



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab \neq \frac{3}{5}$  условие;

(1) 
$$\begin{cases} ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot k_1 \\ bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot k_2 \\ ca = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{20} \cdot k_3 \end{cases} \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

За  $\|x\|_p$  будем обозначать кол-во входящих в  $x$  простых чисел  $p$  в разложении числа  $x$

Тогда наше условие можно переписать так:

① 
$$\begin{cases} \|a\|_5 + \|b\|_5 \geq 12 \\ \|b\|_5 + \|c\|_5 \geq 17 \\ \|c\|_5 + \|a\|_5 \geq 39 \end{cases}$$

② 
$$\begin{cases} \|a\|_3 + \|b\|_3 \geq 14 \\ \|b\|_3 + \|c\|_3 \geq 20 \\ \|c\|_3 + \|a\|_3 \geq 21 \end{cases}$$

③ 
$$\begin{cases} \|a\|_2 + \|b\|_2 \geq 8 \\ \|b\|_2 + \|c\|_2 \geq 12 \\ \|c\|_2 + \|a\|_2 \geq 14 \end{cases}$$

а) ~~из ①  $\|a\|_5 \geq 12 = \|b\|_5$~~   $\rightarrow$  тогда добавится минимального значения  $abc$ , нам нужно, чтобы  $\|abc\|_5, \|abc\|_3$  и  $\|abc\|_2$  были минимально возможными (помимо, что  $\text{min}(abc)$  не будет содержать других простых чисел в разложении, иначе мы их можем выкинуть, уменьшив  $abc$  и сохранив св-во).

1) ~~из ①  $\|abc\|_5 \geq \|a\|_5 + \|b\|_5 + \|c\|_5 \geq \|a\|_5 + \|c\|_5 \geq 39 \Rightarrow$~~   
~~мин  $\|abc\|_5 = 39$  (он достигается при  $\|a\|_5 = 20, \|c\|_5 = 19, \|b\|_5 = 0$ )~~  
~~тогда пер система ① будет верна).~~

2) ~~из ②  $\|abc\|_3 \geq \|a\|_3 + \|b\|_3 + \|c\|_3 \geq \|a\|_3 + \|c\|_3 \geq 21$~~  (сложив все неравн и поделив на 2):

$$\|a\|_3 + \|b\|_3 + \|c\|_3 \geq 27,5 \Rightarrow \|abc\|_3 = \|a\|_3 + \|b\|_3 + \|c\|_3 \geq$$

$\geq 28$  (т.к.  $\|a\|_3, \|c\|_3 \in \mathbb{N}$ )  $28$  дает этот минимум достигается при  $\|c\|_3 = 13, \|a\|_3 = 8, \|b\|_3 = 7$  (тогда система ② верна и  $13+8+7=28$ )

3) ~~из ③  $\|abc\|_2 \geq \|a\|_2 + \|b\|_2 + \|c\|_2 \geq \|a\|_2 + \|c\|_2 \geq 14$~~  (сложив неравн и поделив на 2):  $\|a\|_2 + \|b\|_2 + \|c\|_2 \geq 17 \Rightarrow \|abc\|_2 \geq 17$  (17 дает при  $\|a\|_2 = 5, \|b\|_2 = 3, \|c\|_2 = 9$ . Тогда ③ верна и  $5+3+9=17$ )

4) ~~из 1, 2, 3 получаем, что мин  $abc = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$~~   $\Rightarrow$  
$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$
  
 (достигается он, ~~при  $a = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{20}, b = 2^3 \cdot 3^7$~~   
 ~~$c = 2^9 \cdot 3^{15} \cdot 5^{19}$ )~~

