МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

1) Пусть $a \vdots 2^{\alpha}$; $b \vdots 2^{\beta}$; $c \vdots 2^{\gamma}$, причём α, β, γ — max степени 2 на которые делятся a b и c. Тогда нужно, чтобы $\alpha+\beta+\gamma$ — было min для min произведения abc.

$$\left.\begin{aligned} ab &\vdots 2^{8} \\ bc &\vdots 2^{12} \\ ac &\vdots 2^{14} \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta \geq 8 \\ \beta+\gamma \geq 12 \\ \alpha+\gamma \geq 14 \end{cases} (*)$$ Сложим.

$2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 34 \Rightarrow \underline{\alpha+\beta+\gamma \geq 17}$ — ра-

при $\left.\begin{aligned} \alpha&=5 \\ \beta&=3 \\ \gamma&=9 \end{aligned}\right|$ — система $(*)$ выполнена и $\alpha+\beta+\gamma=17 \Rightarrow$ (достигается)

$abc \vdots 2^{17}$ и может не делиться на 2^{18}.

2) Аналогично $a \vdots 3^{\alpha}$; $b \vdots 3^{\beta}$; $c \vdots 3^{\gamma}$
Рассуждая так же, получим:

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 14 \\ \beta+\gamma \geq 20 \\ \alpha+\gamma \geq 21 \end{cases} (*) \Rightarrow 2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 55$$
(сложим)

ЛИСТ 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ – целые $\Rightarrow$ $\alpha+\beta+\gamma \geq \frac{55}{2} \Rightarrow$

$\underline{\alpha+\beta+\gamma \geq 28} > \frac{55}{2} > 27$

$\alpha+\beta+\gamma=28$ – равенство достигается при $\gamma=14$; $\beta=6$; $\alpha=8$. $\Rightarrow abc \,\vdots\, 3^{28}$ и может быть не кратно 3^{29}. и соотв. системе (*)

3) Аналогично $a \,\vdots\, 5^{\alpha}$; $b \,\vdots\, 5^{\beta}$; $c \,\vdots\, 5^{\gamma}$

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 12 \\ \beta+\gamma \geq 17 \\ \alpha+\gamma \geq 39 \end{cases} (*)$$

$\underline{\alpha+\beta+\gamma \geq 39}$ (т.к. $\beta \geq 0$)

Равенство $\alpha+\beta+\gamma=39$ достигается при $\beta=0$; $\alpha=12$; $\gamma=27$ и соотв. системе (*).
$\Rightarrow abc \,\vdots\, 5^{39}$, но может быть не кратно 5^{40}.

Значит $abc \,\vdots\, (2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39})$ и может быть не кратно большим степеням 2, 3, 5.
Других ограничений на простые множители нет.
$\Rightarrow$ Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ – наименьшее

ЛИСТ 2

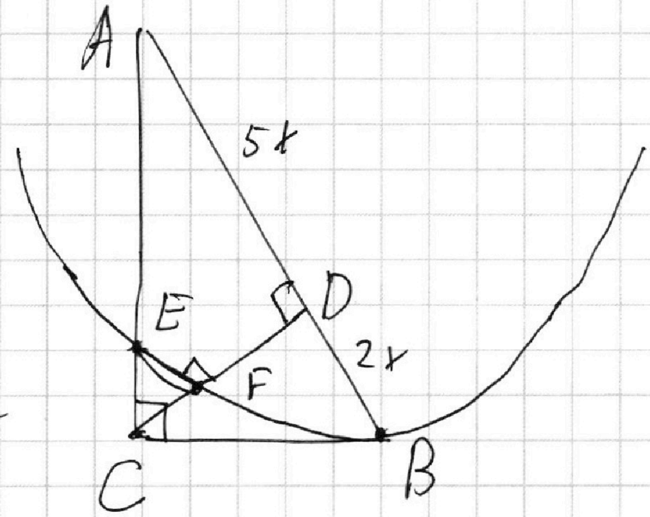
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



Дано: $\triangle ABC$ $\angle C=90°$

CD – высота $\frac{AD}{BD}=\frac{5}{2}$

Окр-сть касается CB в точке B и пересекает CD в F и AC в E.

$S_0 = S_{CEF}$

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_0}$ – ?

Пусть $AD=5x$, тогда $BD=2x$.

По ср. геом для прям $\triangle$:

$CD^2 = AD\cdot BD \Rightarrow CD = x\sqrt{10}$

По т-ме Пифагора для $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$

$CB^2 = x^2\cdot 10 + 4x^2 \Rightarrow CB = x\sqrt{14}$

$AC^2 = 10x^2 + 25x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{35}$

По т-ме о кв-те касательной:

$CB^2 = CE\cdot CA$ $\quad 14x^2 = x\sqrt{35}\cdot EC$

$\Rightarrow EC = \frac{14}{\sqrt{35}}x = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}x$

ЛИСТ 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$ как соотв при $\parallel$ прямых

$\Rightarrow \triangle CFE \sim \triangle CDA$ по 2-м $\angle$ ($\angle C$ – общ; $\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$), $k = \dfrac{CE}{CA} = \dfrac{2\sqrt{7}x}{\sqrt{5}\cdot x\sqrt{35}} = \dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{S_0}{S_{CAD}} = k^2 = \dfrac{4}{25}$; $S_0 = \dfrac{4}{25} S_{CAD}$

$S_0 = \dfrac{4}{25} \cdot \dfrac{1}{2} AD \cdot CD = \dfrac{4}{25} \cdot \dfrac{1}{2} x^2 \sqrt{10} \cdot 5$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot CB = \dfrac{1}{2} x^2 \sqrt{14} \cdot \sqrt{35}$

$\dfrac{S_{ABC}}{S_0} = \dfrac{\frac{1}{2} x^2 \sqrt{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{5}}{\frac{1}{2} x^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{4}{25}} = \dfrac{7}{4/5} = \dfrac{35}{4}$

Ответ: $\dfrac{S_{ABC}}{S_0} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \dfrac{35}{4}$.

ЛИСТ 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Rightarrow -\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\pi=\frac{\pi-2x}{10} \quad \Big| \cdot 10$

$-15\pi+10x=\pi-2x$

$12x=16\pi \qquad \boxed{x=\frac{4\pi}{3}}$ (соотв. $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)$)

5) $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right)$: $\alpha=\frac{\pi}{2}-x$, тогда

$(\alpha+2\pi)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \arcsin(\sin\alpha)=\arcsin(\sin(\alpha+2\pi))=$

$=\alpha+2\pi \Rightarrow$

$\frac{\pi}{2}-x+2\pi=\frac{\pi-2x}{10} \quad \Big| \cdot 10$

$25\pi-10x=\pi-2x; \quad 8x=24\pi$

$\boxed{x=3\pi}$ (соотв. $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right)$)

$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$ других решений нет. Объединив случаи 1–5 получим ответ:

Ответ: $x\in\left\{-2\pi;-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{3};3\pi\right\}$

ЛИСТ 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$$

$$\arcsin(\cos x)=\frac{\pi-2x}{10} \qquad \arcsin\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi-2x}{10}\le\frac{\pi}{2} \qquad -5\pi\le\pi-2x\le5\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{5\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}-x\le\frac{5\pi}{2}}$$

1) Пусть $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, ~~тогд~~

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\frac{\pi-2x}{10}$, $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$, если $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi-2x}{10}\Rightarrow 5\pi-10x=\pi-2x$$

$8x=4\pi$ $\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$ (соотв. $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$).

