



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача №1

Запишем члены дележки  $ab, bc, ac$  на деление числа.

$$\text{от } ab = m \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad m, n, k \in \mathbb{N}$$

$$ac = k \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Тогда: } abc = \sqrt{m n k \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}} = \\ = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{m n k \cdot 3 \cdot 5}$$

$$\text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N} \quad abc \in \mathbb{N} \Rightarrow m n k = l^2, \quad l \in \mathbb{N}$$

$\min(abc)$  достигается при  $\min(m n k) \rightarrow \min(m n k) = 15$

$$\text{Тогда: } abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}. \quad \text{Но заметим, что}$$

$$ac = k \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} - \text{кратно } 5^{30} \Rightarrow abc \text{ содержит}$$

6 своих состав степень 5  $\Rightarrow \min(abc) \geq 30$

$$\Rightarrow \boxed{\min(abc) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}}$$

$$\text{Это достигается при } \begin{cases} a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15} \\ b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15} \end{cases}$$

$$\text{И наработка: } 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} ; \quad 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда:  $CD$  - высота в прямоз.  $\triangle \Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{3 \cdot 1} = \sqrt{3}, \quad \Rightarrow BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{2}, \quad AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{3+3} = 2\sqrt{3}$$

2)  $EF \cap BC = M, N$

~~Углы FEM не лежат~~

$$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \angle CAB = 30^\circ; \quad \angle CBA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

3)  $EF \parallel AB \Rightarrow \triangle CEM \sim \triangle CAB$  (угол  $C$ -общий).

$CD \perp AB \Rightarrow CD \perp EF \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{углы FEM и CEM} \\ \text{не лежат} \end{array} \right.$

~~Углы FEM и CEM~~  $\Rightarrow \angle CEF = 90^\circ - \angle CAB = 60^\circ;$

$\angle CME = \angle CBA = 60^\circ$ . Тогда  $\angle ECF = 90^\circ - \angle CEF = 60^\circ;$

~~Углы~~  $\angle CMF = 90^\circ - \angle FCM = 60^\circ$ .

Пусть  $FM = x$ . Тогда  $CM = 2x \Rightarrow CF = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$

$$\Rightarrow EF = 2CM = 4x \Rightarrow EC = \sqrt{(3x)^2 - (\sqrt{3}x)^2} = 2\sqrt{3}x$$

4)  $MB$  - кас. к окр.  $\Rightarrow MB^2 = FM \cdot ME$

$$MB = BC - MC = 2 - 2x$$

$$(2 - 2x)^2 = x \cdot 4x \Rightarrow 4 - 8x + 4x^2 = 4x^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AC}{\frac{1}{2} CF \cdot EF} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}x \cdot 3x} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}x^2} = \frac{4}{3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

