



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1 : 3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдется значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дано треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 1.

Пусть  $ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ ,  $bc = n \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$   
 $ac = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ , где  $k, n, m \in \mathbb{N}$ .

Перемножим:  $a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$ .

Извлекем корень ( $abc > 0$ ,  
т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ):  $abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \sqrt{kmn \cdot 3 \cdot 5^7}$

Поскольку  $abc \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt{kmn \cdot 3 \cdot 5^7}$  тоже  
 $\in \mathbb{N}$ . То в частности означает, что

$kmn : 3$ , т.е.  $kmn = 3t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ . Тогда  
 $abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \sqrt{3 \cdot t \cdot 3 \cdot 5^7} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{37} \sqrt{58t}$ .

Из этого следует  $abc : 2^{17} \cdot 3^{22}$

Из условия  $ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43}$

т.к. 2, 3, 5 - взаимно просты

$\Rightarrow abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ . Значит  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Значение  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$  достичь при  $a = 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

помимо

проверки изначальное условие

$$ab = 2^7 \cdot 3^{17} \cdot 5^{20} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{10}$$

$$bc = 2^{13}$$

$$\begin{aligned}a &= 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} \\b &= 2^7 \cdot 3^{17} \cdot 5^{10} \\c &= 2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^{23} \\4+3+10 &= 17, \quad 11+15=26, \quad 20+23=43\end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Наименее возможное значение  $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

достигается при  $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{20}$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{23}$$

$$4+3+10=17, \quad 6+5+11=22, \quad 20+23=43.$$

степень для 2 <sup>1</sup> для 3 <sup>2</sup> для 5 <sup>3</sup>.

Проверим получившееся решение:

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{23} : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

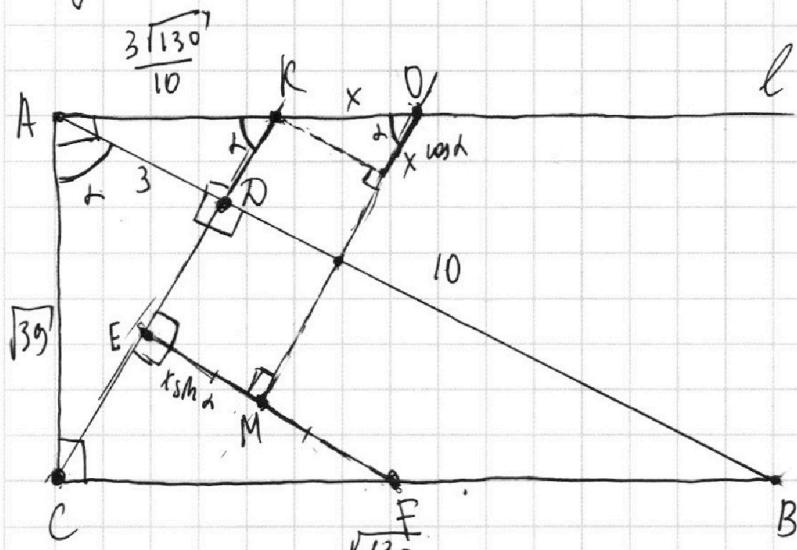
$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad \text{Верно!}$$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



1. Поскольку  $CD$  - биссектриса угла  $C$ , то

$AB$  - тангенсуга к  $CE$  в  $[AB]$ .

2. Поскольку нам нужно найти отношение, и известно  $AB : BD = 10 : 3 = \frac{10}{3}$ , то

мыс  $AB = 13$ ,  $BD = 10$ . Тогда  $AD = 3$ .

3. Для того чтобы  $CD$  к тангенсуге верно:

$$CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{3 \cdot 10} = \sqrt{30}.$$

4. По теореме Пифагора в  $\triangle ADC$  и  $\triangle BDC$

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9 + 30} = \sqrt{39} \quad (\angle ACD = \angle BDC = 90^\circ)$$

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{100 + 30} = \sqrt{130}$$

5. Через т. А проведем прямую  $l \parallel BC$ .

