



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90 , $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5 .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Из условия: $\begin{cases} a \cdot b = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot n \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot b \\ ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot m \end{cases}$ где $n, b, m \in \mathbb{N}$

Переходим к уравнениям: $(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot n \cdot b \cdot m$
т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$ и $abc \cdot 5^{30}$, то $(abc)^2 \cdot 5^{60}$ и $(abc)^2 \cdot 3^{42}$
(здесь же вводим в четкую степенку)
тогда минимально возможное $(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60}$
откуда мин $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Если положить $n = 3 \cdot 5^7$ и $m = 1$, то получаем
из (1) $b^2 = \frac{a \cdot bc}{ac} = \frac{2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 3 \cdot 5^7}{2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}} = 2^7 \cdot 3^6$ откуда $b = 2^2 \cdot 3^3$
 $\Rightarrow a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$ и $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

Эти a, b, c полностью удовлетворяют условию
и при них достигается минимальное abc

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

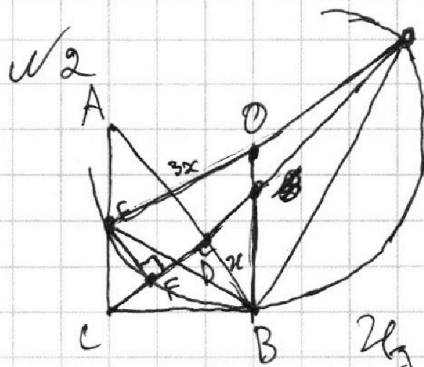
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Е! Пусть O - центр данной окружности. Пусть AB - диаметр. Пусть $FE \perp AB$ $\angle EFD = 90^\circ \Rightarrow EO$ и FD пересекаться на диаметре по теореме о перпендикуляре к хорде. Пусть $DB = x$, тогда $AD = 3x$, тогда $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$ и $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{3x^2 + 9x^2} = 2\sqrt{3}x$ и $CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$
Из этого следует, что $\angle CAB = 30^\circ$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н>

$$5(\arcsin(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2} \quad -\frac{5\pi}{2} \leq 5\arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-5\arccos(\cos x) = x - 2\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$\arccos(\cos x) = \frac{2\pi - x}{5}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi - x}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi - x}{5} + 2\pi n \\ x = \frac{x - 2\pi}{5} + 2\pi k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \frac{6x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi n \\ \frac{4x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \end{cases}$$

с учётом (1) $\begin{cases} x = -\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2}, 2\pi \end{cases}$

Проверка: $5\arcsin(\cos(\frac{4\pi}{3})) = 5\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos \frac{\pi}{3}) = 5\arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos 2\pi) = 5\arcsin 1 = \frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos -\frac{\pi}{2}) = 5\arcsin 0 = 0 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

Ответ: $\left\{ -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

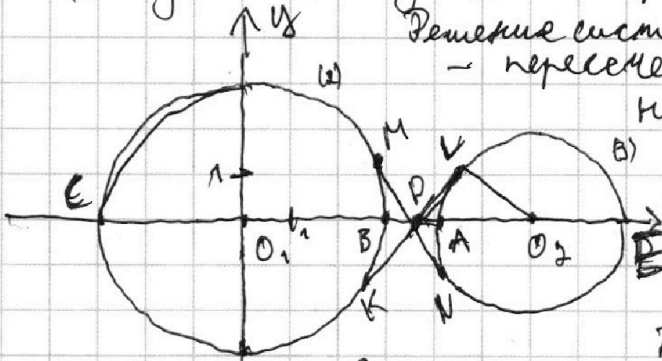
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{ИЧ } ax + 2y + 36 = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{36}{2} - \frac{a}{2}x \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 9 &= 0 \quad (2) \\ (x-6)^2 + y^2 &= 4 \quad (3) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - (2x + 32)) &= 0 \\ \text{Решение системы} & \end{aligned} \right.$$

— пересечение прямой (1) с окружностями (2) и (3)



Требуется найти все a при которых угол наклона прямой (1) позволит при каком-то b пересекать обе окружности