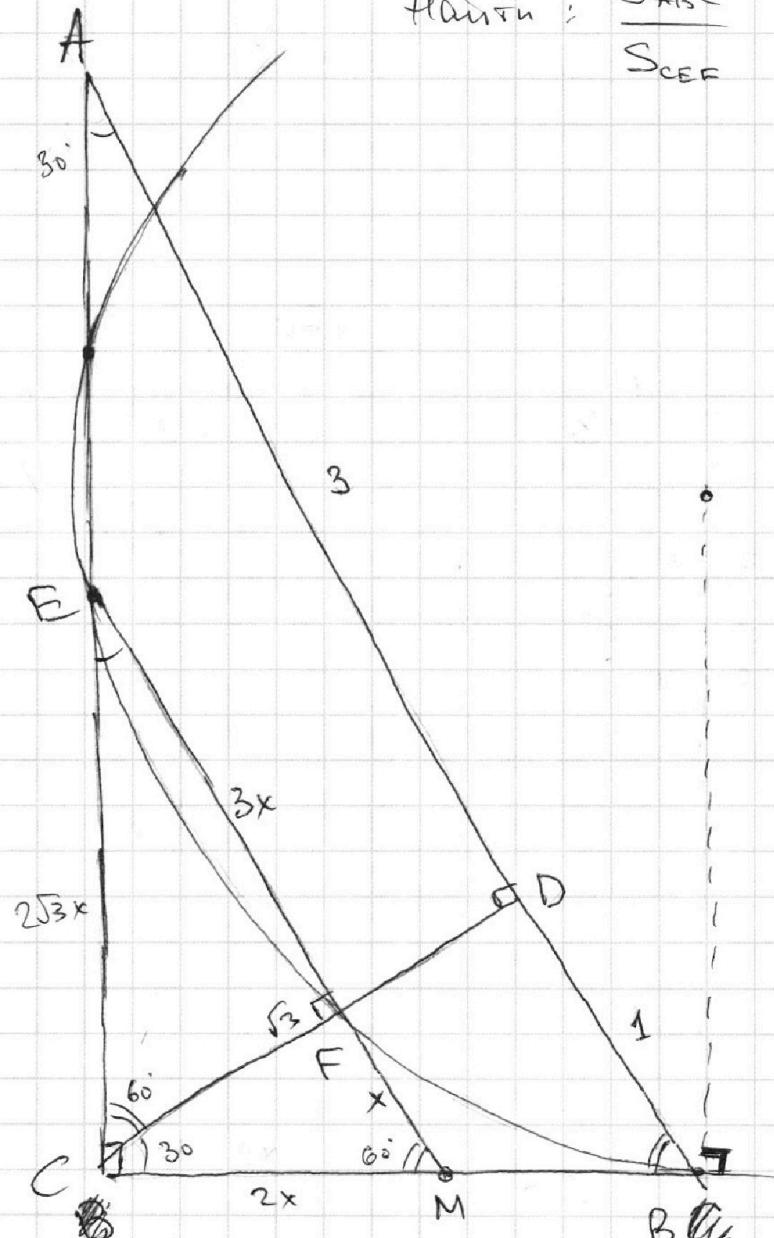
- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 2

найди:  $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$



в) Чертёж симметричный относительно оси

1) т.к.  $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$  Пусть  $BD = 1$   $\Rightarrow AD = 3$

т.к. б) надо найти отношение, можно ввести



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

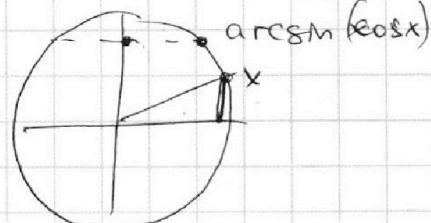
Задача №3

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

1)  $\cos x \geq 0$ ,  ~~$\cos x < 0$~~

$$\Rightarrow \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\Rightarrow \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9) (x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

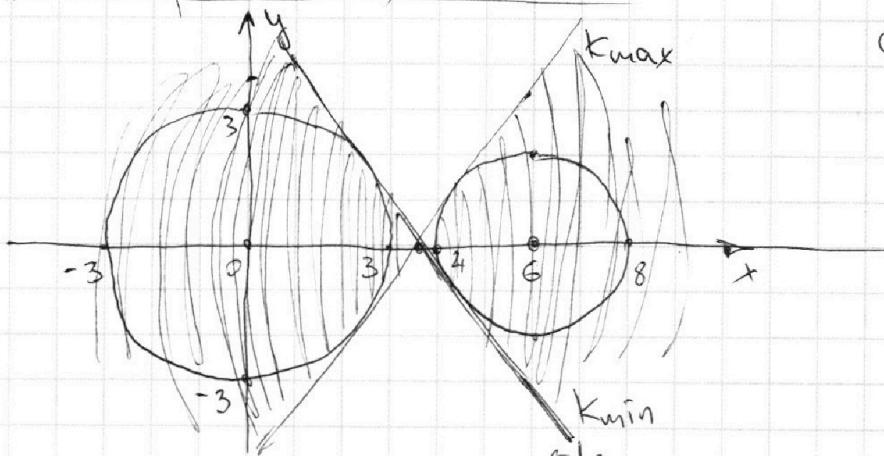
$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad -\text{чертеж окр-ти}$$

