МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

$x=2$

$x^5+4x-8=0$ $\quad 2+8-7$

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдется значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

$2x^5+8x-7$ $\quad 2y^5+8y+3=7$

$\log_7^4 6x - 2\log_{6x} 7$

$=\frac{3}{2}$ $\quad 6-2{,}5=3{,}5$

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

$y^4+3{,}5\log_y 7+4$

$\frac{5}{2}$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

$7^0=$

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^3-y^4)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть $ab = k\cdot 2^{7}\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}$, $bc = n\cdot 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}$

$ac = m\cdot 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}$, где $k, n, m \in \mathbb{N}$.

Перемножим: $a^2b^2c^2 = kmn\, 2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{75}$.

Извлечем корень ($abc > 0$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$): $abc = 2^{17}\cdot 3^{21}\cdot 5^{37}\sqrt{kmn\cdot 3\cdot 5}$

Поскольку $abc \in \mathbb{N}$, ~~$\sqrt{kmn\cdot 3\cdot 5}$~~ $\sqrt{kmn\cdot 3\cdot 5}$ тоже $\in \mathbb{N}$. Это в частности означает, что

$kmn \vdots 3$, т.е. $kmn = 3t$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда

$abc = 2^{17}\cdot 3^{21}\cdot 5^{37}\sqrt{3\cdot t\cdot 3\cdot 5} = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{37}\sqrt{5t}$.

Из этого следует $abc \vdots 2^{17}\cdot 3^{22}$.

Из условия $ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43} \Rightarrow abc \vdots 5^{43}$ $\Big|\Rightarrow$

т.к. 2, 3, 5 взаимно просты

$\Rightarrow abc \vdots 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$. Значит $abc \geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

~~Значение $2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$ достигается при $a = 2^{4}\cdot 3^{12}\cdot 5^{20}$, $b = 2^{3}\cdot 3^{5}$, $c = 2^{10}\cdot 3^{5}\cdot 5^{23}$~~

~~наименьшее~~

~~Проверим изначальное условие:~~

~~$ab = 2^{7}\cdot 3^{17}\cdot 5^{20} \vdots 2^{7}\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}$~~

~~$bc = 2^{13}$~~

~~$4+3+10=17$, $12+5+5=22$, $20+23=43$.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Наименьшее возможное значение $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

достигается при $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{20}$

$b = 2^3 \cdot 3^5$

$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{23}$

$4+3+10=17$, $6+5+11=22$, $20+23=43$.

степень для 2 для 3 для 5.

Проверим изначальное условие.

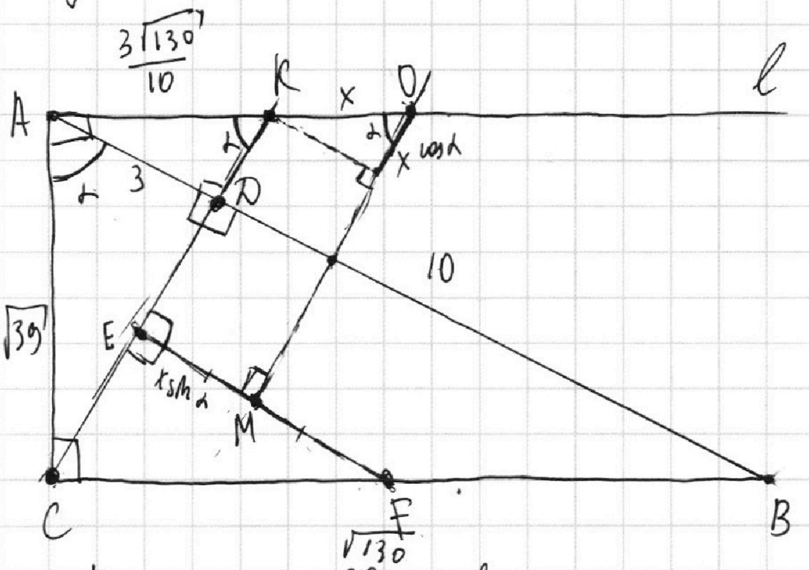
$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{23} \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$. выполнено.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

Задача 2.