Поскольку  $(BC) \perp (AC)$ , то и  $l \perp (AC)$



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рисунок (10)  $\cap l = K$ .

6. ~~Пусть~~  $(Ak) \parallel (Bc)$   $\Rightarrow$   $\frac{Ak}{Bc} = \frac{Ad}{Bd} = \frac{3}{10} \Rightarrow Ak = \frac{3}{10} Bc = \frac{3}{10} \sqrt{130}$

7. Рисунок  $O$ -центр описанной к окружности условий не-ра.

Тогда  $(AO) \perp (AC)$ , так как радиус и диаметр, значит  $O \in l$ .

8. Поскольку  $(EF) \parallel (AB)$ ,  $(EF)$ , так как  $(AB) \perp (AO)$ .

Рисунок  $M$ -середина  $EF$ . Тогда  $OM$  является  
срединной перпендикуляром к  $EF$  (т.д.).

$O$ -центр, ок-ра), т.е.  $(OM) \perp (EF)$ , значит  
 $(OM) \parallel (ED)$ , т.е.  $(OM) \parallel (EK)$ .

Последно, что  $K \in [AO]$ , а не как-то иначе.

9. Рисунок  $KO = x$ . Тогда  $AO = \frac{3\sqrt{130}}{10} + x$  - радиус

10. Рисунок  $\angle CAB = \alpha$ .

$$\begin{aligned} & \text{Из } \triangle ABC: \\ & \sin \alpha = \frac{\sqrt{130}}{13} \\ & \cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{13} = \sqrt{\frac{13+3}{13 \cdot 13}} = \sqrt{\frac{16}{169}} = \frac{4}{13} \\ & \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{130}}{30} = \sqrt{\frac{101}{3}}. \end{aligned}$$

$$\angle AKE = 90^\circ - \angle DAK = 90^\circ - (90^\circ - \angle CAB) = \alpha.$$

$$\angle AOM = \angle AKE = \alpha.$$

(нрм II-ные признаки)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11. EM - высота прямого трапециевидного  $MNKO$ ,

$$t.e. EM = KO \cdot \sin \alpha = x \cdot \frac{\sqrt{130}}{13}$$

$$EF = 2EM = 2x \cdot \cancel{x} \cdot \frac{\sqrt{130}}{13} = 2 \times \cancel{x} \cdot \frac{\sqrt{10}}{13}$$

12. Поскольку  $(EF) \parallel (BN)$ :  $\frac{EP}{BN} = \frac{CE}{CP} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{EP} \frac{2x \cdot \frac{\sqrt{10}}{13}}{10} = \frac{CE}{\sqrt{30}} \Rightarrow CE = \frac{\cancel{10} \cdot \sqrt{30} \cdot 2x \sqrt{\frac{10}{13}}}{10} = \\ = \frac{x \cdot \sqrt{\frac{30 \cdot 10}{13}}}{5} = \frac{x \cdot 10 \sqrt{3}}{5 \sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}}$$

13. Касаясь  $AC$ :  $CK = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{39}}{\frac{\sqrt{130}}{13}} = 13 \sqrt{\frac{3 \cdot 13}{13 \cdot 10}} = 13 \sqrt{\frac{3}{10}}$ .

$$EK = CK - CE = 13 \sqrt{\frac{3}{10}} - \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}}$$

14. Опять же высоту из  $K$  на  $(OM)$  видно,

$$\text{т.к. } OM = EK + x \cdot \cos \alpha = 13 \sqrt{\frac{3}{10}} - \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}} + x \cdot \sqrt{\frac{3}{13}} = \\ \text{из прямогольн. треугр. } \Delta\text{-ка}$$

$$= 13 \sqrt{\frac{3}{10}} - x \sqrt{\frac{3}{13}}$$

15. Но в  $6$  из  $EOM$ :  $EO = \sqrt{EM^2 + OM^2}$

$$\Rightarrow \text{тоально радиус } OM = MN, \text{ т.к. } AO = \frac{3}{10} \sqrt{130} + x \\ = 3 \sqrt{\frac{13}{10}} + x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