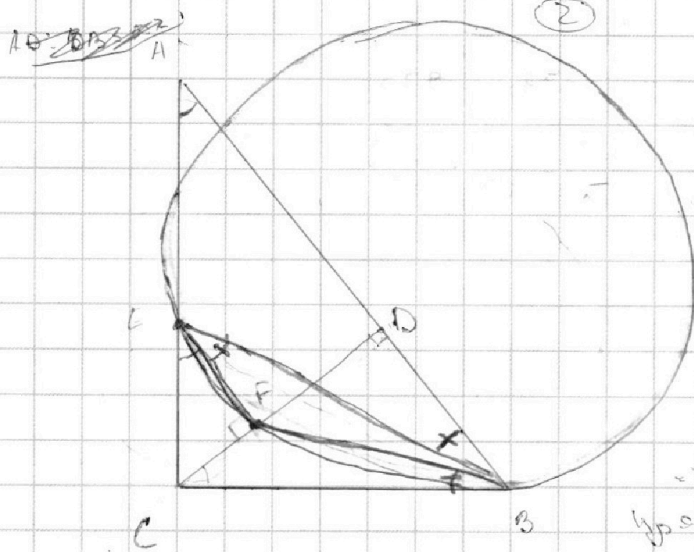
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $EF \parallel AB$ ,  $AD:DB = 5:2$

Найти:  $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

1)  $EF \parallel AB$ ,  $CD \perp AB \Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \triangle CFE$  - прямоугольный

2) Пусть  $\angle CAD = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ .

Из  $AD \parallel EF$  и секущей  $AE$ :

$\angle CEF = \angle CAB = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle EFC \sim \triangle ACB$  т.к. это  $\Delta$

т.к.  $\triangle ABC$  - равнобедренный с равными катетами  $AC$  и  $BC$ .

3) Из подобия получаем:

$\frac{EF}{AC} = \frac{CF}{CB} = \frac{EC}{AB} = k$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{1}{k^2}$

4) т.к.  $CD$  - высота равнобедренного  $\triangle ABC$

$\triangle ABC \sim \triangle CDB$  (т.к.  $\angle DCB = \frac{\alpha}{2} = \beta = \angle CAB$ )  $\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{CB}{AD} = \frac{BC}{AC} = \sqrt{2}$

Пусть  $BD = 2x$ . Тогда  $AD = 5x$ . Получим  $\frac{2x}{CD} = \frac{CB}{5x} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{2x} = \frac{CB}{5x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{CB}{5x} = \frac{CB}{2x} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{5}$ ;  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$  (т.к.  $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ )

6) Проведем  $EB$  и  $FB$ .  $\angle CBF = \angle FEB$ , т.к.  $CB \parallel EF$  кас.  $BC$ .

$\angle FEB = \angle EBA$ , т.к.  $EF \parallel AB \Rightarrow \angle FBC = \angle EBA \Rightarrow \triangle EBD \sim \triangle FBC$

(т.к.  $\angle FCB = \angle CAB = \alpha$ )  $\Rightarrow \frac{CF}{AE} = \frac{FB}{EB} = \frac{CB}{AB} = \sin \alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow CF = \frac{2}{5} AE$

8)  $\frac{EF}{AB} = \frac{BF}{AC} = k = \frac{EF}{AC} = \frac{EF}{AD \cos \alpha} = \frac{EF}{\frac{5x}{\cos \alpha}} = \frac{EF}{5x \cos \alpha} \Rightarrow$

7) Пусть стороны  $AB = 7$  (проще считать если они 7х, сделаем пометку с номером  $x$   $b+c$  и стороны остальных треугольников). Тогда  $AD = 5$ ,

$DB = 2$ ,  $CB = \sin \alpha \cdot AB = \sqrt{14}$ ;  $AC = \cos \alpha \cdot AB = \sqrt{35}$

8) Из к.г.:  $CF = \frac{2}{5} AE$ . Из н. 3:  $k = \frac{CF}{CB} = \frac{\frac{2}{5} AE}{\sqrt{14}} = \frac{AE}{7} \Rightarrow AE = 7k$

9)  $CE = AC - AE = \sqrt{35} - 7k$   
 $k = \frac{EC}{AB} = \frac{AC - AE}{AB} = \frac{\sqrt{35} - 7k}{7} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{35}}{24}$

10) Из н. 3:  $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{1}{k^2} = \frac{14^2}{35} = \frac{28}{5} \Rightarrow$  **Ответ:  $\frac{28}{5}$**