2) Пусть $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

~~arcsin(sin~~ $\sin\alpha=\sin(\pi-(\pi-\alpha))=\sin(\pi-\alpha)$

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\cancel{\arcsin\left(\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)}=$

$=\arcsin\left(\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)\right)=\frac{\pi}{2}+x$, т.к. при

ЛИСТ5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

таких условиях: $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + x \le \frac{\pi}{2}$ — в $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi - 2x}{10} \Rightarrow 5\pi + 10x = \pi - 2x$

$12x = -4\pi$ $\boxed{x = -\frac{\pi}{3}}$ (соотв. $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$)

3) $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

$\alpha = \frac{\pi}{2} - x$, тогда $-\frac{\pi}{2} < \alpha - 2\pi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin(\sin(\alpha - 2\pi)) = \alpha - 2\pi \Rightarrow$

$\frac{\pi}{2} - x - 2\pi = \frac{\pi - 2x}{10} \Big| \cdot 10$

$-15\pi - 10x = \pi - 2x$; $8x = -16\pi$

$\boxed{x = -2\pi}$ (соотв. $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

4) $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$, тогда

$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin(\sin((\alpha + \pi) - \pi)) = \arcsin(-\sin(\alpha + \pi)) =$

$= -\arcsin(\sin(\alpha + \pi)) = -\alpha - \pi$, т.к. $-\frac{\pi}{2} \le \alpha + \pi < \frac{\pi}{2}$ при $-\frac{3\pi}{2} \le \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

ЛИСТ 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

В силу симметрии отн. O_1O_2:
$a_1 = -a_2 = -\frac{\sqrt{51}}{7}$ (обе ок-сти симметричны отн. O_1O_2 и OX симметр. отн. O_1O_2 $\Rightarrow$ общ. внутренние касательные тоже симметричны).

$\left[\begin{array}{l} A < a_1, \\ A > a_2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} A < -\frac{\sqrt{51}}{7} \\ A > \frac{\sqrt{51}}{7} \end{array}\right.$ $a = 3A$ ~~$A = \frac{a}{3}$~~ $A = \frac{a}{3}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \end{array}\right. \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right).$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

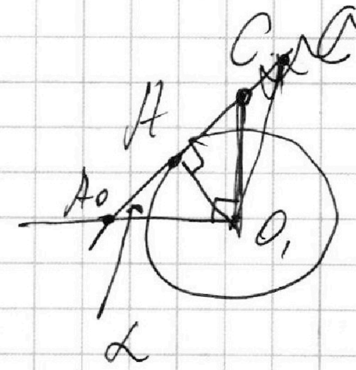
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

эффициента a_2. (тогда $O_1A \perp AB$; $O_2B \perp AB$) и $C = AB \cap O_1O_2$. Пусть $O_1C = x$; $O_2C = y$.

$\Delta O_2BC \sim \Delta O_1AC$ по 2м < ($\angle O_1AC = \angle O_2BC = 90^\circ$ и $\angle ACO_1 = \angle BCO_2$ как верт) $\Rightarrow$

$$\frac{x}{y} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{1}{6} \qquad x+y = O_1O_2 = 10 \text{ т.к. } O_1(0;0),\ O_2(0;10)$$

$$\begin{cases} y = 6x \\ x+y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{60}{7} \end{cases}$$



A_0 – точка пересечения AB и Ox. Тогда $\angle O_1A_0A = \alpha$ – угол наклона прямой a_2 ($tg\,\alpha = a_2$)

~~В~~ $O_1C \perp Ox \Rightarrow \angle A_0O_1A = 90^\circ - \alpha$ (по сумме < Δ)

$\angle AO_1C = \alpha$

Тогда $\cos\alpha = \frac{AO_1}{O_1C} = \frac{1}{x} = \frac{7}{10} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2 x}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$ (α - острый $\Rightarrow \sin\alpha > 0$) $\Rightarrow$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{51}}{7}$. $\Rightarrow$ $\boxed{a_2 = \frac{\sqrt{51}}{7}}$

ЛИСТ 11

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

обе ок-сти в 2^x точках (т.к прямая имеет с ок-стью не более ~~об~~ 2^x общих точек.

Рассмотрим общие внутренние касательные с угловыми коэффициентами a_1 и a_2 $(a_1 < 0 < a_2)$.

~~Если $A < a_1$, то~~

При фиксированном A $y = Ax + B$ — множество всех прямых с угловым коэффициентом A.

Если $A < a_1$, то например прямая пересекающая прямую a_1 например в точке Q (между касаниями) будет иметь 4 точки пересечения с ок-стями $\Rightarrow$ такие A подходят.

Аналогично $A > a_2$ — подходят

Если $a_1 \le A < 0$ и прямая пересекает ок-сть ω_1 $(O(0;0)$ $R = 1)$, то она лежит не выше прямой с

Лист 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

с угловым коэффициентом a_1 (имеет точек пересечения с w_1) (не выше, т.к. $a_1 \le A < 0$), но тогда эта прямая не может пересекать w_2 в 2+ точках (w_2 — $D(0;10)$; $R=6$), а значит условие не выполнено $\forall B$ (если эта прямая не пересекает w_1, то условие тем более не выполнено) $\Rightarrow$ $A \in [a_1; 0)$ — не подходят

Аналогично $A \in (0; a_2]$ — не подходят

$A = 0$: $y = B$ — прямая $\parallel Ox$ — не может в данной ситуации иметь 4 точки пересечения.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A < a_1 \\ A > a_2 \end{array}\right.$ — решения.