17. Угол

$$S_{\Delta ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{30}}{2}$$

$\uparrow$   
нужно.

$$CE = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{13} \cdot 10}{4}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$EF = 2x \cdot \sqrt{\frac{10}{13}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{130}}{4} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 5$$

$$S_{ECD} = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{5\sqrt{30}}{4}$$

$$S_{ACD} : S_{ECD} = \frac{3\sqrt{30}}{2} : \frac{5\sqrt{30}}{4} = \frac{3\sqrt{30} \cdot 4}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{30}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2}{5} = 6 : 5 \cdot \boxed{0+6 \text{ нет}: 6:5=1,2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$16. EO^2 = AO^2 \Rightarrow EM^2 + OM^2 = AO^2 \Rightarrow x^2 \cdot \frac{130}{169} +$$

$$+ \left( 13\sqrt{\frac{3}{10}} - x\sqrt{\frac{3}{13}} \right)^2 = \left( 3\sqrt{\frac{13}{10}} + x \right)^2$$

$$\begin{aligned} & x^2 \left( 10 + \frac{3}{13} - 1 \right) + 2x \left( \frac{13 \cdot 3}{\sqrt{130}} - \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{10}} \right) + \frac{169 \cdot 3 - 9 \cdot 13}{10} = 0 \\ & x^2 \left( \frac{120}{13} - 0 \cdot x + \frac{13 \cdot 3 \cdot 10}{10} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2 \cdot \frac{10}{13} + \frac{13 \cdot 13 \cdot 3}{10} + x^2 \cdot \frac{3}{13} - 2 \cdot x \cdot 13 \cdot \frac{3}{\sqrt{130}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 13}{10} + x^2 + \\ & x^2 \left( \frac{10}{13} + \frac{3}{13} - 1 \right) - 2x \frac{3 \cdot (3+13)}{\sqrt{130}} + \frac{13 \cdot 3 \cdot (13-3)}{10} = 0 \end{aligned}$$

$$12x \cdot \frac{13}{\sqrt{130}} = 13 \cdot 3$$

$$x = \frac{13 \cdot 3 \cdot \sqrt{130}}{13 \cdot 12} = \frac{\sqrt{130}}{4} \dots \text{напишите} \rightarrow 0.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.  $5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

~~Берем  $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$~~   $x = \frac{3\pi}{2}$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \cancel{4\pi} \quad \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Ответ:  $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45) (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x + 7)^2 + y^2 = 2^2 \quad (2)$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \end{cases}$$

