3$. Заметим, что $\triangle ABC$ - тупоугольный с тупым углом B, тогда высоты из A и C находятся на продолжениях сторон $\triangle ABC$ 2) $MN = MK = 3$ (отр. кас.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_7^4 6x - \frac{2\log_{6x} 7}{\log_7 6x} - \frac{3}{2\log_7 6x} + 4 = 0$

$(7x^4 - \frac{7}{4})(x^4 - \frac{3}{7})$

$2\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - 7 = 0$ $\quad 2x^5 + 8x - 7 = 0$

$\frac{1}{\log_{6x}^4 7} - 3{,}5\log_{6x} 7 + 4 = 0 \quad -3{,}5\log_{6x}^5 7 + 4\log_{6x}^4 7 + 1 = 0 \mid \cdot -2$

$7\log_{6x}^5 7 - 8\log_{6x}^4 7 - 2 = 0 \quad 7x^5 - 8x^4 - 2 = 0$

$\log_7^4 6x - \frac{2^{12}}{\log_7 6x} - \frac{3}{2\log_7 6x} \cancel{+4} = -4$

$\frac{\log_7^4 6x - 7}{2\log_7 6x} = -4$

$\log_7^4 (6x) + 8\log_7 6x - 7 = 0$

$\log_7^4 6x - \frac{2^{12}}{\log_7 6x} - \frac{3}{2\log_7 6x} + 4 = 0$

$2 \quad \log_7^4 6x - \frac{7}{2\log_7 6x} + 4 = 0$

$2\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - 7 = 0$

$(u+v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4) + 4(u+v) = 0$

$\log_7 6x = \frac{1}{\sqrt[4]{7}}$

$6x = 9^{-1} \quad 7^{-\frac{1}{4}}$

$\log_7^4 9 + \frac{6^{12}}{\log_7 9} - \frac{5}{2\log_7 9}$

$\log_7^4 9 + \frac{7}{2\log_7 9} + 4 = 0$

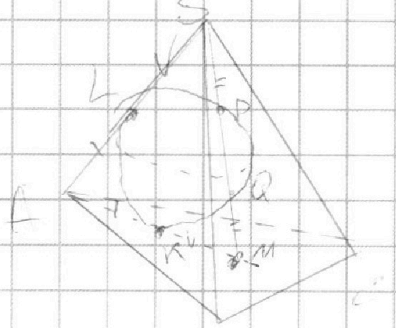
$2\log_7^5 9 + 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

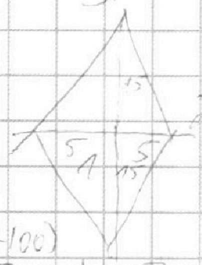
МФТИ



$SL^2 = SP \cdot SQ = SP(SP+PQ)$

$MK^2 = MQ \cdot MP = SP \cdot MP =$
$= SP(SP+PQ)$

$SA = AM = BC = 10$



$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 15 \cdot \sin\varphi = 60$

$\sin\varphi = \frac{12 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{4}{5}$

$\frac{2(AB^2+BC^2)-AC^2}{4} = \frac{2(340+100)}{4} - 40 =$

$15^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5}$

$170 + 10 = 180$ $\frac{225}{4}$

$250 - 90$

$225 + 250 + 90 = 340$

$440 \cdot 2$

$220 - 40$

$\frac{2(340+100)-160}{4}$

$\frac{1}{2}(440)$ $110 \cdot 2 - 40$

$\frac{2(AB^2+BC^2)-AC^2}{4} = \frac{2(160+100)-340}{4}$

$\frac{1}{2}(260) - 85$

$130 - 85$

$CC_1^2 = \frac{2(160+100)-340}{4} = 130 - 85 = 45$

$\sqrt{9 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 5} = 9 \cdot 5 \cdot 2$

