



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна  $90$ ,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен  $5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Из условия:  $\begin{cases} a \cdot b = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot n \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot b \\ ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot m \end{cases}$  где  $n, b, m \in \mathbb{N}$

Переходим к уравнениям:  $(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot n \cdot b \cdot m$   
т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$  и  $abc \cdot 5^{30}$ , то  $(abc)^2 \cdot 5^{60}$  и  $(abc)^2 \cdot 3^{42}$   
(здесь же вводим в четкой степени)

тогда минимально возможное  $(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60}$   
откуда  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Если положить  $n = 3 \cdot 5^7$  и  $m = 1$ , то получаем  
из (1)  $b^2 = \frac{a \cdot bc}{ac} = \frac{2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 3 \cdot 5^7}{2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}} = 2^7 \cdot 3^6$  откуда  $b = 2^3 \cdot 3^3$   
 $\Rightarrow a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$  и  $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

Эти  $a, b, c$  полностью удовлетворяют условию  
и при них достигается минимально  $abc$

Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

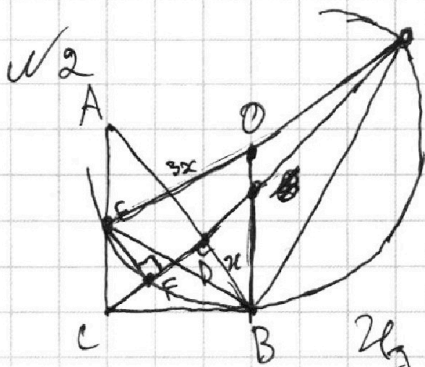
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Е! Пусть  $O$  - центр данной окружности. Пусть  $FE \perp FD$   $\angle EFD = 90^\circ \Rightarrow EO$   
и  $FD$  пересекаются на диаметре  
по теореме о перпендикуляре к хорде  
на хорде  $BC$  и перпендикулярной ей  
радиусе  $EO$ .  
Пусть  $DB = x$ , тогда  $AD = 3x$ , тогда  $CD =$   
 $\sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2}$  и  $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{3x^2 + 9x^2} =$   
 $= 2\sqrt{3}x$  и  $CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$   
Из этого следует, что  $\angle CAB = 30^\circ$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н>

$$5(\arcsin(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2} \quad -\frac{5\pi}{2} \leq 5\arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-5\arccos(\cos x) = x - 2\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$\arccos(\cos x) = \frac{2\pi - x}{5}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi - x}{5}\right)$$

$$x = \frac{2\pi - x}{5} + 2\pi n$$

$$x = \frac{x - 2\pi}{5} + 2\pi k \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{6x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi n$$

$$\frac{4x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$$

с учётом (1)  $x = -\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 2\pi$

$$x = -\frac{\pi}{2}, 2\pi$$

Проверка:  $5\arcsin(\cos(\frac{4\pi}{3})) = 5\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$$5\arcsin(\cos \frac{\pi}{3}) = 5\arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$5\arcsin(\cos 2\pi) = 5\arcsin 1 = \frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$5\arcsin(\cos -\frac{\pi}{2}) = 5\arcsin 0 = 0 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Ответ:  $\left\{ -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

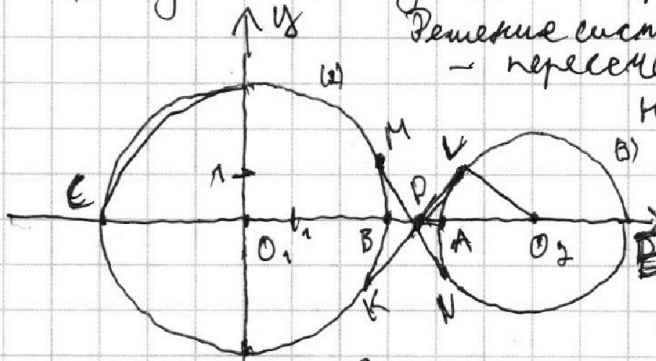
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{ИЧ } ax + 2y + 36 = 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{36}{2} - \frac{a}{2}x & (1) \end{cases}$$

$$\{(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - (2x + 32)) = 0\} \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (2) \\ (x - 6)^2 + y^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Решение системы — пересечение прямой (1) с окружностями (2) и (3)