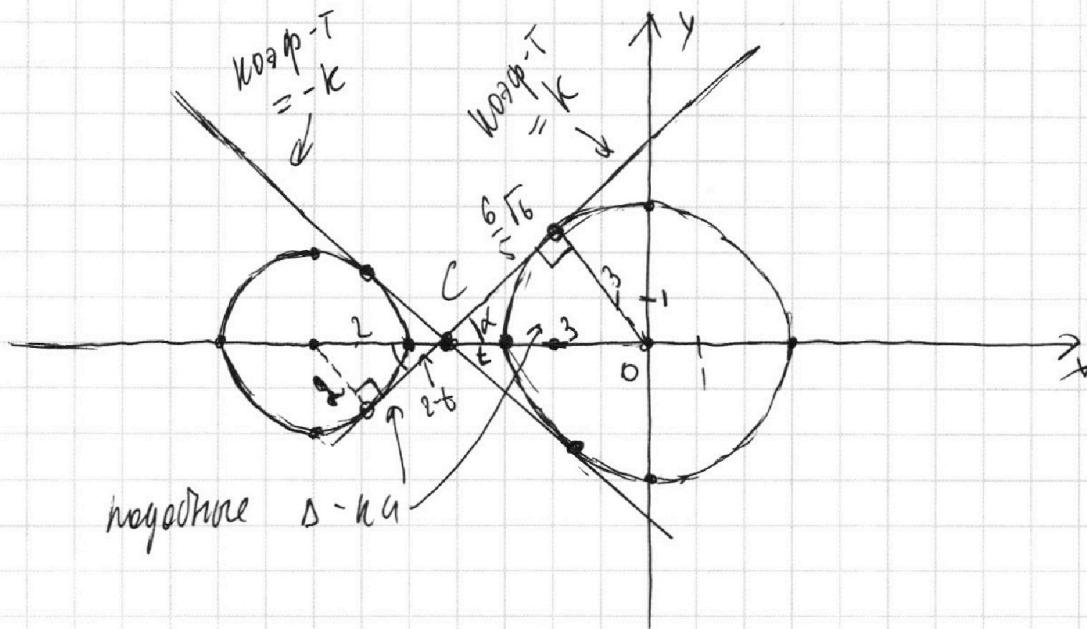
Вспомним на координатной плоскости геометрию

Объект, задаваемое системой уравнений.

Уравнение (1) — окружность с центром  $(0; 0)$ ,

радиуса  $3$ , (2) — окружность с центром  $(-7; 0)$

радиуса  $2$ . (3) — это каноничное представление.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

точку между центрами. Рассмотрим, что с  
помощью этого можно сделать. Найдем квадрант  
k. Вторая, очевидно, симметрия  
относится. Она, так что имеет угол.  
Понятно, что нам подходит все  
угловые коэффициенты  $\in (-k; k)$ , что  
символично значит  $a$  для всех значений,  
кроме  $k = 0$ , так что на деле  
нам нужно промежуток  $(-k; 0) \cup (0; k)$ .

Удовлетворить условию пересечения с некоторыми  
точками  $\#$  для подобранных  $a$  будут граничи  
чные точки  $C_1$  (например) с радиусом маленьким.  
Видно, что прямые с другими маленькими  
(символично большиими по модулю) могут пересекать  
лишь одну окружность.

Найдем точку  $C$ .

см. рисунок

Рассмотрим негодное треугольники, образованные  
центрами окружностей, точкой  $C$  и точками  
касания с ~~одной~~ общей касательной с квадрантом  
 $k$ . Рассмотрим  $C$  делит отрезок между окружностями  
на  $Ox$  (он имеет  $2 : [-5; -3]$ ) на



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мы хотим, чтобы система имела ~~одно~~ ~~единственное~~ решение.

То есть, чтобы прямая пересекала окружность  
в двух точках. То есть надо - в двух.

При  $a=0$  ур-е прямой  $x=7$  л.

Ок-ти не имеют точек с единственным ординатором,  
так что решения нет более 2.

Не подходит. Так что считаем, что  $a \neq 0$ .

$$\text{Тогда } x + 3ay - 7a = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x}{3a} + \frac{7a}{3a}$$

Или, а ~~загадка~~ можно ~~загадка~~ прямой.

Так что если при данном угловом коэффициенте  
 $-\frac{1}{3a}$  в принципе дает 3 пересечения,  
то мы сможем подобрать свободный

член  $\frac{7a}{3a}$  так, чтобы они были,

т.к. при фиксированных  $a \neq 0$   $\frac{7a}{3a}$  принцип  
всегда  $(-\infty; +\infty)$  изменяется в.

Осталось только найти подходящие коэффициенты.

Поскольку ось  $Ox$  - линия симметрии окружности,  
то если где-либо наше касание идет через внешнюю  
сторону !