$AB^2 = 340$
$AC^2 = 160$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

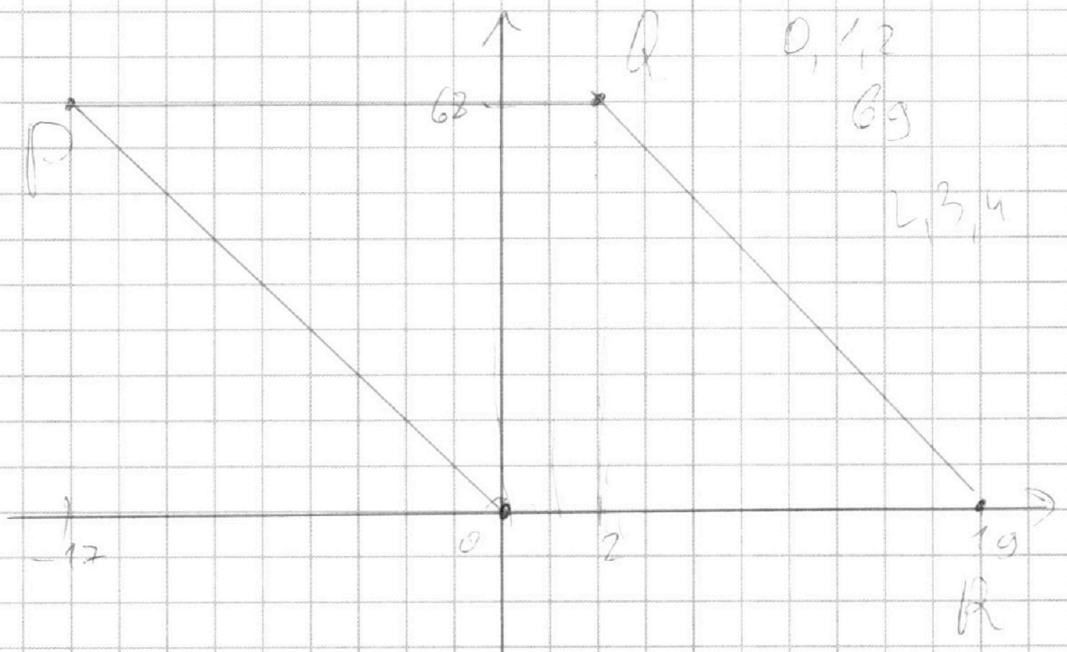
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

0, 1, 2

69

2, 3, 4



69, 68

0, −1, −2

$PO^2 = 17^2 + 68^2$

$QO^2 = 2^2 + 68^2$

$PR^2 = 36^2 + 68^2$

$1260 + 69 = 1329$

135

$68 = 40 - 4x$

$4x = -28$

$x = -7$

$17k = 68$

$k = 4$

(19; 0)

(2; 68)

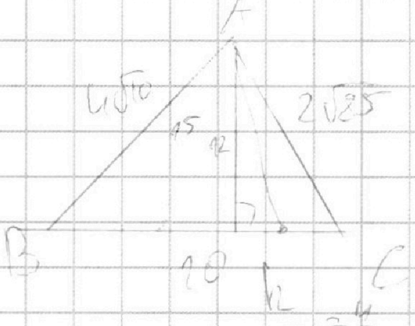
$68 = 2k + b$

$0 = 19k + b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

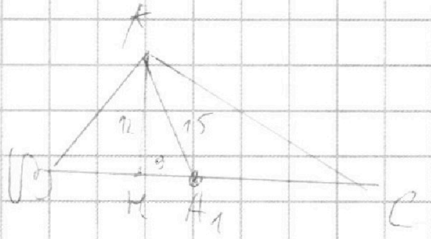
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

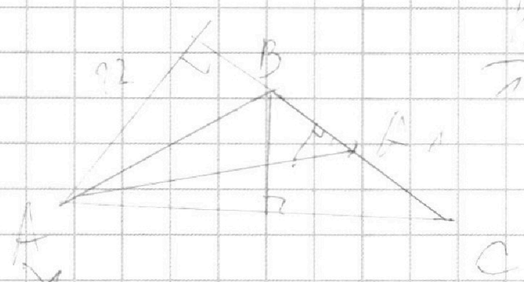
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$h = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{5}$