Заметим, что если наклон прямой

(1) больше наклона общих касательных $K(2)$ и $L(3)$, то пересекать обе окружности прямая не сможет

MN и KL — общие касательные, $D = MN \cap KL$, $D \in O_1O_2$; $O_1C \perp KL$

Вспомогательная точка D лежит на радикальной оси K окр. (2) и (3); ~~$DA + DB = DC$~~ ~~$DA + DB = DC$~~

$$DA + DE = DB = DC \quad DA(DA + 4) = (1 - DA)(1 - DA + 6) \quad DA^2 + 4DA =$$

$$= DA^2 - 8DA + 57 \quad DA = \frac{57}{12} \quad \text{tg}(\angle KLD) = \frac{O_2L}{Dh} = \frac{2}{\frac{57}{12}}$$

Если тангенс угла наклона прямой (1) по модулю меньше $\frac{24}{\sqrt{385}}$ то (1) может пересекать обе окружности ($\frac{36}{2}$ можно считать т.ч. (1) будет проходить через D)

$$-\frac{24}{\sqrt{385}} < -\frac{a}{2} < \frac{24}{\sqrt{385}} \quad \left[\begin{aligned} a &> -\frac{48}{\sqrt{385}} \\ a &< \frac{48}{\sqrt{385}} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{48}{\sqrt{385}}; \frac{48}{\sqrt{385}} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_x 2 \cdot 243 - 8 \quad \log_3^4 x + 6 \log_3 x - \frac{5}{2} \log_3^2 + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 6 - \frac{5}{2} + 8 \log_3 x = 0 \quad 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x = -7 \quad (1)$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_3(5y) = \log_{25y} 2(3^{11}) - 8 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_3(5y) - \frac{11}{2} \log_3(5y) + 8 = 0$$

$$\log_3^5(5y) + 2 - \frac{11}{2} + 8 \log_3(5y) = 0 \quad 2 \log_3^5(5y) + 16 \log_3(5y) = 7 \quad (2)$$

Рассмотрим $f(t) = 2t^5 + 16t$ $f(t)$ — нечётная ^{и возраста-} ^{ющая}
Из (1) и (2) следует, что $\log_3 x = -\log_3 5y$, т. е.
(1) и (2) эквив. уравн. $f(\log_3 x) = 7$ и $f(\log_3 5y) = -7$
соответственно $f(\log_3 x) = 7 = f(-\log_3 5y)$ и $f(t)$ воз-
растает как функция возрастающие $2t^5$ и $16t$

$$\log_3 x = -\log_3 5y \quad \log_3(5xy) = 0 \quad 5xy = 1 \quad xy = \frac{1}{5}$$

Уравнения (1) и (2) однозначно определяют x и y
в силу возрастающей $f(t)$ и логарифма, т. е.
других xy не может быть

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

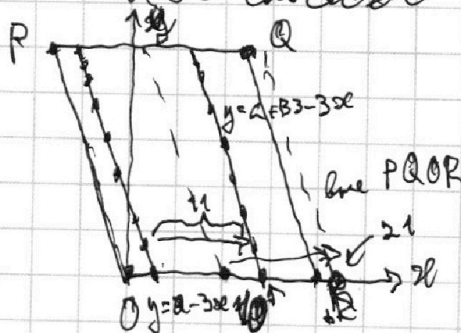
В $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ $y_2 = 33 + y_1 + 3x_1 - 3x_2$
 Пусть ~~$y_1 + 3x_1 = a$~~ $y_1 + 3x_1 = a$
 Заметим, что Q данного параллелограмма PQ и QR параллельны прямой с коэф. наклона -3 (1)

$y_2 = 33 + a - 3x_1$, Если (x_1, y_1) принадлежит прямой $y = a - 3x_1$, то (x_2, y_2) обязательно принадлежит прямой $y = 33 + a - 3x_1$ — параллельно переменной на 11 вдоль оси Ox . Т.е. при фикс. (x_1, y_1) , (x_2, y_2) можно выбрать на любой ^{целой} точке этой прямой внутри параллелограмма.