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим  $2-t$  и  $t$ . тогда отношение  
первой гипотезы к пакетов подобно  $\Delta$ -ней,

$$\frac{2+2-t}{3+t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 12 - 3t = 6 + 2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 = 5t \Rightarrow t = \frac{6}{5} \text{ значит координата}$$

$$C = \left( -\frac{3}{5}, 0 \right)$$

На самом деле ~~также~~ тангенс угла  $\alpha$   
наименее касательной. Второй катет  $b$   
в дальнейшем  $\Delta$ -не равен то ли

$$\sqrt{(3+t)^2 - 3^2} = \sqrt{9+t^2+6t-9} =$$

$$= \sqrt{t^2+6t} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{6 \cdot 6}{5}} = \sqrt{\frac{36+36}{25}} = \sqrt{\frac{72}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{6 \cdot 6}{5}} = \frac{\sqrt{36 \cdot 6}}{5} = \frac{6}{5} \sqrt{6}.$$

$$\text{Установим } k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{6}{5} \sqrt{6}}{\frac{3}{5}} = \frac{6}{5} \sqrt{6} =$$

$$\rightarrow \frac{1}{3a} \in (-k; 0) \cup (0; k) = \left( -\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0 \right) \cup \left( 0; \frac{5}{2\sqrt{6}} \right) = \boxed{\left[ \frac{5}{2\sqrt{6}} \right]}$$

$$a \in \left( -\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15} \right) \cup \left( \frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right).$$

$$\text{Ответ: } a \in \left( -\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15} \right) \cup \left( \frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. Решите уравнение.

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$\uparrow x > 0$

ОДЗ:  $x > 0$

$6x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{6}$

$36x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm \frac{1}{6}$

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \cancel{36x \log_7 6x} + \cancel{4}$$

$$= \cancel{2\sqrt{6x}} \cdot \log_{6x}^3 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \cancel{\log_{6x}^{3,5} 7} + 4 = 0$$

$$\log_7^4 6x - \cancel{\log_7 6x} + 4 = 0$$

$$2\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - 7 = 0 \quad (1) \quad \text{- норм.} \quad \nearrow 0$$

Две второго уравнения аналогичны получим:

$$\log_7^4 y + 6\log_7 y = \log_7 (7^5) - 4$$

ОДЗ:

$y > 0$   
 $y \neq 1$

$$\log_7^4 y + 6 \cdot \frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \log_7 y - 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \log_7^4 y + \frac{3,5}{\log_7 y} + 4 = 0 \\ & \text{или} \end{aligned}$$

70

$$2 \log_7^5 y + 8 \log_7 y + 7 = 0 \quad (2)$$

Система из уравнений  $\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ + 0N3 \end{cases}$

~~(1)~~ ~~(2)~~ ~~(1)+(2)~~ ~~(2)-(1)~~ сложим (1) и (2):

$$2(\log_7^5 6x + \log_7^5 y) + 8(\log_7 6x + \log_7 y) = 0$$

$$2(\log_7 6x + \log_7 y)(\log_7^4 6x - \log_7^3 6x \log_7 y \dots + \log_7^4 y) + 8(\log_7 6x + \log_7 y) = 0$$

$$\log_7 6xy (2(\dots) + 8) = 0$$

$$\log_7 6xy = 0 \quad (3)$$

$$\log_7^4 6x - \log_7^3 6x \log_7 y \dots + \log_7^4 y = -4 \quad (4)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) \log_7 6xy = 0 \Leftrightarrow 6xy = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{xy = \frac{1}{6}} .$$

~~Одно уравнение~~ ~~один корень~~  
~~один корень~~ запишем т.т.