с центром  $(0;0)$  и  $R=3$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = (x-6)^2 + y^2 - 4$$

$$(x-6)^2 + y^2 - 4 = 0 \quad -\text{чертеж окр-ти}$$

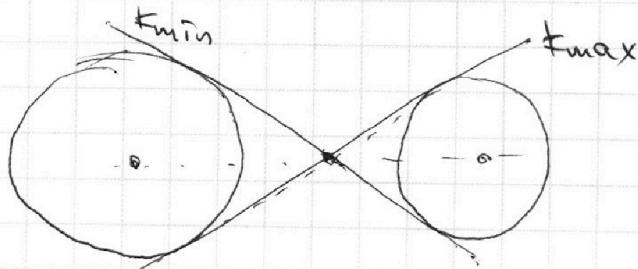
с центром  $(6;0)$  и  $r=2$



$$\begin{aligned} ax + 2y - 3b &= 0 \\ \Rightarrow y &= -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{aligned}$$

Нужно найти такие  $a$  и  $b$  (коэф. наклона прямой),  
чтобы её можно было изобразить и пересечь  
график в 4 точках.

Видно, что касательное  $k$  — это касательное  
к двум окр-тиам



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

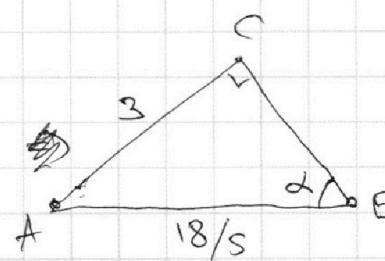
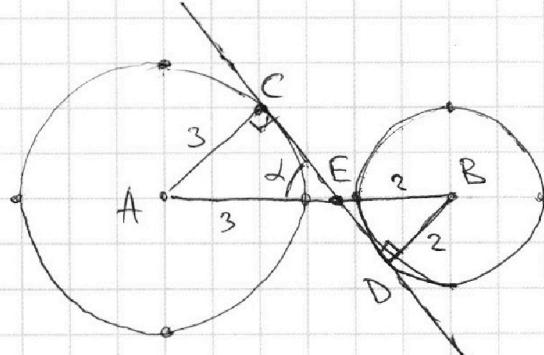
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle ACE \sim \triangle BDE \quad \begin{cases} \angle CEA = \angle DEB \\ AC \parallel BD \\ AC \perp CD \text{ и } BD \perp CD \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{3}{2} = \frac{AE}{EB}$$

$$\text{Также } AE + EB = 6$$

$$\Rightarrow AE = \frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{18}{5}$$

$$EB = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$$

$$CE = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 3^2} = 3 \cdot \sqrt{\frac{36}{25} - 1} \Rightarrow$$

$$CE = \frac{3}{5}\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{AC}{CE} = \frac{3}{\frac{3}{5}\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow k_{\min} = -\tan \alpha \Rightarrow \boxed{k_{\min} = -\frac{5}{\sqrt{11}}}$$

Так, как график симметричен относительно оси  $x$

$$\boxed{k_{\max} = -k_{\min} = \frac{5}{\sqrt{11}}} \Rightarrow k \in \left(-\frac{5}{\sqrt{11}}; +\frac{5}{\sqrt{11}}\right)$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} = k_{\max} \\ -\frac{a}{2} = k_{\min} \end{cases} \quad \boxed{k_{\min} < \frac{a}{2} < k_{\max}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \geq -2k_{\max} \\ a \leq -2k_{\min} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -\frac{10}{\sqrt{11}} \\ a < +\frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; +\frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$1) \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_3 3^5}{\log_3 x^2} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\log_3 1}{\log_3 x} - 8$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$\Rightarrow [2a^5 + 16a + 7 = 0] \quad (1)$$