1. Поскольку CD - высота к гипотенузе, то AB - гипотенуза и $C \in [AB]$.

2. Поскольку нам возможно найти отношения, и известно $AB : BD = 1,3 = \frac{13}{10}$, то пусть $AB = 13$, $BD = 10$. Тогда $AD = 3$.

3. Для высоты CD к гипотенузе верно:
$CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{3 \cdot 10} = \sqrt{30}$.

4. По th Пифагора в $\Delta\Delta$ ADC и BDC ($\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$)
$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9+30} = \sqrt{39}$
$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{100+30} = \sqrt{130}$

5. Через т. A проведем прямую $l \parallel BC$.
Поскольку $(BC) \perp (AC)$, то и $l \perp (AC)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $(CD) \cap l = K$.

6. $(AK) \parallel (BC) \xRightarrow{\text{по th о проп. отрезках}} \frac{AK}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{10} \Rightarrow AK = \frac{3}{10} BC =$
$= \frac{3}{10}\sqrt{130}$

7. Пусть O – центр описанной в условии окр-ти.
Тогда $(AO) \perp (AC)$, как радиус и касательная, значит $O \in l$.

8. Поскольку $(EF) \parallel (AB)$, (EF), как и (AB) $\perp (CD)$.
Пусть M – середина EF. Тогда OM является серединным перпендикуляром к EF (т.к. O – центр окр-ти), т.е. $(OM) \perp (EF)$, значит $(OM) \parallel (ED) = (EK)$, т.е. $(OM) \parallel (EK)$.
Понятно, что $K \in [AO]$, а не как-то иначе.

9. Пусть $KO = x$. Тогда $AO = \frac{3\sqrt{130}}{10} + x$ – радиус окр-ти.

10. Пусть $\angle CAB = \alpha$.

Из $\triangle ABC$:
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{130}}{13}$
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{39}}{13} = \sqrt{\frac{13\cdot 3}{13\cdot 13}} = \sqrt{\frac{3}{13}}$
$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{130}{39}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

$\angle AKC = 90° - \angle DAK = 90° - (90° - \angle CAB) = \alpha$.

$\angle AOM = \angle AKC = \alpha$.

(при $\parallel$-ных прямых

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

11. EM – высота прямоуг. трапеции $MLKO$,

т.е. $EM = KO \cdot \sin\alpha = x \cdot \frac{\sqrt{130}}{13}$

$EF = 2EM = 2x \cdot \frac{\sqrt{130}}{13} = 2x \cdot \sqrt{\frac{10}{13}}$

12. Поскольку $(EF) \parallel (BD)$: $\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2x \cdot \sqrt{\frac{10}{13}}}{10} = \frac{CE}{\sqrt{30}} \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{30} \cdot 2x\sqrt{\frac{10}{13}}}{10} =$

$= \frac{x \cdot \sqrt{\frac{30 \cdot 10}{13}}}{5} = \frac{x \cdot 10\sqrt{3}}{5\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}\,x}{\sqrt{13}}.$

13. Из $\triangle CAK$: $CK = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{39}}{\frac{\sqrt{130}}{13}} = 13\sqrt{\frac{3 \cdot 13}{13 \cdot 10}} = 13\sqrt{\frac{3}{10}}.$

$EK = CK - CE = 13\sqrt{\frac{3}{10}} - \frac{2\sqrt{3}\,x}{\sqrt{13}}.$

14. Опустив высоту из K на (OM) видно,

что $OM = \underset{\text{из прямоуг.}}{EK} + x \cdot \underset{\text{из прямоуг. }\triangle\text{-ка}}{\cos\alpha} = 13\sqrt{\frac{3}{10}} - \frac{2\sqrt{3}\,x}{\sqrt{13}} + x \cdot \sqrt{\frac{3}{13}} =$

$= 13\sqrt{\frac{3}{10}} - x\sqrt{\frac{3}{13}}.$

15. По т. Пифагора в $\triangle EOM$: $EO = \sqrt{EM^2 + OM^2}$

Это равно радиусу окр-ти, т.к. $AO = \frac{3\sqrt{130}}{10} + x$

$= 3\sqrt{\frac{13}{10}} + x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

17. Итак $S_{\Delta ACD} = \dfrac{AD \cdot CD}{2} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{30}}{2}$

↑ прямоуг.