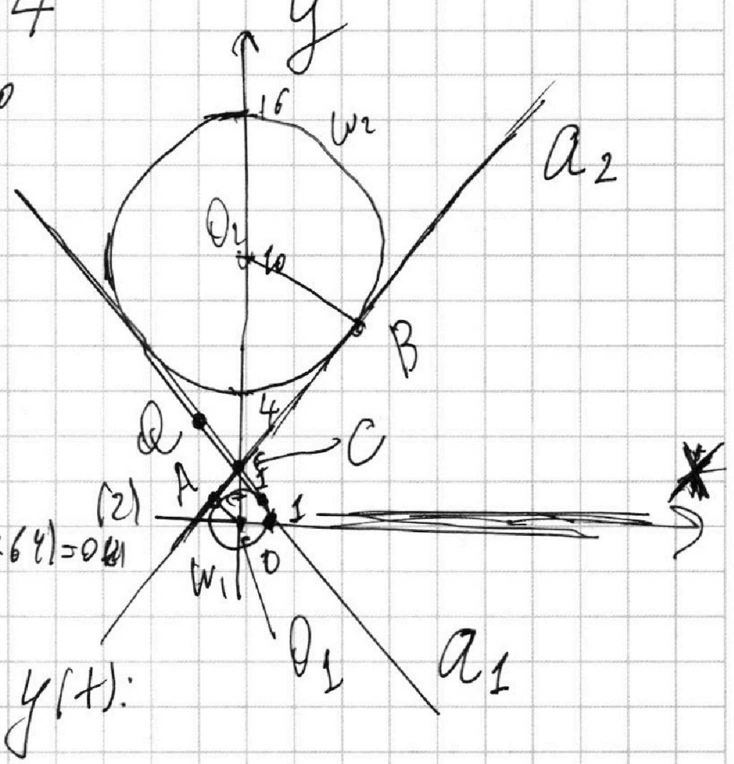
Пусть O_1, O_2 — центры окружностей w_1 и w_2 соотв., O_1A и O_2B — радиусы в точки касания с прямой углового коэф- ЛИСТЮ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



a-? $\exists b$ такое, что система имеет 4 решения.

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 & (1)\\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 & (2)\end{cases}$$

Построим (2) в $y(x)$:

~~2x~~ $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-20y+100=-64+100\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36\end{array}\right.$ – две ок-сти с центрами $(0;0)$ и $(0;10)$ и радиусов 1 и 6 соответственно

(2): $ax-3y=4b \Rightarrow$

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$ ~~$b\in$~~

Замена $\frac{a}{3}=A$, $\frac{4b}{3}=B$ ($b\in R\Rightarrow B\in R$)

$y=Ax+B$ – должно пересекать

ЛИСТ 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{(I)+(II):\quad t^5+u^5+3(t+u)=0}$

$(IV)-(III):\quad u^4-t^4+\frac{13}{3u}+\frac{13}{3t}=0$

$(u^2-t^2)(u^2+t^2)+\frac{13}{3}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{t}\right)=0$

$(u^2+t^2)(u-t)(u+t)+\frac{13(t+u)}{3\cdot ut}=0$

Рассмотрим $t+u=0$

Обр. замена. $\log_5(2x)+\log_5 y=0$

$\log_5 a$

$\log_5(2xy)=\log_5 1 \Longleftrightarrow 2xy=1$

$\boxed{xy=\frac{1}{2}}$. Уже было доказано что других xy быть не может (их не более 1-го)

Ответ: $xy=\frac{1}{2}$.

ЛИСТ 15

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 5

① $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

② $\log_5^4 y + 4\log_5 y = \log_{y^3}0{,}2 - 3$

(xy) - ?

①: $\log_{8x^3}625 = \log_{(2x)^3}5^4 = \frac{4}{3}\log_{2x}5$

②: $\log_{y^3}\frac{1}{5} = -\frac{1}{3}\log_y 5$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{13}{3}\log_{2x}5 + 3 = 0 \\ \log_5^4 y + \frac{13}{3}\log_y 5 + 3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $\log_5(2x) = t$, тогда $\log_{2x}5 = \frac{1}{t}$

$\log_5 y = u$ $\quad \log_5 y = \frac{1}{u}$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0 \quad | \cdot t \neq 0 \\ u^4 + \frac{13}{3u} + 3 = 0 \quad | \cdot u \neq 0 \end{cases}$$

ЛИСТ 13

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} t^5+3t-\frac{13}{3}=0 \quad (I) \\ u^5+3u+\frac{13}{3}=0 \quad (II) \end{cases}$$

Функция $f(x)=x^5+3x$ возрастает на R как сумма возрастающих на R (x^5 и $3x$), значит каждое своё значение она принимает 1 раз $\Rightarrow$ ур-я (I) и (II) имеют не более 1-го решения каждое.

$\log_5(2x)=t$
$\log_5 y=u$ | $y=\log_5 z$ – возрастающая ф-я ($5>1$)

$\Rightarrow$ каждому u и t соотв. единственные x и y.

Значит может существовать не более одного произведения xy.

Найдём его.

$$\begin{cases} t^5+3t-\frac{13}{3}=0 \quad (I) \\ u^5+3u+\frac{13}{3}=0 \quad (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^4-\frac{13}{3t}=-3 \quad (III) \\ u^4+\frac{13}{3u}=-3 \quad (IV) \end{cases}$$

ЛИСТ 14

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Это пар-м с вершинами $(9;0)$; $(0;0)$; $(-9;9)$ и $(0;9)$. ⊛⊛

На его сторонах $\parallel OX_1$: $9-0+1=10$ точек.

k — от 0 до 9 $\Rightarrow$ таких прямых $9-0+1=10$ шт

Значит всего в пар-м включая границы входятят искомые $K_0=10^2$ точек, при выборе которых $(45+y_1+5x_1)\in[0;90]$ — условие ⊛ $\Rightarrow$

Всего искомых пар $17\cdot10^2=1700$.

Из пар-ма ⊛⊛: $0\le k+x_1\le 9$ $\Rightarrow$

$45\le45+5k+5x_1\le90$, но точки на крайней прямой $k+x_1=9$: $y_1+5x=45$ $(45=5\cdot9)$ — в пар-ме PQRO пересекают OY в $(0;45)$ $\Rightarrow$ эти точки уже учтены при подсчёте другими $\Rightarrow$

Нужно убрать из K_0 10 точек на прямой $(9;0)$; $(0;9)$ $b\,k(x_1)$, тогда всего $17(10^2-10)=1530$ вар

Ответ: 1530.

ЛИСТ 19

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$|k|=5 \Rightarrow$ на этой стороне $18-2+1=17$ — (целое) точек с целыми координатами $\Rightarrow$ Всего $17k_0$ искомых точек, где k_0 — кол-во способов выбрать A так, что прямая $y_2(x_2)$ проходит через точки нар-ма) (*).