(ОДЗ:  $x \neq 0$ )

$a = \log_3 x$

$$2) \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^n) - 8 \quad (\text{ОДЗ: } y \neq 0)$$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} = \frac{\log_3 (3^n)}{\log_3 (5y)^2} - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 (5y)} - 8$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8$$

$$\Rightarrow [2b^5 + 16b + 7 = 0] \quad (2)$$

$b = \log_3 (5y)$

$$(1) + (2) : 2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

↓  
0

$$\Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: 5 задач  
 $\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 (5y) = 0$

$$\Rightarrow \log_3 (5xy) = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow \boxed{xy = \frac{1}{5}}$$

Ответ: 1/5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

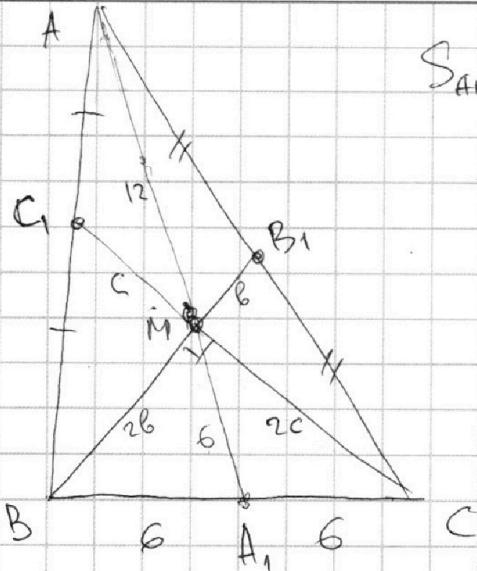
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h \Rightarrow = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$$

$$\Rightarrow h = 15$$

$$S_{AMB} = S_{AMC} = S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = 12$$

$$\Rightarrow S_{BMC_1} = \frac{1}{2} S_{AMB} = 6$$

$$S_{B_1MC} = \frac{1}{2} S_{AMC} = 6$$

$$\text{Пусть } MC_1 = x \Rightarrow MC = 2x$$

$$MB_1 = b \Rightarrow BM = 2b$$

$$\Rightarrow S_{BMC_1} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2b = 2bc = 12$$

$$\Rightarrow AA_1 + BB_1 + CC_1 = 18 + (3b + 3c) = 18 + 9bc = 18 + 9 \cdot 12 = 243$$