Требуется найти все  $a$  при которых угол наклона прямой (1) позволит при каком-то  $b$  пересекать обе окружности

Заметим, что если наклон прямой

(1) больше наклона общих касательных  $K(2)$  и  $(3)$ , то пересекать обе окружности прямая не сможет.  $MN$  и  $KL$  — общие касательные,  $D = MN \cap KL$ ,  $D \in O_1O_2$ ;  $O_1C \perp KL$

Вспомогательная точка  $D$  лежит на радикальной оси  $K$  окр. (2) и (3);  ~~$DA + DB = DC + DL$~~

$$DA + DE = DB + DC \quad DA(DA + 4) = (1 - DA)(1 - DA + 6) \quad DA^2 + 4DA = -DA^2 + 7DA - 6$$

$$= DA^2 - 3DA + 6 \quad DA = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} \quad \text{tg}(\angle KLD) = \frac{O_2L}{Dh} = \frac{2}{\sqrt{385}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(2 + \frac{7}{2})^2 - 2^2}} = \frac{24}{\sqrt{385}} \quad \text{В силу симметрии } \text{tg}(\angle O_1DM) = \frac{24}{\sqrt{385}}$$

Если тангенс угла наклона прямой (1) по модулю меньше  $\frac{24}{\sqrt{385}}$  то (1) не сможет пересекать обе окружности ( $\frac{36}{2}$  можно считать т.ч. (1) будет проходить через  $D$ )

$$-\frac{24}{\sqrt{385}} < -a < \frac{24}{\sqrt{385}} \quad \begin{cases} a > -\frac{48}{\sqrt{385}} \\ a < \frac{48}{\sqrt{385}} \end{cases}$$

Ответ:  $(-\frac{48}{\sqrt{385}}; \frac{48}{\sqrt{385}})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_x 2 \cdot 243 - 8 \quad \log_3^4 x + 6 \log_3 x - \frac{5}{2} \log_3^2 + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 6 - \frac{5}{2} + 8 \log_3 x = 0 \quad 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x = -7 \quad (1)$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3(5y) = \log_{25y} 2(3^{11}) - 8 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_3(5y) - \frac{11}{2} \log_3(5y) + 8 = 0$$

$$\log_3^5(5y) + 2 - \frac{11}{2} + 8 \log_3(5y) = 0 \quad 2 \log_3^5(5y) + 16 \log_3(5y) = 7 \quad (2)$$

Рассмотрим  $f(t) = 2t^5 + 16t$   $f(t)$  — нечётная <sup>и возраста-</sup> <sup>ющая</sup>  
Из (1) и (2) следует, что  $\log_3 x = -\log_3 5y$ , т. е.  
(1) и (2) эквив. уравн.  $f(\log_3 x) = 7$  и  $f(\log_3 5y) = -7$   
соответственно  $f(\log_3 x) = 7 = f(-\log_3 5y)$  и  $f(t)$  воз-  
растает как функция возрастающие  $2t^5$  и  $16t$

$$\log_3 x = -\log_3 5y \quad \log_3(5xy) = 0 \quad 5xy = 1 \quad xy = \frac{1}{5}$$

Уравнения (1) и (2) однозначно определяют  $x$  и  $y$   
в силу возрастания  $f(t)$  и логарифма, т. е.  
других  $xy$  не может быть

Ответ:  $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

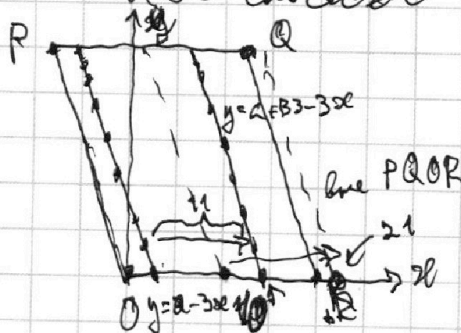
В  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$   $y_2 = 33 + y_1 + 3x_1 - 3x_2$   
Пусть  ~~$y_1 + 3x_1 = a$~~   $y_1 + 3x_1 = a$   
Заметим, что  $Q$  данного параллелограмма  $PQ$  и  $QR$   
параллельны прямой с коэф. наклона  $-3$  (1)

$y_2 = 33 + a - 3x_1$ , Если  $(x_1, y_1)$  принадлежит  
прямой  $y = a - 3x_1$ , то  $(x_2, y_2)$  обязательно  
принадлежит прямой  $y = 33 + a - 3x_1$  — параллельно  
переменной на  $11$  вдоль оси  $Ox$ . Т.е. при фикс.  
 $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  можно выбрать на любой <sup>целой</sup> точке  $7$ -  
той прямой внутри параллелограмма.