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



③

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = \pi - 2x$$

$$\arccos(\cos x) = \frac{x + 2\pi}{5}$$

т.к.  $\arccos$  принимает значения от 0 до  $\pi$

$$\frac{x + 2\pi}{5} \in [0; \pi] \Rightarrow x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$1) \text{ If } x \in [0; \pi]: \arccos(\cos x) = x = \frac{x + 2\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \text{ If } x \in [-\pi; 0]: \arccos(\cos x) = -x = \frac{x + 2\pi}{5} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

$$3) \text{ If } x \in [\pi; 2\pi]: \arccos(\cos x) = 2\pi - x = \frac{x + 2\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi$$

$$4) \text{ If } x \in [-2\pi; -\pi]: \arccos(\cos x) = 2\pi + x = \frac{x + 2\pi}{5} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}\pi - 2\pi$$

$$5) \text{ If } x \in [2\pi; 3\pi]: \arccos(\cos x) = x - 2\pi = \frac{x + 2\pi}{5} \Rightarrow x = 3\pi$$

Мы перебрали все возможные значения  $x$

Ответ:  $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



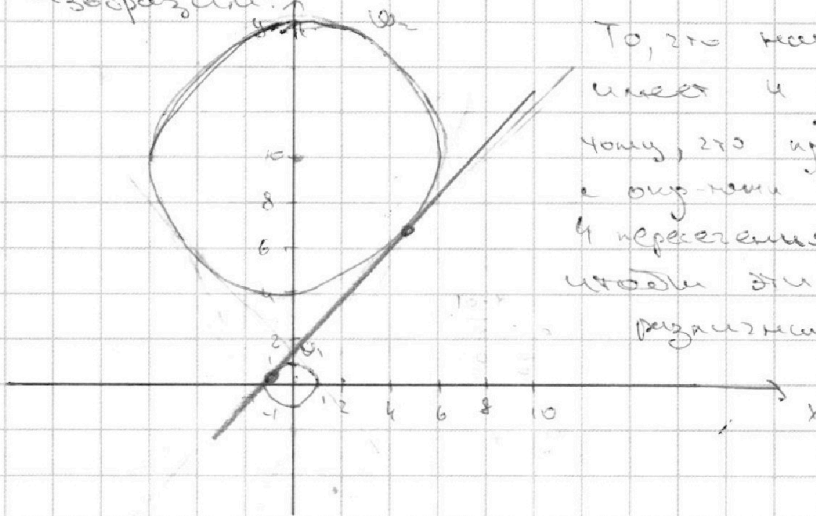
$$\begin{cases} ax - 3y + 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3} \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (2) \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \quad (3) \end{cases}$$

Рассмотрим эти кривые тогда или

- (1) задает прямую, назовем ее прямой
- (2) задает окружность с центром  $(0, 0)$  и радиусом 1. Пусть окружность  $\omega_1$
- (3) задает окружность с центром  $(0, 10)$  и радиусом 6. Пусть окружность  $\omega_2$

Изобразим:



То, что система имеет 4 решения равносильно тому, что прямая (1) имеет 2 окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  2 решения (если не считать, что они не пересекаются).

1) Если  $a = 0$ , то  $l: y = \frac{4}{3}$  — горизонтальная прямая. Она не может иметь 4 пересечения с  $\omega_1, \omega_2$  (см. рис)

2) Если  $a > 0$ : Проведем внешние касательные к окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Можно убедиться, что они заданы уравнениями:  $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$  и  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

(Положив в (3)  $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$  получим  $x^2 + 16(x + \frac{1}{2})^2 = 36 \Rightarrow 25x^2 + 24x + 10 = 0$   $\frac{D}{4} = 16^2 - 25 \cdot 15$

Найдем уравнение касательной с произвольной постройкой (или Пусть прямая имеет вид  $y = dx + p$ . Тогда если  $-a > a$ , то мы всегда сможем выбрать  $p$ , чтобы было 4 решения (четыре касания окружностей). Если  $a < a$ , то мы при каком  $p$  не получим 4 касания. Если  $a = a$ , то имеем тоже как 2 пересечения  $\Rightarrow$  из окружностей с произвольной постройкой.