$CE = \dfrac{2\sqrt{3}\,x}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{13 \cdot 10}}{4}}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$

$EF = 2x \cdot \sqrt{\dfrac{10}{13}} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{130}}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 5$

$S_{ECF} = \dfrac{CE \cdot EF}{2} = \dfrac{5\sqrt{30}}{4}$.

$S_{ACD} : S_{ECF} = \dfrac{3\sqrt{30}}{2} : \dfrac{5\sqrt{30}}{4} = \dfrac{3\sqrt{30} \cdot 4}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{30}} =$

$= \dfrac{3 \cdot 2}{5} = 6 : 5$.

$\boxed{\text{Ответ: } 6 : 5 = 1{,}2}$

16. $EO^2 = AO^2 \Rightarrow EM^2 + OM^2 = AO^2 \Rightarrow x^2 \cdot \frac{130}{169} +$

$+\left(13\sqrt{\frac{3}{10}} - x\sqrt{\frac{3}{13}}\right)^2 = \left(3\sqrt{\frac{13}{10}} + x\right)^2$

$\Downarrow$

$\frac{10}{13}x^2 + 169 \cdot \frac{3}{10} + x^2 \cdot \frac{3}{13} - 2x \cdot 13 \cdot \frac{3}{\sqrt{130}} = 9 \cdot \frac{13}{10} + x^2 + 2 \cdot 3x\sqrt{\frac{13}{10}}$

$x^2\left(10 + \frac{3}{13} - 1\right) + 2x\left(\frac{13 \cdot 3}{\sqrt{130}} - \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{10}}\right) + \frac{169 \cdot 3 - 9 \cdot 13}{10} = 0$

$\frac{120}{13} \cdot x^2 + 0 \cdot x + \frac{13 \cdot 3 \cdot 10}{10} = 0$

$x^2 \cdot \frac{10}{13} + \frac{13 \cdot 13 \cdot 3}{10} + x^2 \cdot \frac{3}{13} - 2 \cdot x \cdot 13 \cdot \frac{3}{\sqrt{130}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 13}{10} + x^2 +$
$+ 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \sqrt{\frac{13}{10}}$

$x^2\left(\frac{10}{13} + \frac{3}{13} - 1\right) - 2x\,\frac{3(13+13)}{\sqrt{130}} + \frac{13 \cdot 3(13-3)}{10} = 0$

$12x \cdot \frac{13}{\sqrt{130}} = 13 \cdot 3$

$x = \frac{13 \cdot 3 \cdot \sqrt{130}}{13 \cdot 12} = \frac{\sqrt{130}}{4}$ … наконец-то.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3. $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$$\cancel{5\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}.$$

$\boxed{\text{Ответ: } \left\{\frac{\pi}{6}\right\}.}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

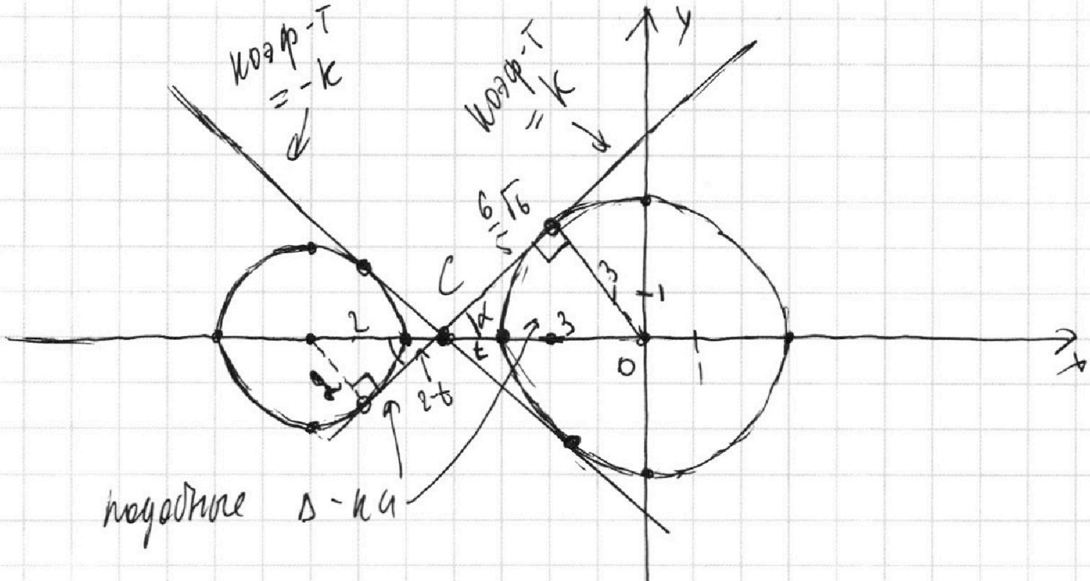
Задача 4.