$$2) \text{ 2 fac. BCS} \Rightarrow SN = SL \text{ (fac)} = 4$$

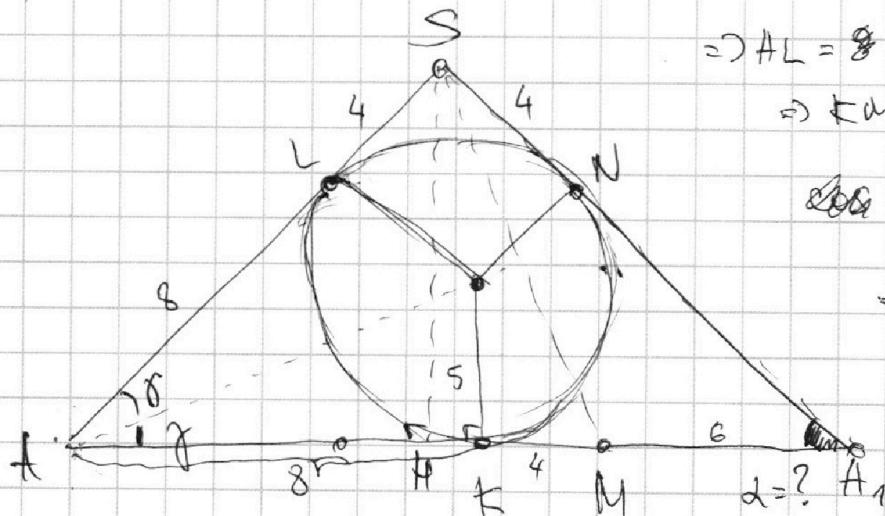
$$\Rightarrow AL = 8 - 4 = 4$$

$$\Rightarrow KM = 4 \text{ AM AK} = 4$$

$$\cos \gamma = \frac{S}{8}$$

$$\sin \gamma = \frac{5}{\sqrt{89}}$$

⇒ ~~sin 2γ~~



$$\Rightarrow \cos 2\gamma = 1 - 2\sin^2 \gamma = 1 - 2 \cdot \frac{25}{89} = \frac{39}{89}$$

$$\Rightarrow \sin 2\gamma = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{89}} \Rightarrow SH \text{ (высота)} = AS \sin 2\gamma = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{89}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AH = AS \cos 2\gamma = 12 \cdot \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{89}}$$

$$\Rightarrow HA_1 = 18 - 12 \cdot \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{89}}$$

$\alpha = \angle A_1 A - \text{искомый}$   
 $\text{двуугранный угол}$

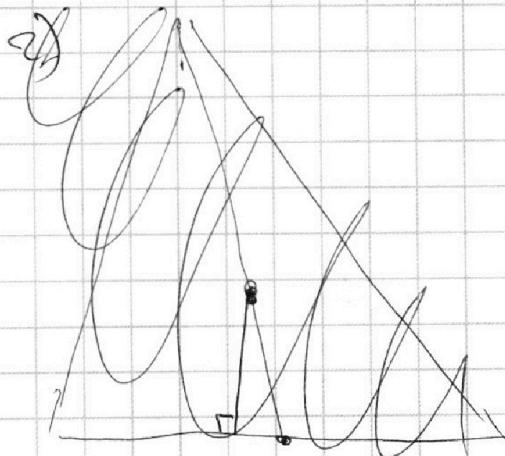
$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{84}{AH} = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{89}} : 6 \left( 3 - 2 \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{89}} \right) =$$

$$HA_1 = 6 \cdot \frac{3\sqrt{89} - 2\sqrt{39}}{\sqrt{89}}$$

$$= \frac{60\sqrt{2}}{6(3\sqrt{89} - 2\sqrt{39})} = \boxed{\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{89} - 2\sqrt{39}}}$$