Найдем только прямые, где  $a > a$ . Сделаем с окружностями

и прямой в одной системе координат аналогично, и найдем

какие значения параметра  $a$  обеспечивают 4 решения. Найдем тогда  $a$ , это решение нам известно.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение №4 (d > 0)

3) Пользуясь, выученными методами, известно, что  $y = dx + B$ , это  
 Оси нас  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , т.е. (4) и (5) имеют ровно одно решение.

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + (dx + B)^2 &= 1 && \text{(4)} \\ x^2 + (dx + (B-10))^2 &= 6^2 && \text{(5)} \end{aligned} \right.$$

(4):  $(d^2 + 1)x^2 + 2dpx + (p^2 - 1) = 0$

$$\frac{D}{4} = d^2 p^2 - (d^2 + 1)(p^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow p^2 = d^2 + 1$$

(5):  $(d^2 + 1)x^2 + 2d(p-10)x + ((p-10)^2 - 6^2) = 0$

$$\frac{D}{4} = d^2(p-10)^2 - ((p-10)^2 - 6^2)(d^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (d^2 + 1)6^2 - (p-10)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6^2 p^2 - p^2 + 20p - 100 = 0 \Rightarrow 35p^2 + 20p - 100 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7p^2 + 4p - 20 = 0 \quad \frac{D}{4} = 4 + 20 \cdot 7 = 144 = 12^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \frac{-2 \pm 12}{7} = \begin{cases} \frac{10}{7} \\ \frac{-14}{7} \end{cases} \Rightarrow d^2 = p^2 - 1 = \begin{cases} \frac{100}{49} - \frac{49}{49} \\ \frac{196}{49} - \frac{49}{49} \end{cases} \Rightarrow d = \begin{cases} \sqrt{\frac{51}{49}} \\ \sqrt{\frac{147}{49}} \end{cases}$$

Заметим, что  $p > 0$ , т.к. ось не пересекает  $A_2$  в  $\omega_2$ .

$$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{51}}{7} \quad \text{Из этого следует ответ}$$

Ответ:  $a \in \left( \frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty \right) \cup \left( -\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7} \right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_5^2 5 = \log_5^2 625 - 3 \quad (1)$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y = \log_5^2 0,2 - 3 \quad (2)$$

$xy = ?$

1) Преобразуем (1):  $\log_5^4 2x - 3 \log_5^2 2x = \frac{4}{3} \log_5^2 2x - 3$

Пусть  $t = \log_5 2x$

Тогда получим, домножив на  $t$  ( $t \neq 0$  по ОДЗ)

$$P_1(t) = 3t^5 + 9t - \frac{13}{3} = 0 \quad \text{Получим, что } x = \frac{1}{2} 5^{2t}, \text{ где } t_1 - \text{корень } P_1(t)$$

2) Преобразуем (2):  $\log_5^4 y + 4 \frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_5^2 y - 3$

Пусть  $t = \log_5 y$

Тогда, домножив на  $t$ , получим:

$$P_2(t) = 3t^5 + 9t + 13 = 0 \Rightarrow P_2(t) = P_1(t) + 26$$

3) Получаем, что  $\log_5 2x$  - какой-то корень  $P_1(t)$ ,  $\log_5 y$  - какой-то корень  $P_2(t) = P_1(t) + 26$

$$\log_5^2 2xy = \log_5^2 2x + \log_5^2 y \Rightarrow \text{Значит, } xy = \frac{1}{2}$$

4)  $P_1'(t) = P_2'(t) = 15t^4 + 9 > 0 \Rightarrow$  Эти две функции строго возрастают на  $(-\infty; +\infty) \Rightarrow$  в силу их непрерывности они имеют ровно один корень. Пусть  $a$  - корень  $P_1(t)$ ,  $b$  - корень  $P_2$

5) Имеем  $3a^5 + 9a - 13 = 0$ ;  $3b^5 + 9b + 13 = 0$ . Сложив, получим

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3) = 0 \quad (3)$$

Заметим, что  $a > 0, b < 0$  (т.к. если  $a \leq 0$ , то  $P_1(a) > 0$ , если  $b \geq 0$ , то  $P_2(b) > 0$ ), значит,  $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3 > 0$