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2+14x+49+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3ay-7b=0 \quad (3) \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \quad (1) \\ (x+7)^2+y^2=2^2 \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

~~Вз~~ На координатной плоскости изобразим объекты, задаваемые системой уравнений.

Сначала (1) – окружность с центром (0;0), радиуса 3, (2) – окружность с центром (−7;0) радиуса 2. (3) – это какая-то прямая.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

точку между центрами. Пусть та, что с положительным наклоном (пусть точку C.) имеет коэффициент k. Вторая, очевидно, ей симметрична относит. оси, так что, имеет угл. коэф-т $-k$. ($k = -\frac{1}{3a}$ для нашего-то a)

Понятно, что нам подойдут все ~~[illegible]~~ угловые коэффициенты $\in (-k; k)$, мы сможем найти a для всех значений, кроме $k = 0$, так что на деле нам нужен промежуток $(-k; 0) \cup (0; k)$.

Удовлетворять условию пересечения с четырьмя точками ~~[illegible]~~ для подобранных a будут прямые через точку C_1 (например) с данным наклоном. Видно, что прямые с другими наклонами (слишком большими по модулю) могут пересекать лишь одну ок-ть.

Найдем точку C. (см. рисунок)

Рассмотрим подобные треугольники, образованные центрами ок-тей, точкой C и точками касания с ~~[illegible]~~ общей касательной с коэф-том k. Пусть C делит отрезок между окружностями на Ox (он длины 2 : [-5; -3]) на

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Мы хотим, чтобы система имела ~~три~~ четыре решения.
То есть, чтобы прямая пересекала ок-ти суммарно в 4х точках. То есть каждую - в двух.
При $a=0$ ур-е прямой $x=7b$.
Ок-ти не имеют точек с одинаковыми ординатами, так что ~~решений~~ решений системы не более 2.
Не подходит. Так что считаем, что $a \neq 0$.
Тогда $x+3ay-7b=0 \Leftrightarrow y=\frac{-x}{3a}+\frac{7b}{3a}$
Итак, a задает ~~угловой~~ наклон прямой.
Так что если при данном угловом к-те $-\frac{1}{3a}$ в принципе бывает 3 пересечения, то мы сможем подобрать свободный член $\frac{7b}{3a}$ так, чтобы они были,
т.к. при фиксированном $a \neq 0$ $\frac{7b}{3a}$ принимает все значения на $(-\infty; +\infty)$ изменением b.
Осталось только найти подходящие коэф-ты.
Поскольку ось O_x - линия центров этих ок-тей, ~~то~~ есть две общие внутренние касательные через какую-то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Их~~ длина $2-t$ и t. тогда отношение ~~катет~~ гипотенуз и катетов подобных Δ-ков:

$$\frac{2+2-t}{3+t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 12-3t = 6+2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 = 5t \Rightarrow t = \frac{6}{5}$$ Значит координаты

$C - \left(-4\frac{1}{5}; 0\right)$

На самом деле k - ~~танге~~ тангенс угла α наклона касательной. Второй катет в большем Δ-ке равен по th Пифагора

$$\sqrt{(3+t)^2-3^2} = \sqrt{9+t^2+6t-9} =$$

$$= \sqrt{t^2+6t} = \sqrt{\frac{36}{25}+\frac{6\cdot 6}{5}} = \frac{\sqrt{36\cdot 6}}{5} = \frac{6}{5}\sqrt{6}.$$

Итак $k = tg\alpha = \frac{3}{\frac{6}{5}\sqrt{6}} =$

$$-\frac{1}{3a} \in (-k;0)\cup(0;k) = \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}};0\right)\cup\left(0;\frac{5}{2\sqrt{6}}\right) = \boxed{\frac{5}{2\sqrt{6}}}$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right).$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5. Решим (преобразуем) ур-я из условия.