Рассмотрим пересек. прямой  $y = a - 3x_1$ , которой при-  
надлежит  $(x_1, y_1)$  с осью  $Ox$ . Координата  $x$  этого  
пересечения принадлежит мн.-ву  $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$   
Если она меньше  $10$ , то прямая на которой  
лежит  $(x_2, y_2)$  пересекает параллелограмм (если  
пересек. при  $x=9$ , то эта прямая совпадает с  
содержит  $Q, R$ ), т.е. всего  $10$  прямых на которых мож-  
но выбрать  $(x_2, y_2)$ , чтобы существов. такая  $(x_2, y_2)$   
В силу (1) каждая прямая вида  $y = a - 3x$  содержит  
в  $Q$  виде  $15$  точек, и в каждой не существует целой  
точки внутри не принадл. такой прямой  
Третьего, содрже. А можно выбрать  $Q$  способами  
точка  $A$  на ней  $15 \cdot 10$  и тогда т. В на анало-  
гичной прямой тоже  $15 \cdot 10$  способами

Итого всего  $10 \cdot 15 \cdot 15 = 2250$  способов

Ответ: 2250



\*:  $\frac{49}{3} + 1 = 15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



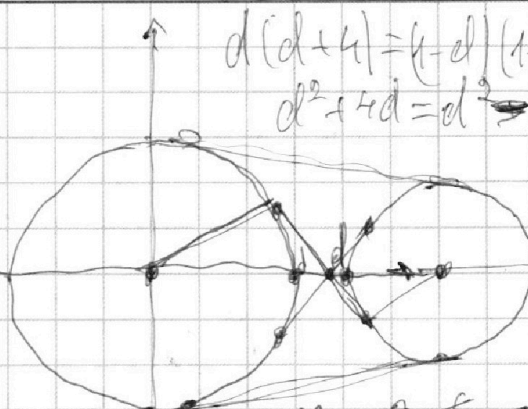
$$y = \frac{3b}{2} - \frac{ax}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ (x-b)^2 + y^2 = \frac{3b}{2} \end{cases}$$

$$d(d+4) = (4-d)(1-d) \quad (d-1)(d+1)$$

$$d^2 + 4d = d^2 - 2d + 4 \Rightarrow 6d = 4$$

$$12d = 4 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$$



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x - 5 \log_3 243 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 6 - \frac{5}{2} + 8 \log_3 x = 0$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x = -\frac{7}{2}$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x = -7$$