Рассмотрим пересек. прямой $y = a - 3x_1$, которой принадлежит (x_1, y_1) с осью Ox . Координата x этого пересечения принадлежит инт.-ву $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$. Если она меньше 10 , то прямая на которой лежит (x_2, y_2) пересекает параллелограмм (если пересек. при $x = 9$ то эта прямая совпадает с QR), т.е. всего 10 прямых на которых можно выбрать (x_2, y_2) , чтобы существовала пара (x_2, y_2) . В силу (1) каждая прямая вида $y = a - 3x$ содержит в Q виде 15 точек, и в каждой не существует целой точки внутри не принадлежит такой прямой. Прямую, содержащую A можно выбрать 9 способами, а точку A на ней 15 и тогда т. В на аналогичной прямой можно 15 способами.

Итого всего $10 \cdot 15 \cdot 15 = 2250$ способов

Ответ: 2250



*: $\frac{49}{3} + 1 = 15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



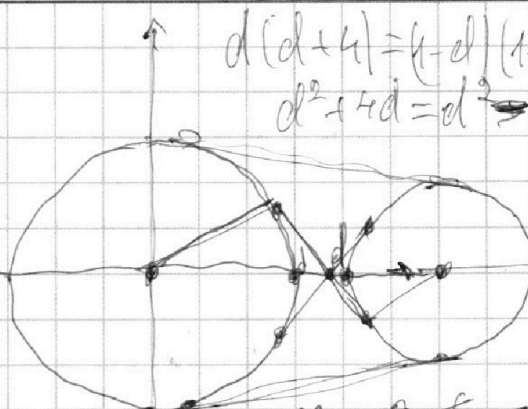
$$y = \frac{3b}{2} - \frac{ax}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x-6)^2 + y^2 = \frac{3b}{2} \end{cases}$$

$$d(d+4) = (4-d)(1-d) \quad (d-1)(d+1)$$

$$d^2 + 4d = d^2 - 2d + 4 \Rightarrow 6d = 4$$

$$12d = 4 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$$



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x - 5 \log_3 243 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 6 - \frac{5}{2} + 8 \log_3 x = 0$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x = -\frac{7}{2}$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x = -7$$

$$40 - 9 \cdot 4 = 37$$

$$d^2 - 3 = (d-1)^2 - 2$$

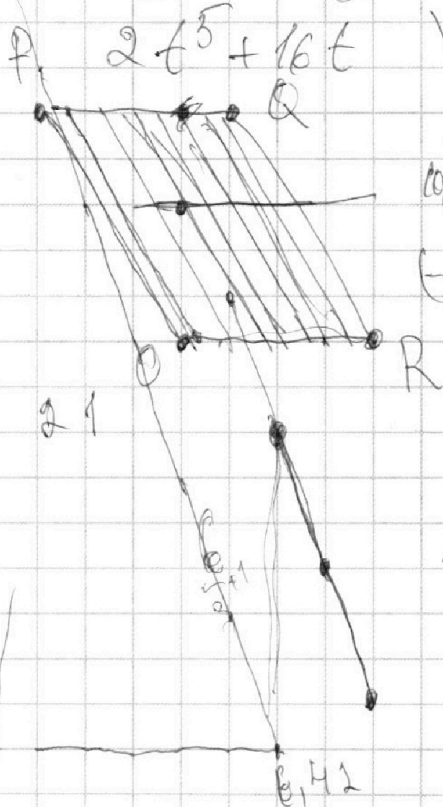
$$9 = d^2 - 2d + 1 - 2$$

$$d^2 + 3d = d^2 - 2d + 3$$

$$5d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{5}$$

$$\frac{25}{5} - 16 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{7}{12} \left(\frac{55}{12} \right) = \frac{7 \cdot 55}{144}$$



$$B(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 + 4y_2 = 33$$

$$y_2 - y_1 = 33 - 3(x_2 - x_1)$$

$$y_1 \neq 33 - 3x_1$$

$$y_1 - 33 - 3x_1 \neq 0$$

$$-y_1 + 33 + 3x_1 = y_2 - 3x_2$$

$$y_2 = 33 + 3x_1 - 3x_2$$

$$y_2 = 33 + a - 3x_2$$

$$y_1 = a - 3x_1$$

$$0, 3, 6, \dots, 60$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab = 2 \cdot 3 \cdot 5$
 $bc = 2 \cdot 3 \cdot 5$
 $ac = 2 \cdot 3 \cdot 5$
 $a = 5$
 $b = 2$
 $c = 3$