PQ — пересекает OY в $(0;0)$, и RQ $(y=-5x+90)$ в $(0;90) \Rightarrow$

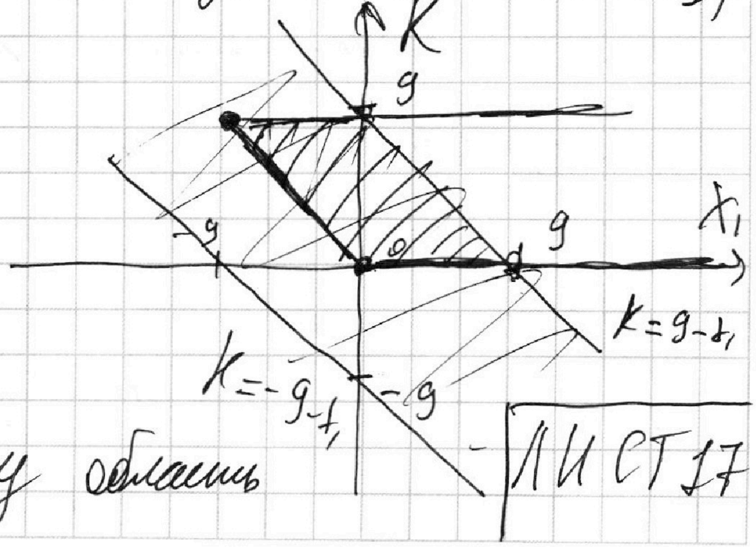
$(45+y_1+5x_1) \in [0;90]$ — условие (*).

$\Rightarrow y_1 = 5k,\ k \in \mathbb{Z}$, тогда $0 \le 45+5k+5x_1 \le 90$

$\Rightarrow -9 \le k+x_1 \le 9$

начертим эту область в $k(x_1)$

$k=9-x_1$, $k=-9-x_1$ | прямые проходящие через $(9;0);(0;9)$ и $(-9;0);(0;-9)$ соотв.



Ограничим эту область

ЛИСТ 17

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

тели значениями, которые могут соотв. точкам RORQ.

PO: $y=-5x$ (т.к. коэф. $k=-5$ и проходит через $(0;0)$)

Если $y=y_2=5k$; $x=x_1 \Rightarrow$ $k=-x_1$ — ур-е точек на стороне PO в $K(x_1)$

Линейная ф-я через $(9;0)$ и $(-9;9)$

$y \geq 0$ $y=5k \Rightarrow \underline{k \geq 0}$ — пересекает $k=0$ в $(9;0)$ $k+x_1=9$.

Если $x_1=9$ найдём возможн. k

RQ: $y=-5x+90$ $x_1=9 \Rightarrow y=45=5k$
$\Rightarrow k \leq 9$ — верно для $x_1=9 \Rightarrow$ верно для других x_1 также ($x_1<9$ — при ограничении $k+x_1 \geq 0$)

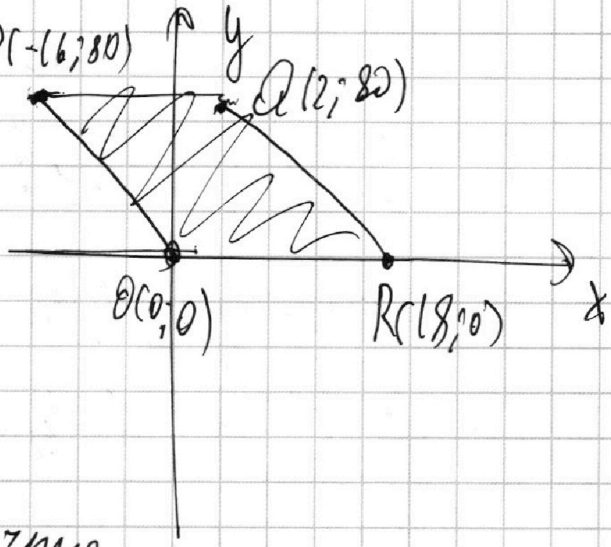
Таким образом все искомые точки на $K(x_1)$ — ограничены

$-9 \leq k+x_1 \leq 9$
$k \geq 0$
$k \leq 9$

(2) $k+x_1 \geq 0$

Лист 18

№6



Дано: пар.м ORQP
$O(0;0)$ $P(-16;80)$;
$Q(2;80)$; $R(18;0)$

Кол-во $A(x_1;y_1)$ и
$B(x_2;y_2)$ — ? таких, что

$5x_2-5x_1+y_2-y_1=45$

Пусть $A(x_1;y_1)$ фиксирована $\Rightarrow$

$y_2=-5x_2+(45+y_1+5x_1)$ — прямая на которой лежит B.

Рассмотрим RQ: $y=kx+b$ — ур-е прямой

$\begin{cases}80=2k+b\\0=18k+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-5\\b=90\end{cases}$

$k=-5$ совпадает с коэф. наклона стороны пар-ма $(y_2=-5x_2+(45+y_1+5x_1))$

Значит эти прямые ~~сов-падают с~~ $\parallel$ стороне RQ.

ЛИСТ 16

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$HA_1 = \frac{\sqrt{23 \cdot \cancel{7} 3}}{2}$.

Площадь $\triangle$ из медиан CC_1 и BB_1 с $\angle A$ составляет $\frac{3}{4} S_{ABC}$ по одному из св-ств медиан

$\frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin A \cdot \cancel{AA} BB_1 \cdot CC_1$

$BB_1 \cdot CC_1 = \frac{150}{\sin A}$. Искомое $AA_1 \cdot BB_1 CC_1 =$

$= \frac{150 \cdot 24}{\sin A} = \frac{3600}{\sin A}$.

Т-ма Пифагора: $AB = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + (AH_1 + 8)^2}$

$AC = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + (8 - AH_1)^2}$

По т-ме косинусов $256 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$

$\Longrightarrow$

Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3600}{\sin A}$, где $\sin A =$
$= \sqrt{1 - \cos^2 A}$, где $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - 256}{2AB \cdot AC}$, где
$AB = \sqrt{\frac{625}{4} + (AH_1 + 8)^2}$, $AC =$

ЛИСТ 22

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$= \sqrt{\frac{625}{4} + (8 - AK_1)^2}, \quad AK_1 = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2}.$$

ЛИСТ 23

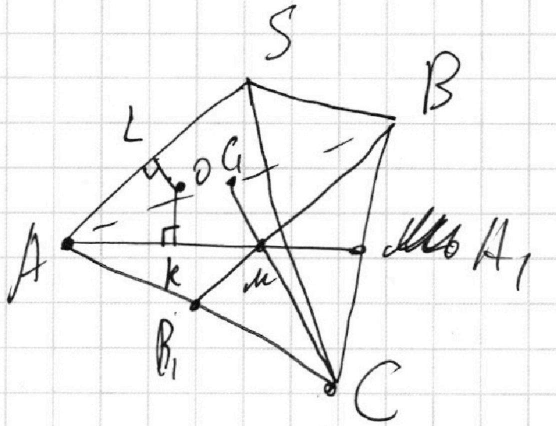
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