распишем ~~(1)-(2)~~ (1)-(2) :

$$2(\log_7^5 6x - \log_7^5 y) + 8(\log_7 6x - \log_7^5 y) = 14$$

$$\cancel{\log_7^5 \frac{6x}{y}} \left( 2(\log_7^4 6x + \dots + \log_7^4 y) + 8 \right) = 14$$

Очевидно:  $\frac{1}{6}$  - извергина  
богоматери.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

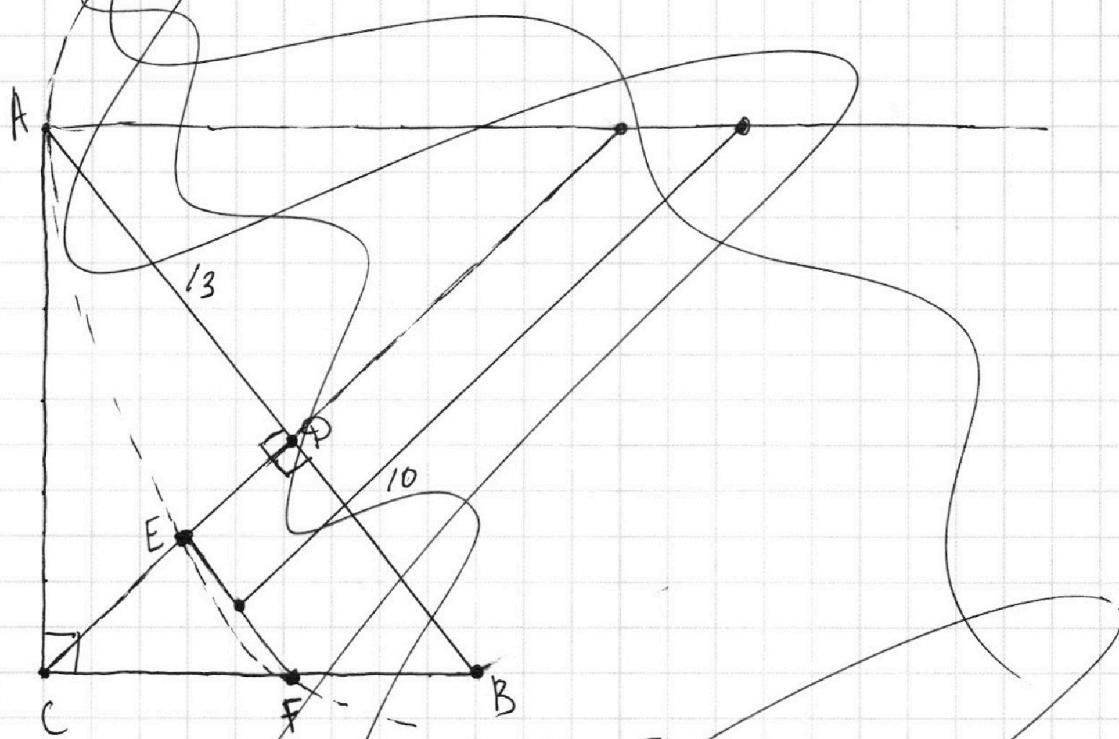
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



1. Ради высота  $CD$  к гипотензде  $AB$  знает

$AB$  гипотензда и  $DE \perp AB$ .

2. Притомому задаче нам ванно лист

относятся и чувствко  $AB : BD = 1,5 = \frac{DB}{10}$ ,

то будем считать  $AB = 15$ ,  $BD = 2,5$ .