$(abc)^2 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
 $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$ab = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
 $bc = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
 $ac = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

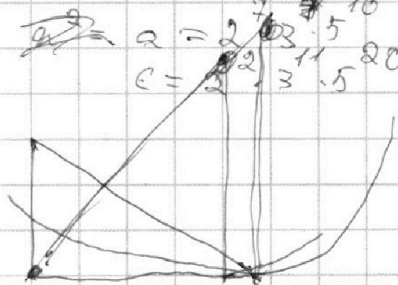
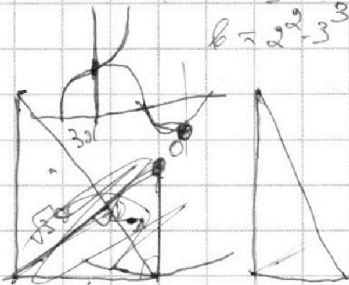
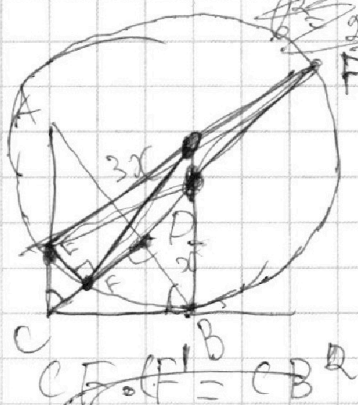
$(abc)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
 $abc = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$(abc)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
 $abc = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$ab = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
 $bc = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
 $ac = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

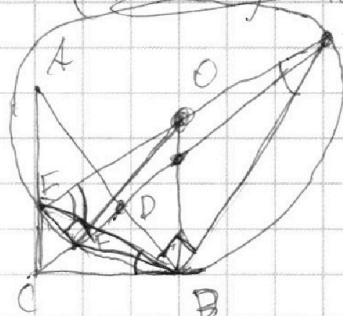
$ab = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
 $bc = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
 $ac = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$abc = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
 $abc = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

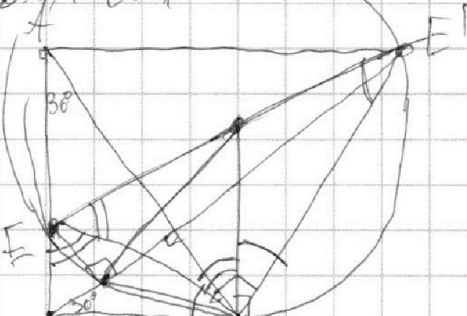


$CF \cdot OF = CB \cdot R$

$CF \cdot (2R + CF) = 4x^2$

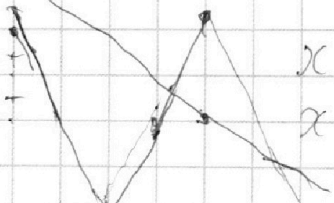
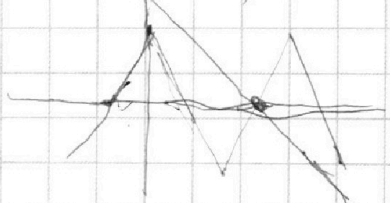


$\sqrt{\frac{4}{3}x^2} \cdot x \cdot R = \frac{2}{\sqrt{3}}x$



$\frac{FB}{FE} = \frac{CB}{BE}$

$5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$
 $5(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2}$
 $5 \arccos(\cos x) = 2\pi + x = 0$



$\cos x = \cos(\frac{x + 2\pi}{5})$
 $x = \frac{2\pi - x}{5} + 2\pi n$
 $x = \frac{2\pi + 10\pi n}{5}$