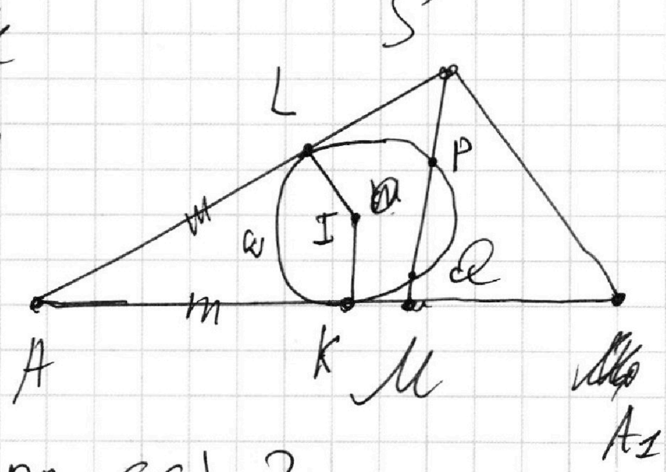
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



Дано: $SABC$ – пирамида
Медианы $\triangle ABC$ пересечения в точке M
Сфера Ω касается AS в L и (ABC) в K
$K \in AM$ и пересекает SM в P и Q.
$SP = MQ$; $SA = BC = 16$
$S_{ABC} = 100$



а) Найти: $(AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1)$ – ?

Рассмотрим (ASA_1). ~~$OK \perp (ABC)$ – радиус.~~
~~$\Rightarrow OK \perp AA_1$~~.

В сечении Ω (ASA_1) получается окр-сть ω, которая касается AA_1 в K и AS в L (т.к. $K, L \in (ASA_1)$ и других точек пересечения не может быть т.к. сфера касается AS и (ABC))

Лист 20

По т-ме о кв-те касательной

$SL^2 = SP \cdot CQ = SP(SP+PQ)$

$KM^2 = MQ \cdot MP = MQ(PQ+MQ)$

$MQ = SP \Rightarrow SL = KM$. (если P и Q – в другом порядке отн. MS – аналогично $LS = KM$)

$AL = AK$ по св. 2^x касат, провед из 1й точки

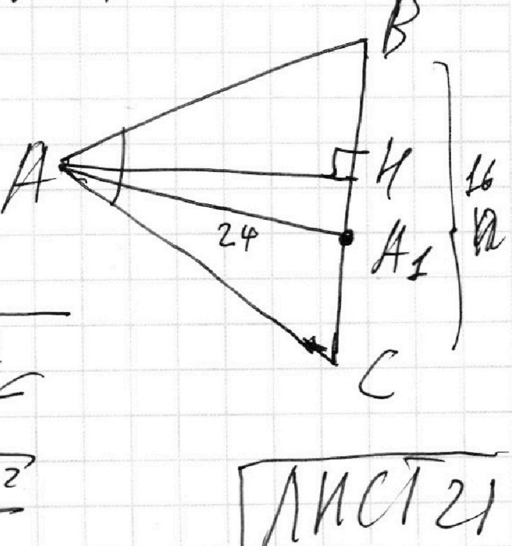
$\Rightarrow AS = AL + LS = AK + KM = AM = 16$

По св. медиан $\frac{AM}{AM_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow AM_0 = 24$

$S_{ABC} = 100$; Пусть AH – высота

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$

$200 = AH \cdot 16$ $AH = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$



По т-ме Пифагора

для $\triangle AHA_1$: $\cancel{HA_1 = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 -}}$

$HA_1 = \sqrt{24^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{48^2 - 25^2}}{2}$

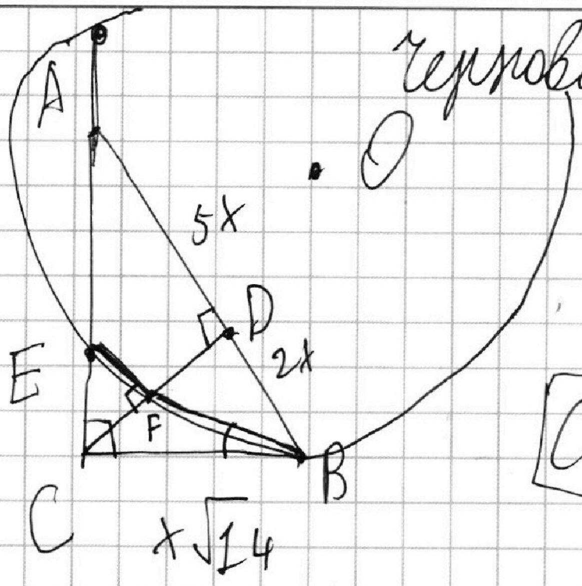
ЛИСТ 21

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



черновик

$AB \parallel EF$

$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} - ?$

$\boxed{CD = x\sqrt{10}}$

$CB = x\sqrt{10+4} = x\sqrt{14}$

$AC = x\sqrt{10+25} = x\sqrt{35}$

$CB^2 = AC \cdot EC \quad x^{\cancel{2}} 14 = \cancel{x}\sqrt{35} \cdot EC$

$EC = x\frac{14}{\sqrt{35}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}x \quad \frac{EC}{AC} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{35}} = \frac{2}{5}$

$S = \frac{4}{25} S_{ACD} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot x\sqrt{10}$

$\frac{\frac{1}{2} \cdot x^2\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{x^2}\cdot 5\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}{\sqrt{10}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot 7\cdot\cancel{\sqrt{5}}\cdot 5}{\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{5}}\cdot 4} = \frac{35}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

$bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} \cdot 5^{39}$

abc - min

$a \vdots 2^{\alpha}$

$b = 2^{\beta}$

$c = 2^{\gamma}$

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 8 \\ \beta+\gamma \geq 12 \\ \alpha+\gamma \geq 14 \end{cases}$$

$2\alpha+2\beta+2\gamma \geq 34$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 17$

$\cancel{\alpha=7; \gamma=7, \beta=3}$

$\alpha=5$
$\beta=3$
$\gamma=9$

2^{17}

$a \vdots 3^{\alpha}$; $b \vdots 3^{\beta}$; $c \vdots 3^{\gamma}$

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 14 \\ \beta+\gamma \geq 20 \\ \alpha+\gamma \geq 21 \end{cases}$$

$2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 56$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 28$

$\gamma=14; \beta=6; \alpha=8$

34
21
56

$\frac{55}{2}=$

55 | 2
27,5
15

3^{28}

$\alpha = 17$

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 12 \\ \beta+\gamma \geq 17 \\ \alpha+\gamma \geq 39 \end{cases}$$

29
39
68 | 2
34

$\cancel{\alpha+\beta+\gamma \geq 34}$

$\boxed{\alpha+\beta+\gamma \geq 39}$

5^{39}

$\beta=0; \alpha=12; \gamma=27$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ черновик $\sin\alpha = \sin(\alpha - 2\pi)$ $\cos\alpha = 1$ $\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} - x - 2\pi = \frac{\pi - 2x}{10}$ $\frac{10\pi}{8}$ $\frac{5\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ 5π