$\Rightarrow$  из (3) следует, что  $a+b = 0 \Rightarrow a = -b$ .

$$6) \log_5^2 2xy = \log_5^2 2x + \log_5^2 y = a + b = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

(Этот случай возможен при данном ОДЗ. Например,  $x = \frac{1}{2}, y = 1$  и  $x = \frac{1}{4}, y = 2$ )

и значит эти не могут быть решениями.  $P_1(\log_5 2x) \neq 0$ ,  $P_2(\log_5 y) \neq 0$

Ответ:  $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

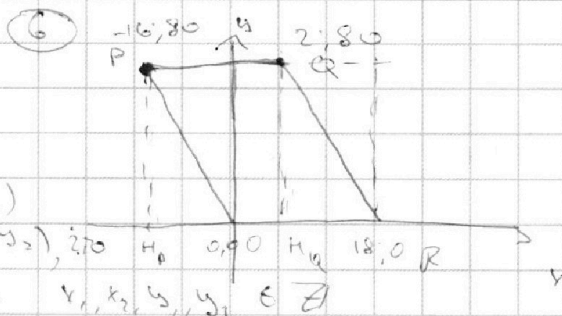
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$O(0;0)$   $Q(2;80)$   
 $P(-16;80)$   $R(18;0)$



Найти кол-во  $A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$ ,  $z_0$   $H_0$   $0,00$   $H_0$   $18,0$   $R$

1)  $5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$ ,  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

1)  $\text{no}$  модулю 5:  $y_2 - y_1 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow y_2 - y_1 = 5k$

2)  $\text{no}$  Две точки  $X$  и  $M(x; y)$  внутри прямоугольника:

$x \in [-16; 18]$ ,  $y \in [0; 80]$

3) Всего в паре  $OPQR$  столько же целых точек, сколько в прямоугольнике  $PQNR$  ( $H_0, H_p$  - проекции  $Q$  и  $P$  на  $Ox$ )

$A$  в нем  $4x$ :  $(2+16+1) \cdot (80+1) = 19 \cdot 81$ . Получаем, что

кол-во способов выбрать  $A$  и  $B$ :  $C_{19 \cdot 81}^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

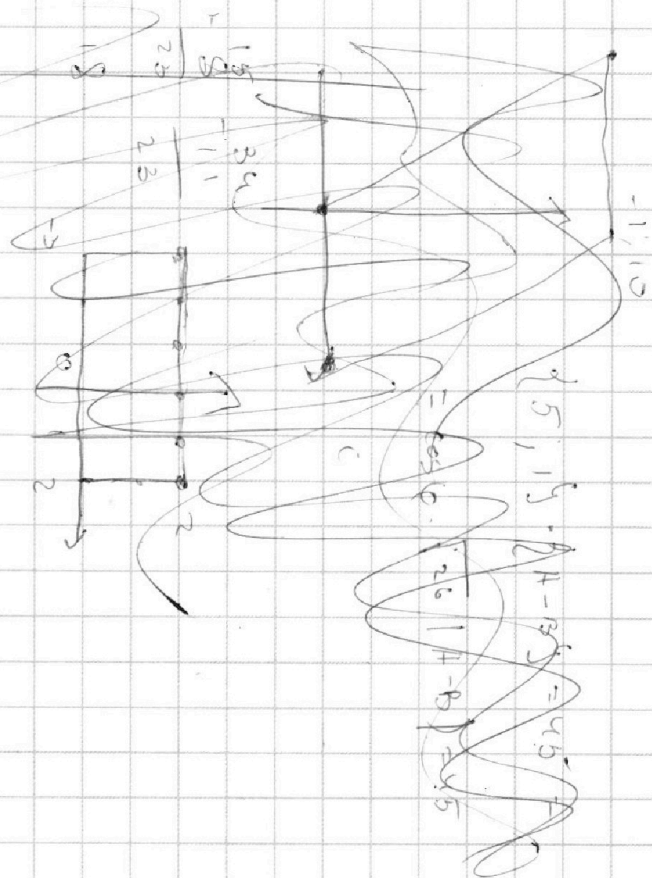
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$O(0,0)$     $Q(2,80)$   
 $P(-18,80)$     $R(18,0)$