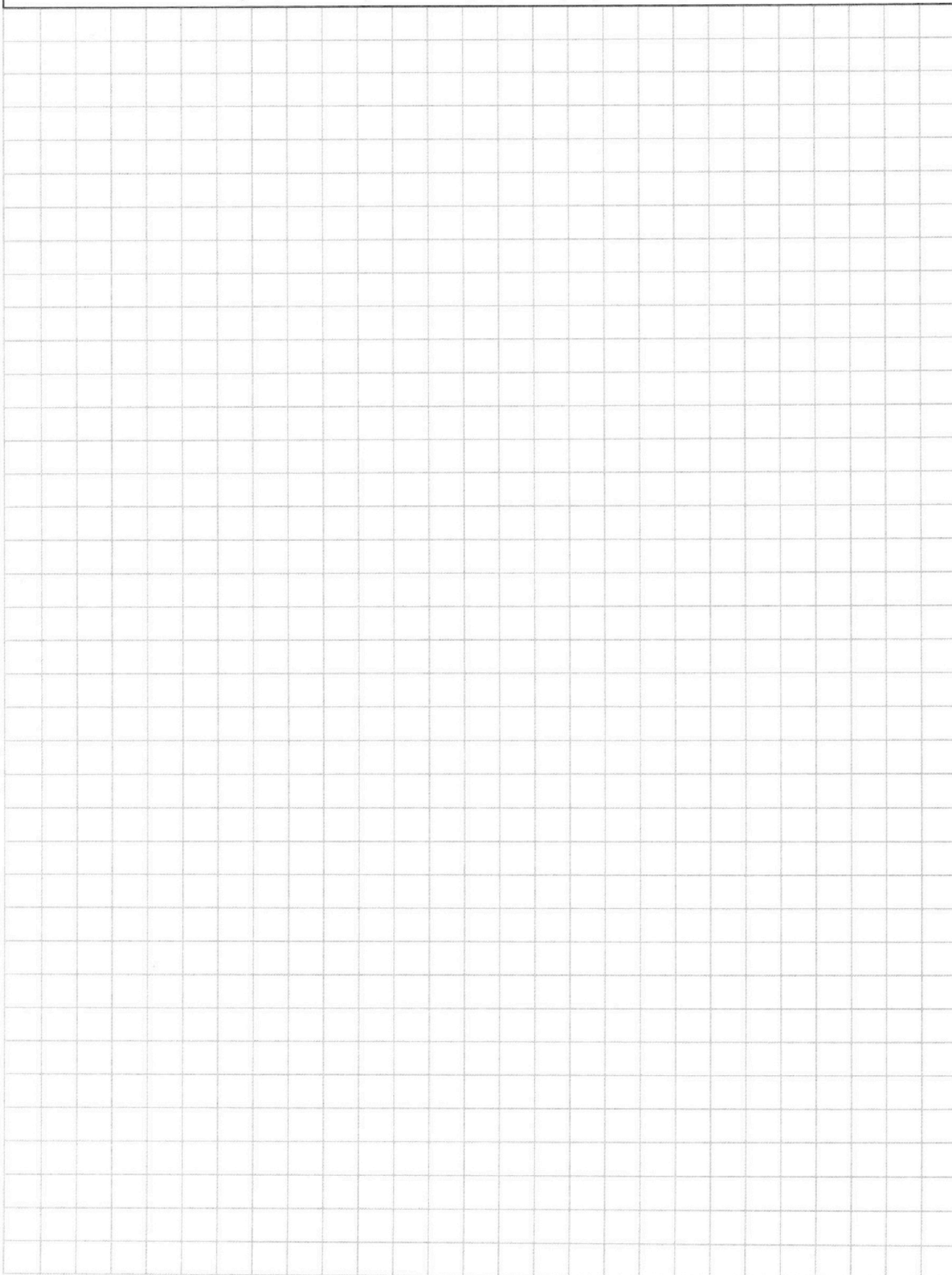
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