$-10x + 5\pi - 20\pi = \pi - 2x$ $8x = -16\pi$ $\boxed{x = -2\pi}$

4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin\alpha = \sin((\alpha+\pi) - \pi) =$
$= -\sin(\alpha + \pi)$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{10\pi}{6}$ $-\frac{5\pi}{3}$

$-(\pi + \frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$-15\pi + 10x = \pi - 2x$ $12x = 16\pi$ $x = \frac{4\pi}{3}$

5) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi)$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi - x = \frac{\pi - 2x}{10}$

$25\pi - 10x = \pi - 2x$ $24\pi = 8x$ $x = 3\pi$

$ax - 3y + 4b = 0$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$

$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$ $x^2 + y^2 - 20y + 100 = -64 + 100$

$x^2 + (y - 10)^2 = 6^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

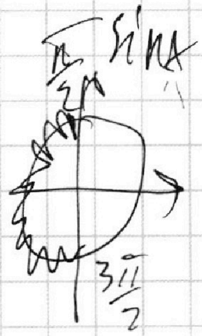
МФТИ

Черновик

$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$

$\arcsin(\cos x)=\frac{\pi-2x}{10}$

$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha,\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$



$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi-2x}{10}\le\frac{\pi}{2}$ $\quad -5\pi\le\pi-2x\le5\pi$

$-6\pi\le-2x\le4\pi$ $\quad -4\pi\le2x\le6\pi$

$x\in[-2\pi;3\pi]$

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$-3\pi\le-x\le2\pi$ $\quad \boxed{-\frac{5\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}-x\le\frac{5\pi}{2}}$

1) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: $\quad \frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi-2x}{10}$

$5\pi-10x=\pi-2x$ $\quad 4\pi=8x$ $\quad x=\frac{\pi}{2}$

2) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$: $\quad \sin\alpha=\sin(\pi-(\pi-\alpha))=\sin(\pi-\alpha)$

$\pi-\frac{\pi}{2}+x=\frac{\pi-2x}{10}$ $\quad 5\pi+10x=\pi-2x$ $\quad x=-\frac{\pi}{3}$

$12x=-4\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$\frac{xy}{2}$

$\log_5^4 x - 3\log_x 5 = \log_{x^3} 625 - 3$

$\frac{1}{8}$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$

$y > 0$
$y \neq 1$

$x > 0$
$x \neq 1$

125

$\log_5^4 x - 3\log_x 5 = \log_x$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_y \frac{1}{2} - 3$

$\frac{1}{8}$

$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{1}{-\log_2 y} - 3$

$\log_{x^3} 625 = \log_{x^3} 125 + \log_{x^3} 5$

$\log_x 5$

$a^6 + 26 \cdot 4a$

$2at^2 + a^3 t - 13 = 0$

$\log_5^4 y - 4\log_y \frac{1}{5} = \log_{y^3}\left(\frac{1}{125}\right)^3 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5$

$a^3 t + 2at^2 = 13$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\log_{y^3} 0{,}2 = \log_{y^3}\frac{1}{5} = \log_{y^3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 = \log_y \frac{1}{\sqrt[3]{5}} =$$

$$= \log_y 5^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\log_y 5 \qquad \log_5 y + \log_5(2x) = 0$$

$$\log_5(2xy) = 0$$

$$2xy = 1 \quad \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \log_5^4 y + \frac{13}{3}\log_y 5 = -3 \\ \log_5^4(2x) - \frac{13}{3}\log_5(2x) = -3 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + \frac{13}{3\log_5 y} = -3$$

$$\begin{cases} x^4 + \frac{13}{3}x = -3 \\ y^4 - \frac{13}{3}y = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{y^4 - \frac{13}{3y} = -3}$$

$$x^4 - y^4 + \frac{13}{3}(x+y) = 0$$

$$(x^2+y^2)(x-y)(x+y) + \frac{13}{3}(x+y) = 0$$

$$\begin{cases} y^4 + \frac{13}{3y} = -3 \\ x^4 - \frac{13}{3x} = -3 \end{cases}$$

$$x^4 - y^4 - \frac{13}{3x} - \frac{13}{3}y = -3$$

$$y^5 + 3y + \frac{13}{3} = 0 \qquad y^4 + \frac{13}{3y} + 3 = 0$$

$$x^5 - \frac{13}{3x} + 3 = 0 \qquad x^5 + 3x - \frac{13}{3} = 0$$

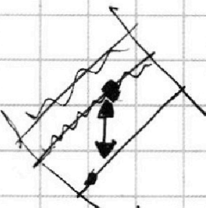
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

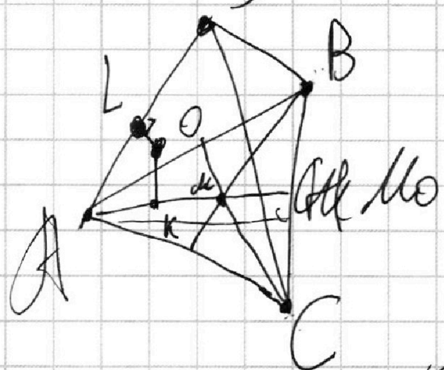
Черновик



$y=-5x+45$

$0 \le n+x_1 \le 9$

$45 \le 45+5(n+x_1) \le 90$



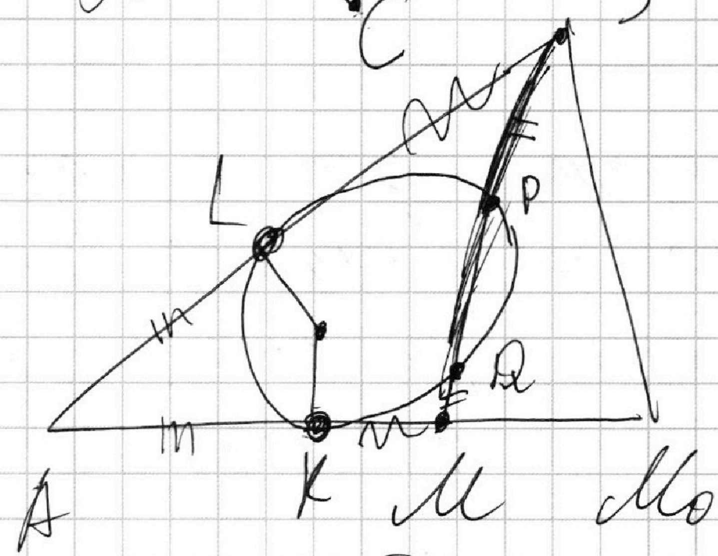
$S_{ABC}=100$

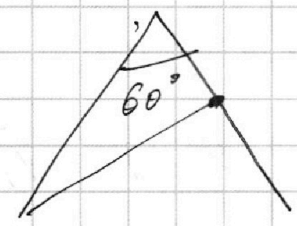
$SA=BC=16$

$BC=16$

$AM=16$

$\boxed{AM_0=24}$





$a \to \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$a^2 \quad \frac{3}{4}a$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\, 15 \\ \hline 120 \\ +\, 24 \\ \hline 360 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$45+5x_1+y_1$ $y_1 \vdots 5$ $y_1=5k$