$$40 - 9 \cdot 4 = 37$$

$$d^2 - 3 = (d-1)^2 - 2$$

$$d^2 + 13d = d^2 - 14d + 3$$

$$25 - 16 = 9$$

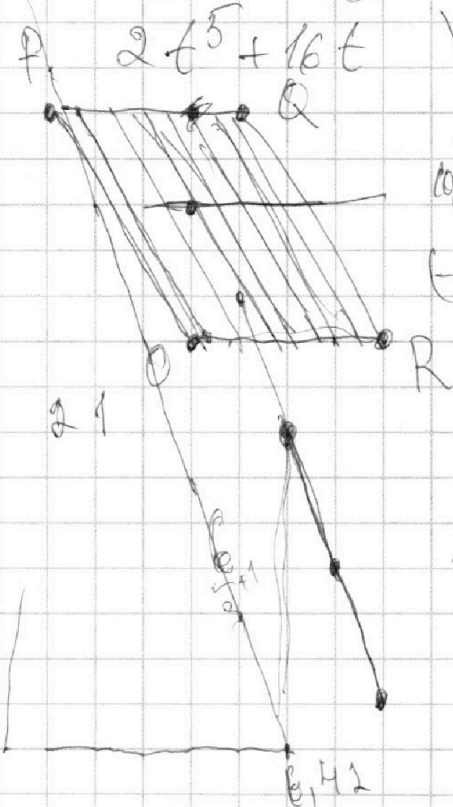
$$5 - 4 = 1$$

$$350$$

$$385$$

$$\left(2 + \frac{14}{15} - 2\right) \left(4 + \frac{7}{12}\right)$$

$$\frac{7}{12} \left(\frac{55}{12}\right) = \frac{7 \cdot 55}{144}$$



$$B(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 + 4y_2 = 33$$

$$y_2 - y_1 = 33 - 3(x_2 - x_1)$$

$$y_2 = 33 + y_1 + 3x_2 - 3x_1$$

$$y_1 \neq 33 - 3x_1$$

$$y_2 = 6 - 3x_2$$

$$y_1 - 33 - 3x_1 \neq 0$$

$$-y_1 + 33 + 3x_1 = y_2 - 3x_2$$

$$y_1 - 33 - 3x_1 = y_2 + 3x_2$$

$$y_2 = 33 + a - 3x_2$$

$$y_1 = 33 - 3x_1$$

$$y_1 = a - 3x_1$$

0, 3, 6, ..., 60



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $bc = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $ac = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $a = 5$   
 $b = 2$   
 $c = 3$

$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2$   
 $(abc)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$   
 $abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $(abc)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

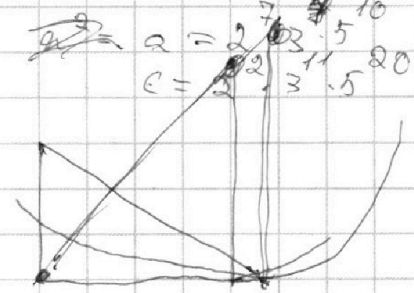
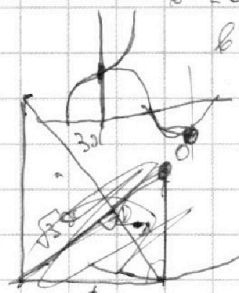
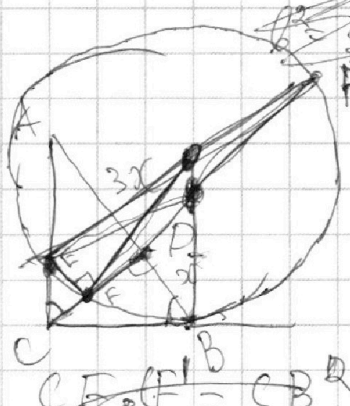
$ab = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $bc = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $ac = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$(abc)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$   
 $abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$ab = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $bc = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $ac = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$ab = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $bc = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $ac = 2 \cdot 3 \cdot 5$

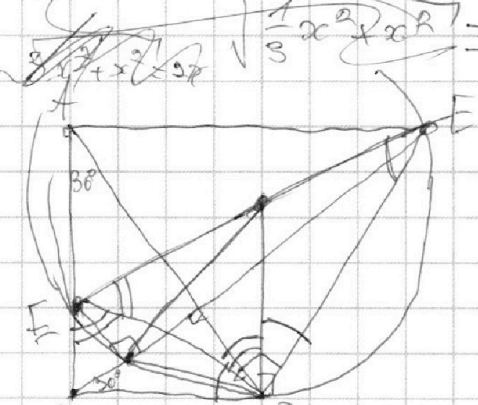
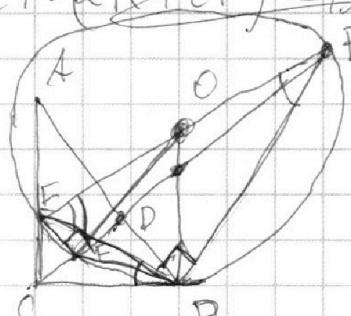
$abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $(abc)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$



$CF \cdot \cos \alpha = CB$

$CF \cdot (2R + CF) = 4x^2$

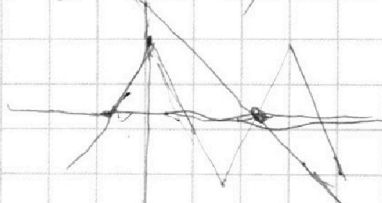
$DO = \frac{x}{\sqrt{3}}$



$\frac{FB}{FE} = \frac{CB}{BE}$

$5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$   
 $5(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2}$   
 $5 \arccos(\cos x) = 2\pi + x = 0$