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$

ОДЗ: $x>0$
$6x\neq 1 \Rightarrow x\neq \frac{1}{6}$
$36x^2\neq 1 \Rightarrow x\neq \pm\frac{1}{6}$

$\Updownarrow\ x>0$

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \cancel{36x\log_{6x}7-4}$

$= \frac{3}{2}\cdot\log_{6x}7 - 4$

$\Updownarrow$

$\log_7^4(6x) - 3{,}5\log_{6x}7 + 4 = 0$ ①

$\cancel{\log_7^4(6x) - 8\cdot\frac{1}{\log_7 6x} + 4 = 0}$

$\cancel{\Updownarrow}$

$\cancel{\log_7^5 6x + 4\log_7 6x - 8 = 0}$

$\log_7^4 6x - \frac{3{,}5}{\log_7 6x} + 4 = 0$

$\Updownarrow$

$2\log_7^5 6x + 8\log_7 6x - 7 = 0$ (1) — корни >0

Для второго ур-я аналогично получим:

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

ОДЗ:
$y>0$
$y\neq\pm 1$

$\Updownarrow$

$\log_7^4 y + 6\cdot\frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2}\cdot\log_7 y - 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1) $\log_7^4 y + \dfrac{3,5}{\log_7 y} + 4 = 0$

(2) — корень >0

$$2\log_7^5 y + 8\log_7 y + 7 = 0 \quad (2)$$

Система из условия $\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ + \text{ОДЗ} \end{cases}$

Сложим (1) и (2):

$$2\left(\log_7^5 6x + \log_7^5 y\right) + 8\left(\log_7 6x + \log_7 y\right) = 0$$

$$2\left(\log_7 6x + \log_7 y\right)\left(\log_7^4 6x - \log_7^3 6x \log_7 y \ldots + \log_7^4 y\right) + 8\left(\underbrace{\log_7 6x + \log_7 y}_{= \log_7 6xy}\right) = 0$$

$$\log_7 6xy \left(2\left(\ldots\ldots\right) + 8\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} \log_7 6xy = 0 & (3) \\ \log_7^4 6x - \log_7^3 6x \cdot \log_7 y + \ldots + \log_7^4 y = -4 & (4) \end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(3) $\log_7 6xy = 0 \Leftrightarrow 6xy = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{xy = \frac{1}{6}}$. ~~$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ удовлетворяет~~ Запомним это.

Рассмотрим (1) − (2):

$$2\left(\log_7^5 6x - \log_7^5 y\right) + 8\left(\log_7 6x - \log_7^5 y\right) = 14$$

$$\log_7^5 \frac{6x}{y}\left(2\left(\log_7^4 6x + \ldots + \log_7^4 y\right) + 8\right) = 14$$

Ответ: $\frac{1}{6}$ — наверняка возможно.