$0 \leq 45+5x_1+y_1 \leq 90$

$0 \leq 9+x_1+k \leq 18$

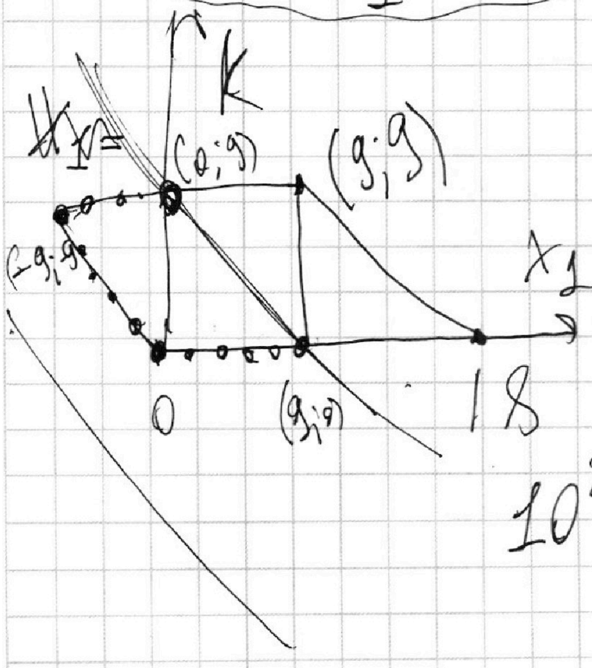
$-9 \leq x_1+k \leq 9$

$x_1 \in \{-16; \dots, 18\}$

$k \in \{0; 16\}$

$x_1 \in \{-9; \dots, 9\}$

$k \in \{0; 9\}$



$x_1=-9: \varnothing$

$10^2 \cdot 17 = 1700$

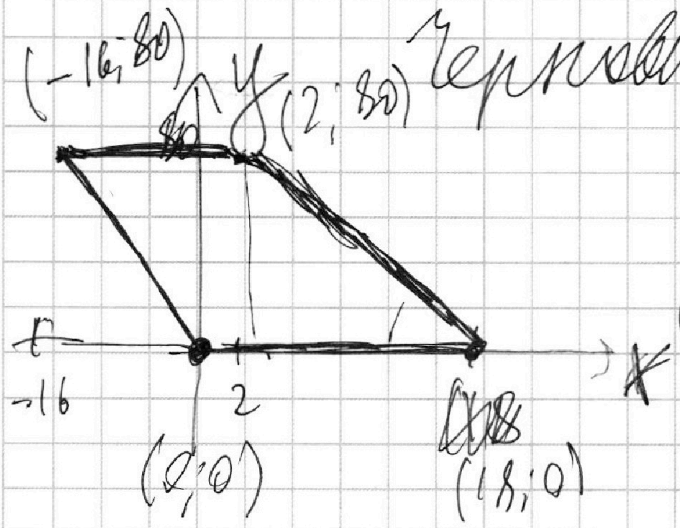
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

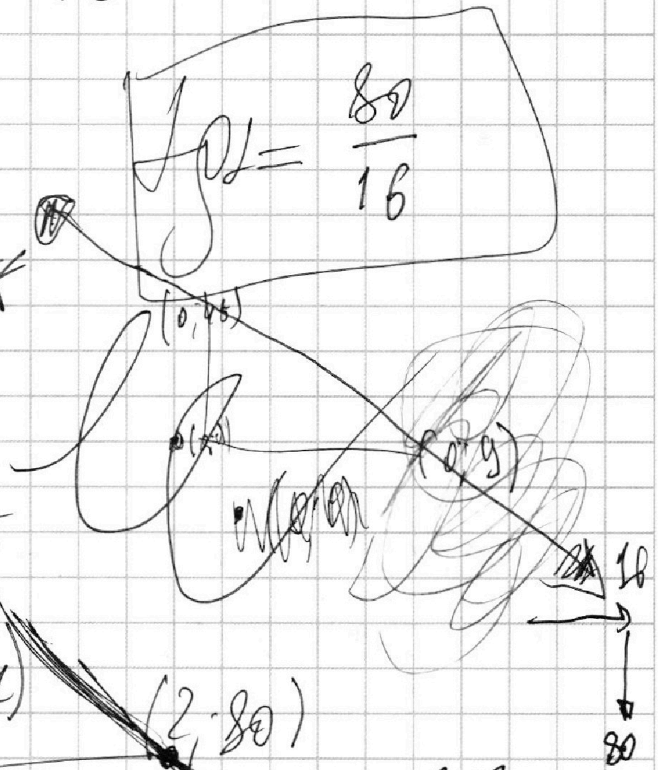
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