6



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{aligned} X^2 + (dX + p)^2 &= 1 \\ X^2 + (dX + (p-10))^2 &= 6^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} X^2 + (1+d^2)X + (p^2-1) &= 0 \\ X^2 + (1+d^2)X + (p-10)^2 - 6^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{p}{2} = d^2(p-10)^2 - (1+d^2)((p-10)^2 - 6^2) =$$

$$= -(p-10)^2 + (d^2+1)6^2 = 0$$

$$(2+p^2)6^2 - (p-10)^2 = 0$$

$$2 \cdot 36 + 36p^2 - p^2 + 20p - 100 = 0$$

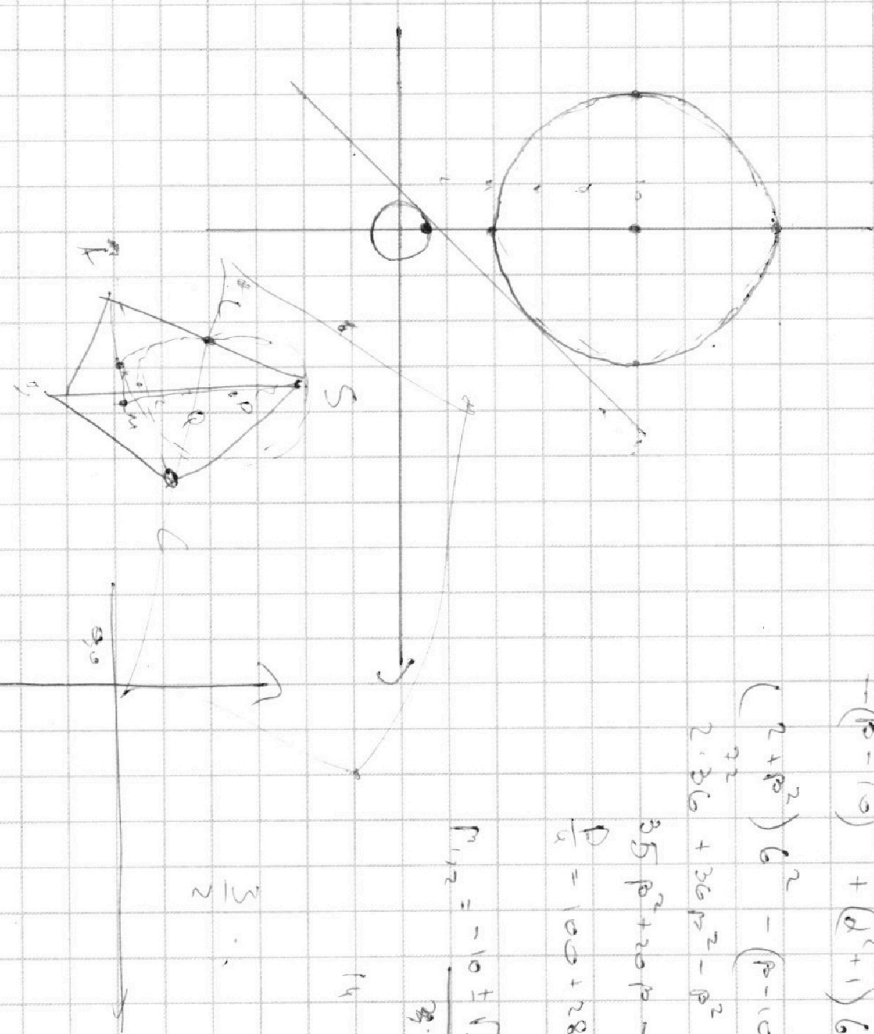
$$35p^2 + 20p - 28 = 0$$

$$\frac{p}{2} = 100 + 28 \cdot 35 = \frac{15 \cdot 208}{(55 \cdot 14)^2}$$

$$p_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{5 \cdot 14}}{2 \cdot 35} = \frac{-10 \pm \sqrt{5 \cdot 14}}{35}$$