$\cos x = \cos(\frac{x + 2\pi}{5})$   
 $x = \frac{2\pi - x}{5} + 2\pi n$   
 $x = \frac{2\pi + 10\pi n}{5}$





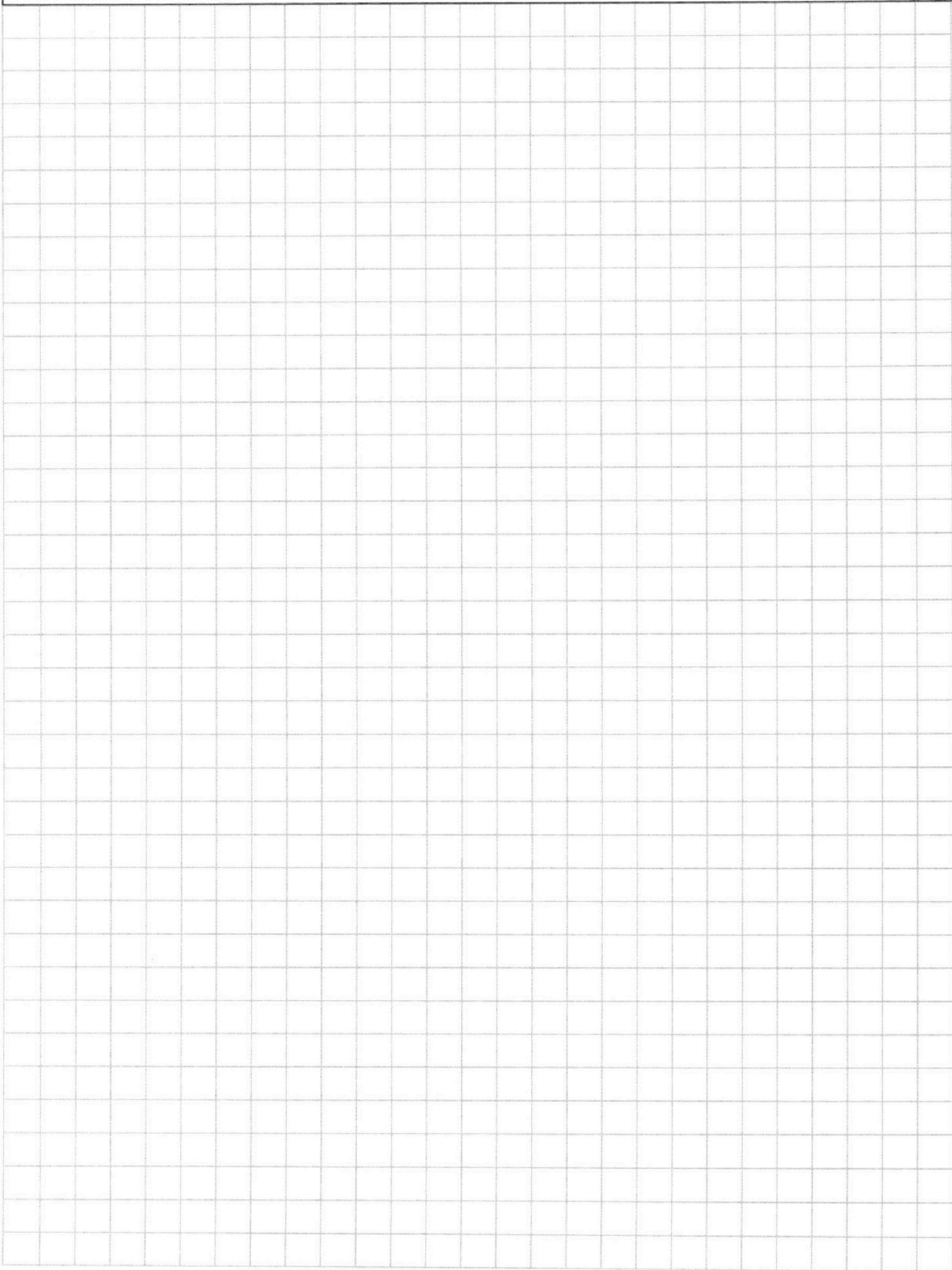
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