$\angle$  - искомый угол,

т.к.  $(SAM) \perp (ABC)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

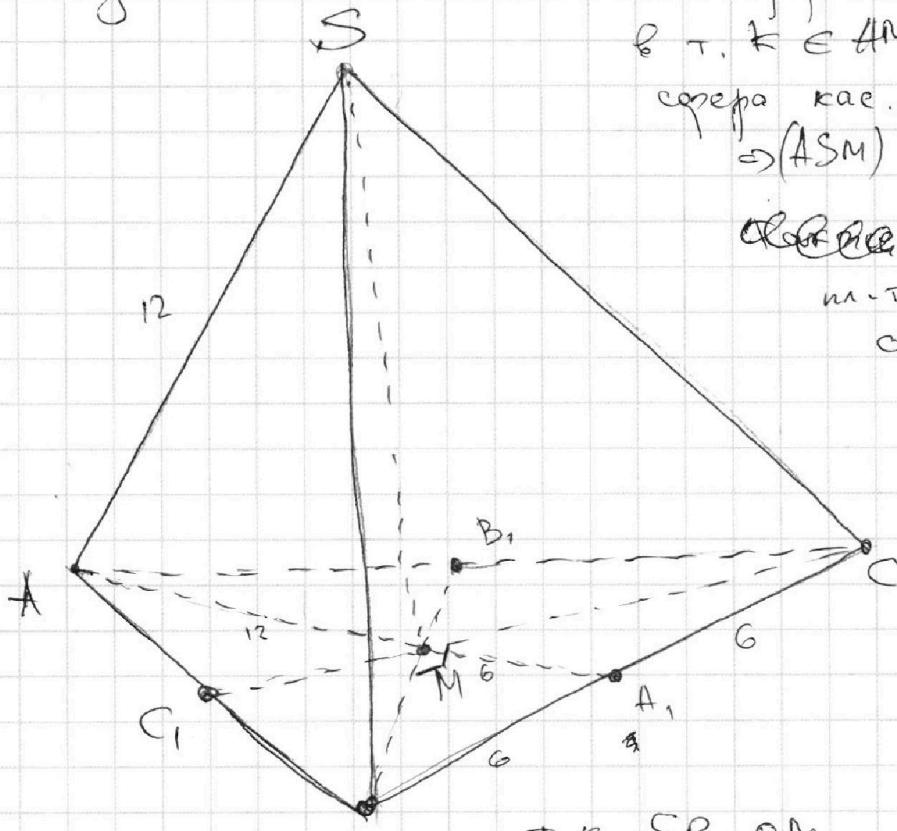


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7



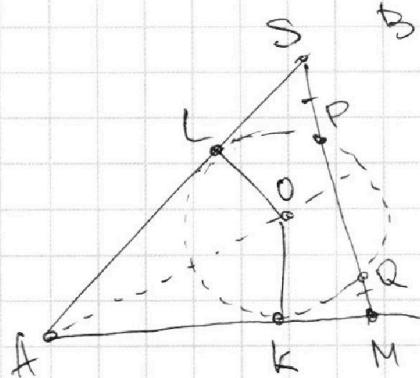
Т.к. сечка кас. пл-ти  $ABC$

п т.  $K \in AM$  и  $l$

сечка кас.  $AS$

$$\Rightarrow (ASM) \perp (ABC)$$

Очевидно  $\Rightarrow$  сечка сечет  
пл-ти  $SAM$  по  
своему большому  
кругу, то есть  
центр  $O \in (SAM)$



Т.к.  $SP = QM$ , то

$$SP \cdot (SP + PQ) = QM \cdot (QM + PQ)$$
  
$$SP^2 + SP \cdot PQ = QM^2 + QM \cdot PQ$$

$$\Rightarrow SP = QM$$

Т.к.  $AL = AK$  ( $\triangle AOL \cong \triangle AOK$ )

$\Rightarrow AS = AM \Rightarrow \triangle ASM - \text{р/б} . AS = AM = 12 = BC$

$$\Rightarrow MA_1 = \frac{AM}{2} = 6 \quad (\text{т.к. } \frac{MA_1}{AM} = \frac{1}{2} \text{ н-перес. междунах})$$

$\Rightarrow$  в  $\triangle BMC$  междунах  $MA_1 = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$

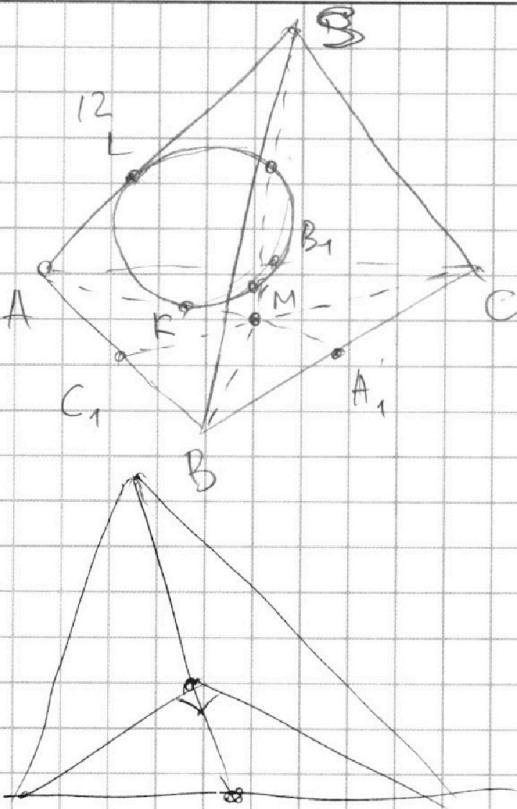
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