$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$





$\frac{h}{15}$

$\frac{x}{2} \cdot 12 \cdot 10 = \frac{x}{2} \cdot h \cdot 2\sqrt{25}$

$h = \frac{60}{\sqrt{25}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$t^4 - \frac{2}{t} - \frac{3}{2t} + 4 = 0 \quad | \cdot 2t, \quad 2t^5 - 4 - 3 + 8t = 0$

$2t^5 + 8t - 7 = 0$

$2(t^5 + 4^5) + 8(t-4) - 14 = 0$

$2u^5 - 8u - 7 = 0 \quad 2(t+4)(t^4 - t^3 u + t^2 u^2 + tu^3 + u^4)) + 4(t-4) - 7 = 0$

$t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \quad (2t^4 - \sqrt{7})(t + \sqrt{7})$

$(2t^3 - 7)(t^2 + 1)$

$2t^5 + t^5 - 2t - 7 = 0$

$4 \cdot 49b^2 - 36 - 9 \cdot 49(b+1)^2 + 36 \quad \frac{49b^2 - 9}{81} - \frac{49(b+1)^2 - 4}{36} = 0$

$x^2 + \frac{x^2}{9a^2} \quad (21a(b+1))^2 - ((21a(b+1))^2 - 36a^2 + 49(b+1)^2 - 4)$

$x = 7b - 3ay \quad a^2 > \frac{49b^2 - 9}{81}$

$(7b - 3ay)^2 + y^2 = 9 \quad a^2 > \frac{49(b+1)^2 - 4}{36}$

$y^2(9a^2 + 1) - 42aby + 49b^2 - 9 = 0$

$D_1 = 21a^2b^2 - (9a^2+1)(49b^2 - 9) \geq 0$

$(21ab)^2 - (9a^2+1)(49b^2 - 9)$

$(21ab)^2 - ((21ab)^2 - 81a^2 + 49b^2 - 9) =$

$= 81a^2 - 49b^2 + 9$

$(7b - 3ay + 7)^2 + y^2 - 4 = 0$

$(7(b+1) - 3ay)^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (21a(b+1))^2 -$

$- (9a^2+1)(49(b+1)^2 - 4)$

$49(b+1)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{4\cdot 49b^2-36}{324} \vee \frac{9\cdot 49(b+1)^2-36}{324}$, $(14b)^2 - (21(b+1))^2 \vee 0$

$(14b-21b-21)(14b+21b+21)$

$-7(b+3)\,7(5b+3)$

$\frac{49-9-9}{21} = \frac{9\cdot 48}{21\cdot 9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$

$49\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

$a^2 > \frac{8}{75}$

$\frac{\frac{49\cdot 9}{25}-9}{81} = \frac{9\left(\frac{49}{25}-1\right)}{81\cdot 9} = \frac{24}{25\cdot 3\cdot 3} = \frac{8}{75}$

$\frac{1}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 3}{5^2}$

$-\sqrt{\frac{16}{3}}$ $-\sqrt{\frac{8}{75}}$ $\sqrt{\frac{8}{75}}$ $\sqrt{\frac{16}{3}}$

$\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}\right)$

$\frac{49\cdot 4-4}{36} = \frac{48\cdot 4}{36\cdot 9} = \frac{16}{3}$

$1-\frac{3}{5}$

$\frac{\frac{49\cdot 4}{25}-4}{36} = \frac{\frac{49}{25}-1}{9} = \frac{24}{25\cdot 3\cdot 3} = \frac{8}{75}$

$a^2 = \frac{16}{3}$

$-\frac{4}{\sqrt{3}}$ $-\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$ $\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$ $\frac{4}{\sqrt{3}}$