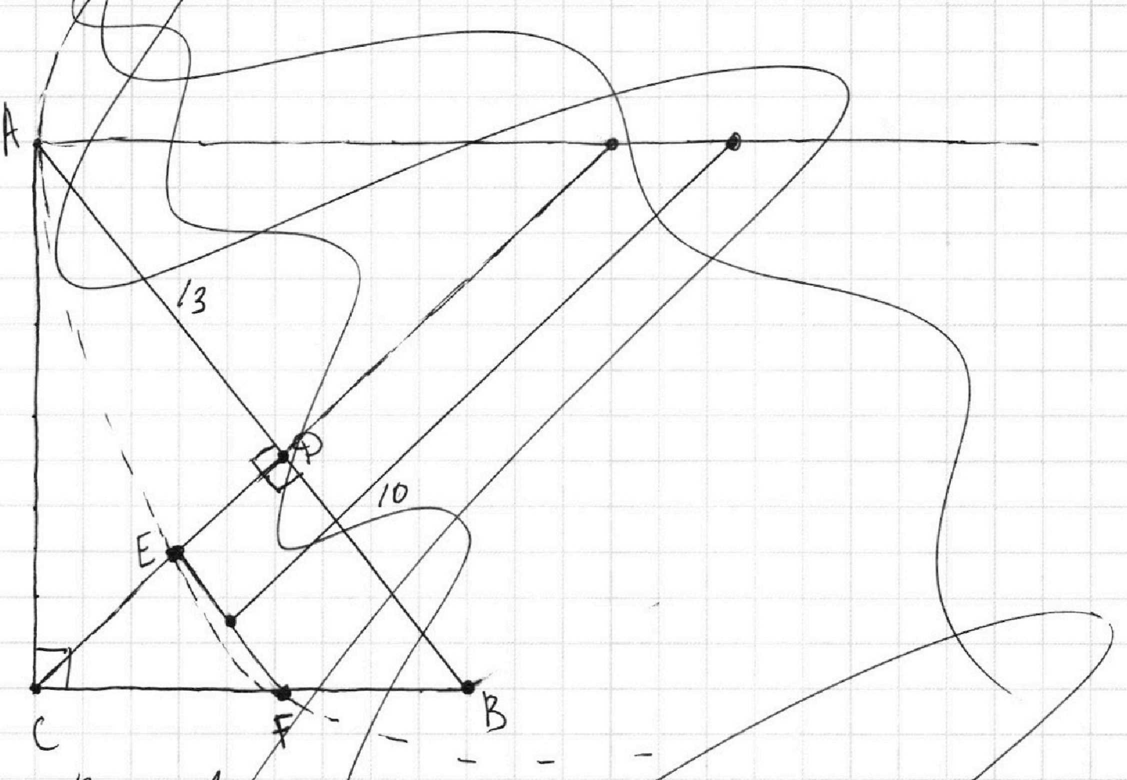
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2.



1. Раз высота CD — к гипотенузе, значит AB — гипотенуза и $D \in AB$.
2. Поскольку в задаче нам важны лишь отношения и известно $AB : BD = 1,3 = \frac{13}{10}$, то будем считать $AB = 13$, $BD = 10$.
3. Для высоты прямоуг. Δ-ка CD верно $CD^2 = A$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{\sqrt{130}}{10} = \sqrt{\frac{13\cdot 10}{10\cdot 10}} = \sqrt{\frac{13}{10}}$