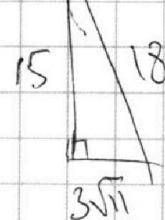
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 90 \cdot \frac{1}{2} h \cdot 12$$

$$h = 15$$



5

6

6

5

6

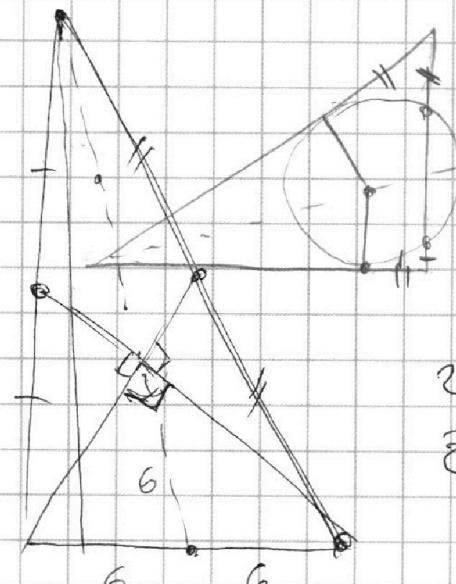
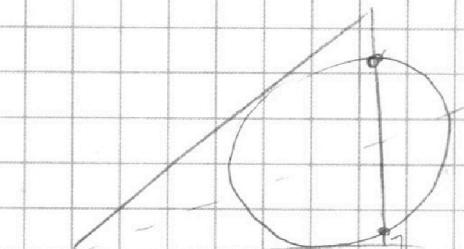
6

5

$$\frac{81}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot S$$

$$405 \cdot 6 = 2430$$

$$64 - 25$$



$$25 + 64 \\ 89$$



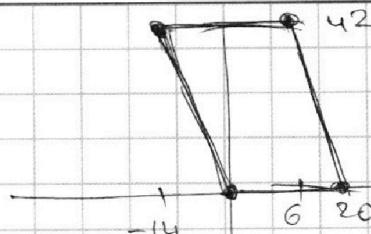
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

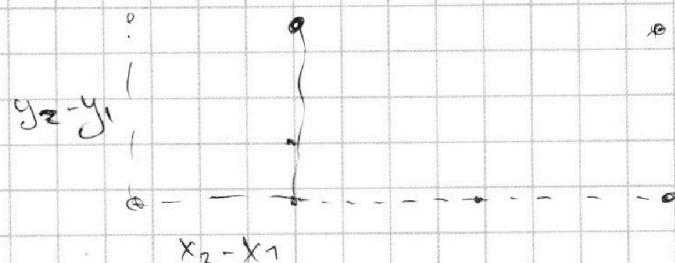
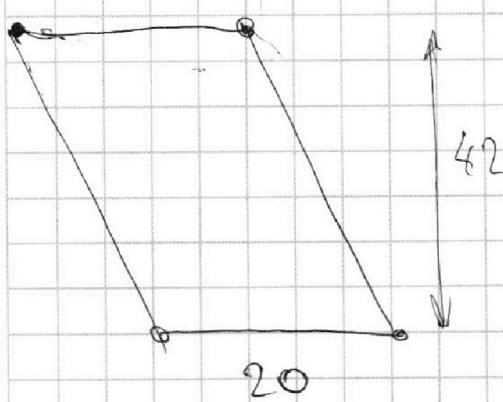
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