3. Для воноготы триангул. 15-ка  $CD$  верно

$$CD^2 = A$$

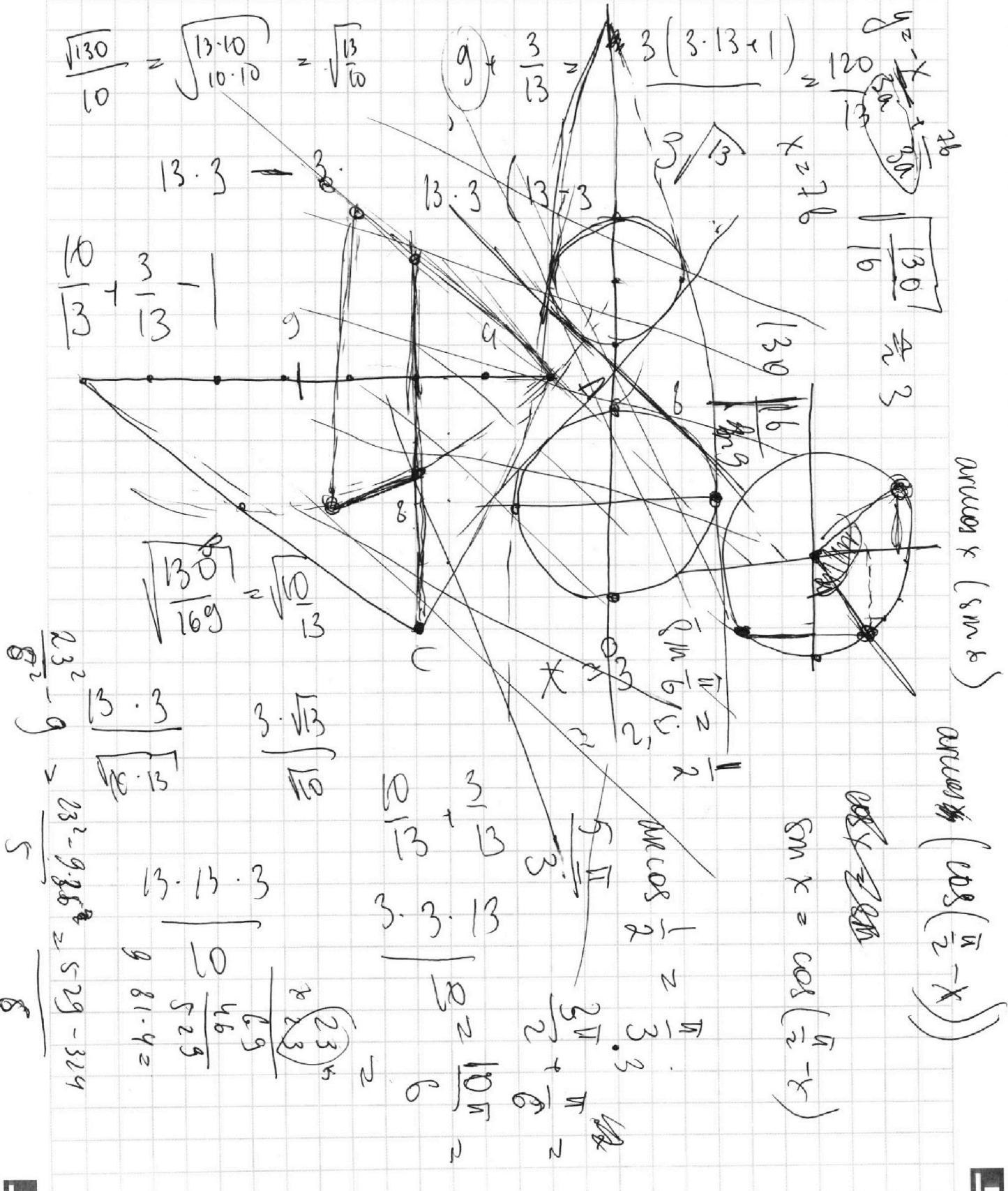
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 125 \end{array}$$

Черновик.

$$\begin{aligned} ab &= 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^7 \cdot 14 \\ bc &= 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^5 \cdot 19 \\ ac &= 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 43 \end{aligned}$$

$$33 \cdot 43 = 76 - 38$$

$$a^2 b^2 c^2 = k m n \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 5 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \sqrt{15-kmn}$$