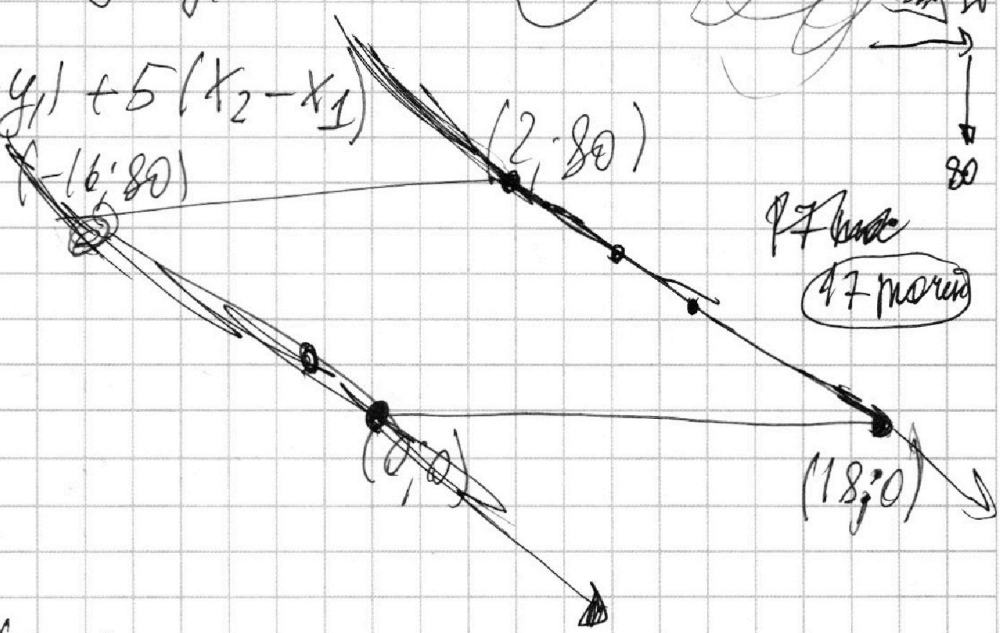
Черновик





$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

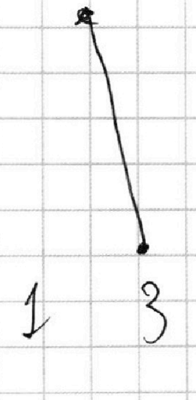
$45 = (y_2 - y_1) + 5(x_2 - x_1)$



~~$y_2 = 25 + x$~~

$y_2 + 5x$

$y_2 = B - 5x$



$45 = y_2 - y_1 + 5x_2 - 5x_1$

19 прямых

$\boxed{y_2 = -5x_2 + (45 + y_1 + 5x_1)}$

90 : 5

$B \in (0; 5 \dots ; 80)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 - \log_{8x^2}(625) = \log_5^4 y + 4\log_y 5 - \log_y \frac{1}{2}$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4 y - 4\log_{2x}5 - \log_{8x}$$

$$(\log_5^2(2x) + \log_5^2(y))(\log_5(2x) - \log_5 y)(\log_5 2x + \log_5 y)$$

$$-4\log_{2x}5 - \log_{8x^3}5 - 4\log_y 5 + \log_y \frac{1}{2} = 0$$

$$-4(\log_{2x}5 + \log_y 5) \quad 5^{\frac{4}{3}} \quad 125^{\frac{4}{3}}$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3$$

$$\boxed{\log_5^4(2x) - \frac{13}{3\log_5(2x)} = 3}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$$

$$\boxed{x+y=0}$$

$$(x^2+y^2)(x+y)(x-y) - \frac{13}{3}\left(\frac{x+y}{xy}\right) = 0$$

$$xy = t$$

$$(x^2+y^2)(x-y) - \frac{13}{3xy} = 0 \qquad x^2+y^2 = (x-y)^2 + 2t$$

$$(a^2+2t)a - \frac{13}{t} = 0 \qquad a^2+2t$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

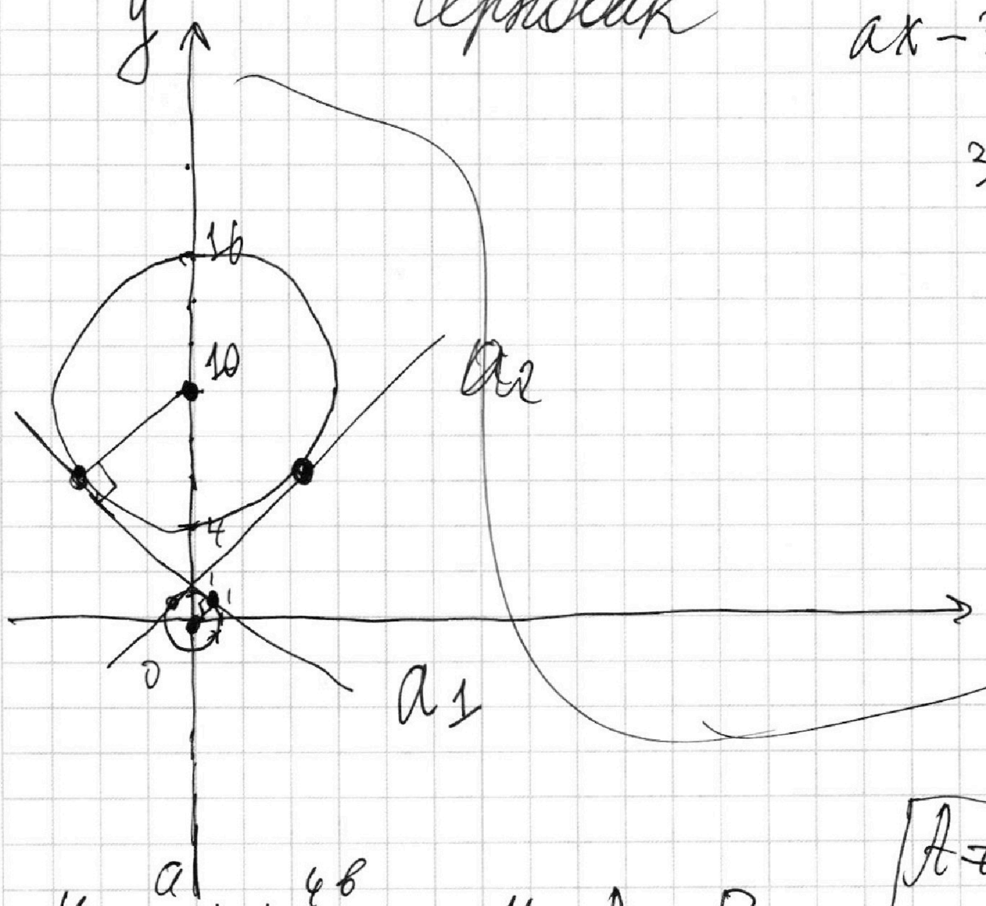
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

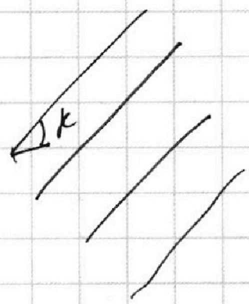
МФТИ

Черновик

$ax - 3y + 4b = 0$

$3y = ax + 4b$





$\boxed{a < a_1}$

$\boxed{a > a_2}$

$\boxed{A \neq 0}$

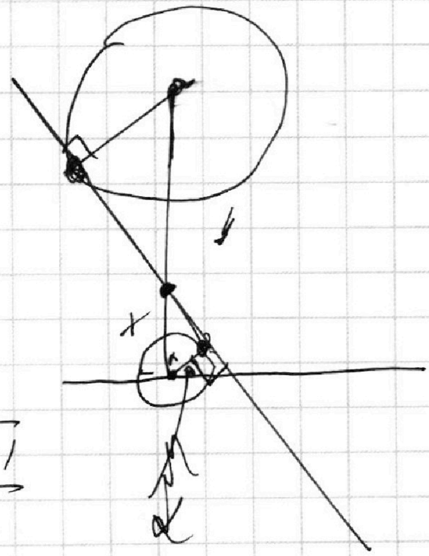
$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ $\qquad y = Ax + B$

$\frac{1}{6} = \frac{x}{y}$

$6x = y$

$x + y = 10$

$x = \frac{10}{7};\ y = \frac{60}{7}$



$\cos\alpha = \frac{1 \cdot 7}{10} = \frac{7}{10}$ $\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$tg\,\alpha = \frac{7}{\sqrt{51}}$