пара точек  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_3 3^5}{\log_3 x^2} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$x \neq 3$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t} - 8$$

$$2t^5 + 12 = 5 - 16t$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$\begin{aligned} & \log_3 x + \log_3 y \\ & a+b = \log_3 xy \end{aligned}$$

$$\log_3 \log_3^4 (sy) + 2 \log_3 sy =$$

$$\log_3^4 sy + \frac{2}{\log_3 (sy)} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 (sy)} - 8$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8 \quad 2b^5 + 4 = 11 - 8b^6$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0 \quad 2(a^5 + b^5) + 16(a+b) = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0 \quad 2(a+b)$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 - ab(a^2 + b^2)$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ab) - a^2 b^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{arcsm}(\cos x) = \cancel{x} + \frac{\pi}{2}$$

$$3) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

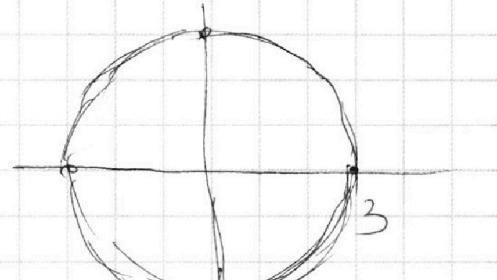
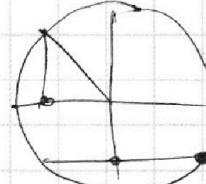
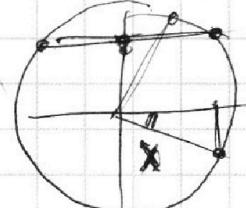
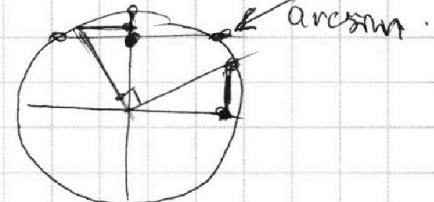
$$\cancel{\sin^2 x = \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\sin(\operatorname{arcsm}(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\operatorname{arcsm}(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$a = ?$  изображено в 4 врем.



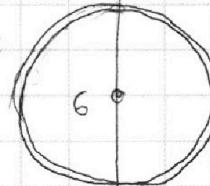
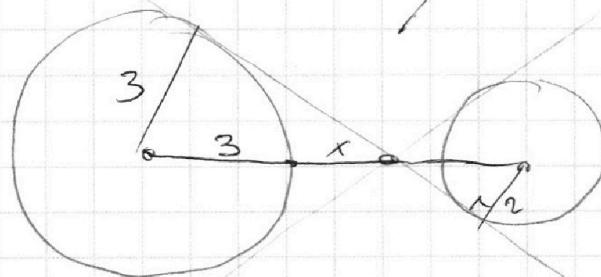
$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$k_{\min} < -\frac{a}{2} < k_{\max}$$

$$a > -2k_{\max}$$



$$(x(3+x))^2 + (3x)^2$$

$$3 \left( \frac{36}{25} - 1 \right)$$

$$x(3+x)^2 + 9 = (3x)^2$$

$$3x + x^2 + 9$$

$$-\frac{a}{2} < \frac{s}{m}$$

$$-a < \frac{w}{m}$$

$$a > \frac{10}{m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

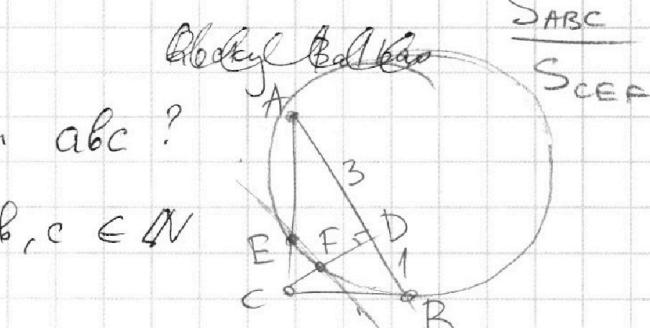
$$ac : 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\overline{ab} = m \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = k \cdot 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{15} \\ b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^{30} \end{array} \right.$$



$$abc = \sqrt{mnk \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$$

$$= 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{mnk \cdot 3 \cdot 5}$$

$$mnk : 15$$

$$mnk = 15 \cdot 5^6$$

$$\min(abc) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\min(abc) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

(30 мин + 1)

$$k = \frac{2}{\sqrt{3}x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