Хоть 15  $\infty$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$k = 3$$

$$m = 5$$

$$2/6 = 36 \cdot 6$$

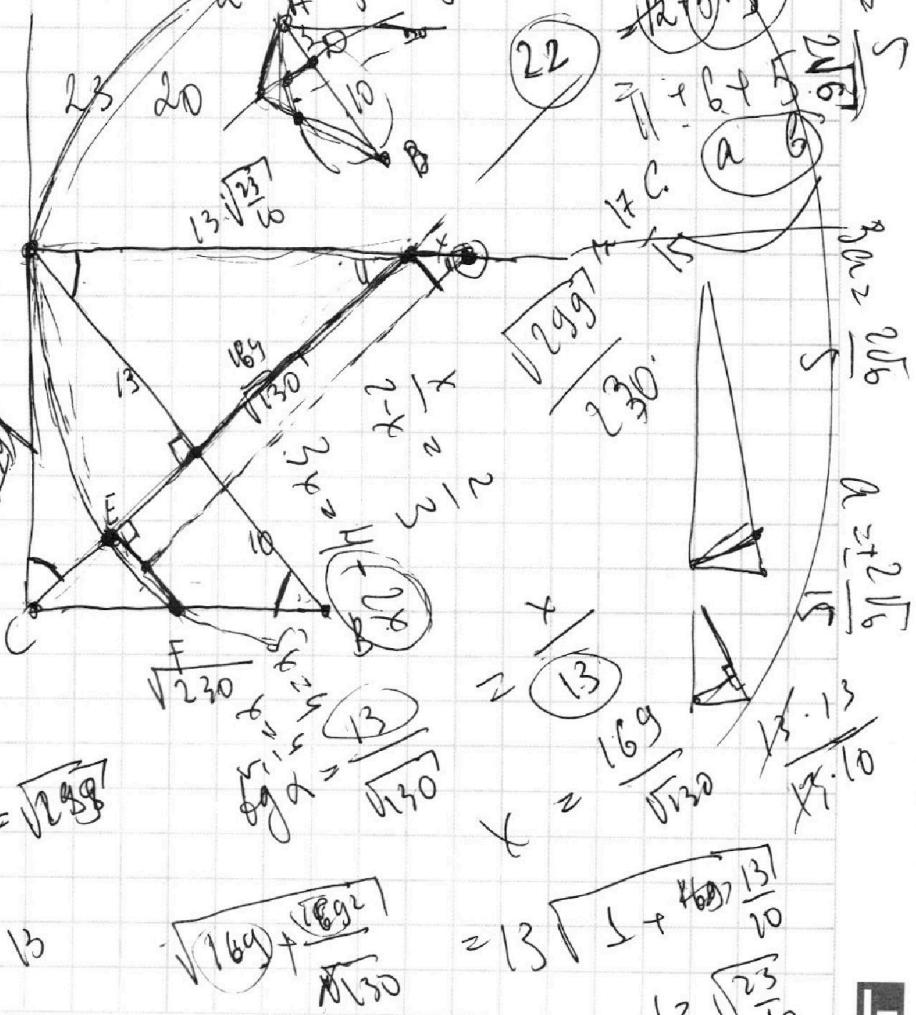
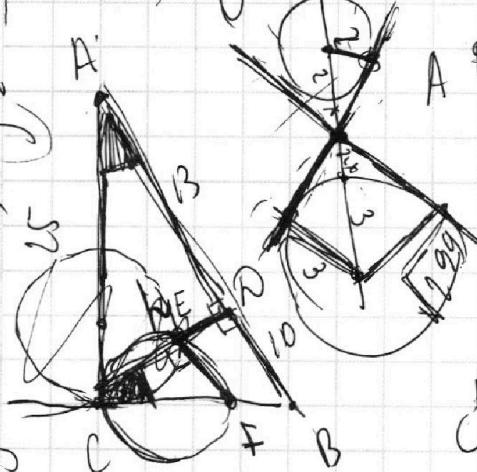
$$a+b = 43 \quad \frac{2,5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$b+c = 19 \cdot 43$$

$$a+b = 14$$

$$d(a+b+c) = 0$$

$$a+b+c = 43$$



T