$$d = \sqrt{1+p^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{35} \sqrt{55^2 + 10^2 + 5 \cdot 14^2} - 20 \cdot 5 \cdot 14}$$



$$\frac{p}{2} = d^2 p^2 - (1+d^2)(p^2-1) = -d - p^2 + d^2 + 1 = -d^2 = 1 + p^2$$

$$28 \cdot 35 = 35 \cdot 28 = 100 \cdot 2 \cdot 14 = (70)^2 \cdot 2$$

$$7^2 \cdot 2 \cdot 14^2 \cdot 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

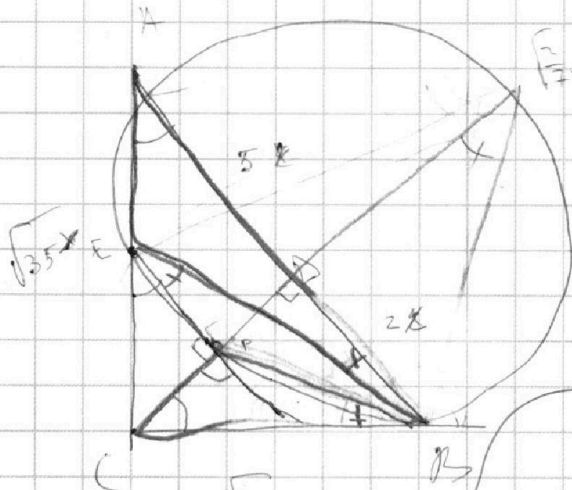
$$P_1(CE) = 3 \cdot 4^5 + 0,5 \cdot 6 - 13 =$$

$$3 \cdot 1024 + 3 - 13 =$$

$$AD : DB = 5 : 2$$

$$\frac{14^2}{35} = \frac{4 \cdot 7}{5}$$

$$4 \cdot 5 - 14 = 35$$



$$\frac{\sqrt{2} \sqrt{14}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{CB}{AB} = \frac{CP}{AE} = CP$$

$$\frac{CP}{BC} = \frac{\sqrt{\frac{2}{7}} AE}{\sqrt{14}} = \frac{AE}{7} = k$$

$$\frac{CP}{BC} = 7 = \frac{AC - EC}{7} = k$$

$$CP = \sqrt{35} - EC = 7k$$

$$EC = 7k + \sqrt{35}$$

$$(e-p)^2 - p^2 - 20p + 100 = 0$$

$$37p^2 - 20p + 28 = 0$$

$$p = 100 - 28 \cdot 37$$

$$k = \frac{EC}{4AB} = \frac{7k + \sqrt{35}}{28}$$

$$CP = \frac{\sqrt{2} AE}{\sqrt{7}}$$

$$k = \frac{CP}{BC} = \frac{\sqrt{2} AE}{\sqrt{7} \sqrt{14}} = \frac{AE}{7}$$

$$CE = AC - AE = \sqrt{35} - AE = \sqrt{35} - 7k$$

$$\frac{CE}{AB} = \frac{\sqrt{35} - 7k}{7} = k$$

$$6^2(1 + d^2) = 60d^2$$

$$x^2 + (2x + p)^2 = 1$$

$$(d^2 + 1)x^2 + 2dx + (p^2 - 1) = 0$$

$$\frac{D}{4} = d^2 p^2 - (d^2 p^2 + p^2 - d^2 - 1) = 1 - (d^2 + p^2)$$

$$\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

$$2 - p^2$$

$$x^2 + (dx + (p - 10))^2 = 6^2$$

$$(1 + d^2)x^2 + 2d(p - 10)x + (p - 10)^2 - 36 = 0$$

$$\frac{D}{4} = d^2 (p - 10)^2 -$$

$$- (p - 10)^2 d^2 - (p - 10)^2 + 36(1 + d^2)$$

$$6^2(1 + d^2) = (p - 10)^2$$

$$d^2 + p^2 = 1$$