$9 + \frac{3}{13} =$ $\frac{3(3\cdot 13+1)}{}$ $= \frac{120}{13}$

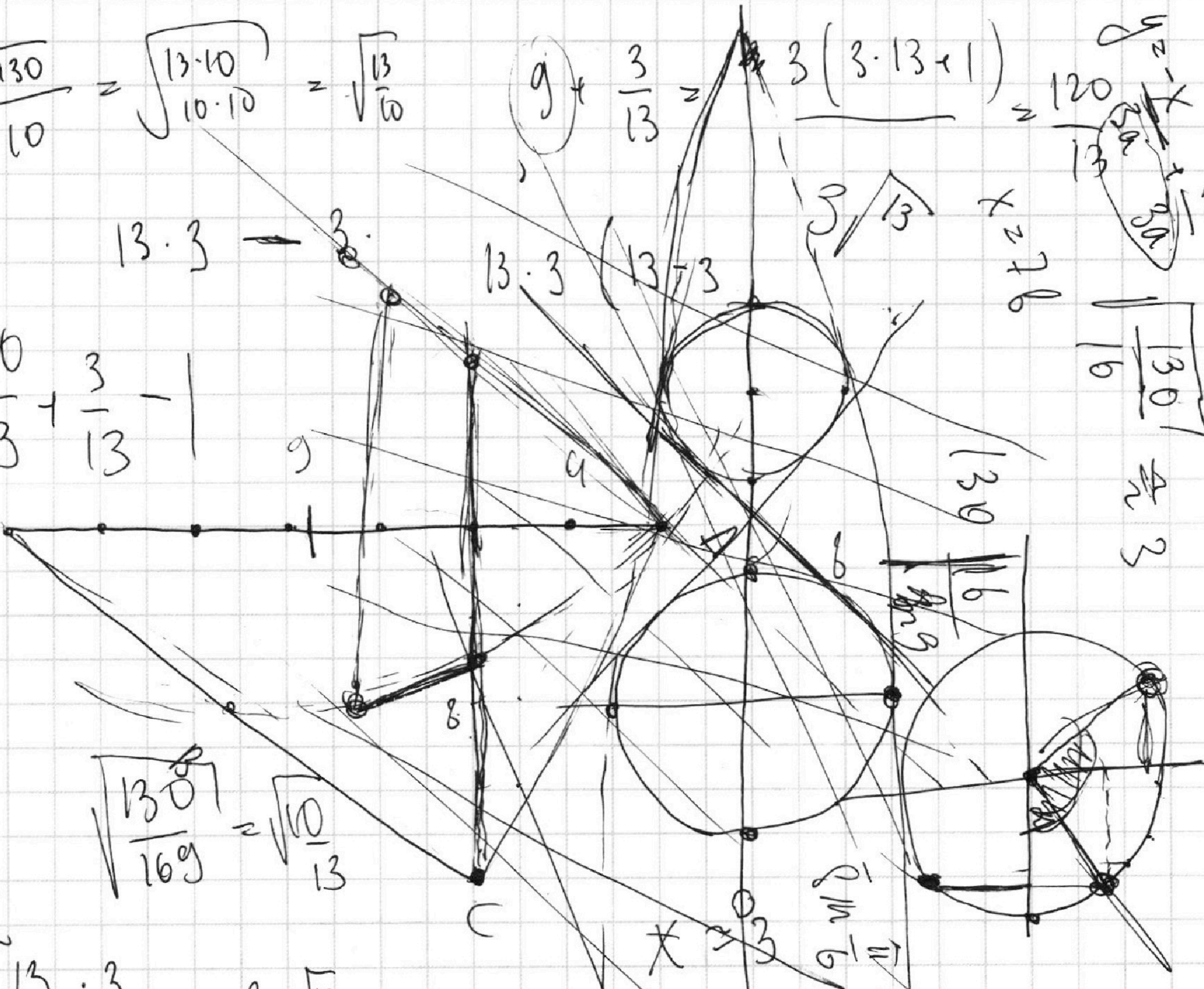
$13\cdot 3 \to 3$

$13\cdot 3$ $(13-3$

$3\sqrt{13}$

$x = 76$

$\frac{10}{13} + \frac{3}{13} = 1$



$\sqrt{\frac{130}{169}} = \sqrt{\frac{10}{13}}$

$x = 3$

$\frac{13\cdot 3}{\sqrt{10\cdot 13}}$ $\frac{3\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{10}}$

$\frac{10}{13} + \frac{3}{13}$

$\frac{13\cdot 13\cdot 3}{10}$

$\frac{3\cdot 3\cdot 13}{10} =$

$\frac{23^2}{8^2} - 9$

$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{3}$

$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} =$

$\frac{10\pi}{6} =$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$

$\arcsin x \ (\sin 6)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик.

$33+43=76 \to 38$

$ab = 2^{12} 3^{12} 5^{14}$

$bc = 2^{13} 3^{15} 5^{19}$

$ac = 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$a^2b^2c^2 = kmn\, 2^{34} 3^{43} 5^{75}$

$abc = 2^{17} 3^{21} 5^{37} \sqrt{15 kmn}$

хоть 15

$abc = 2^{\boxed{17}} 3^{\boxed{22}} 5^{38}$

$k=3$

$m=5$

$a+c=43$ $\quad \frac{2{,}5}{2}=\frac{5}{4}$

$b+c=19$ $\quad 43$

$a+b=14$

$2(a+b+c)=$

$a+b+c=43$

$a = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5$

$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5$

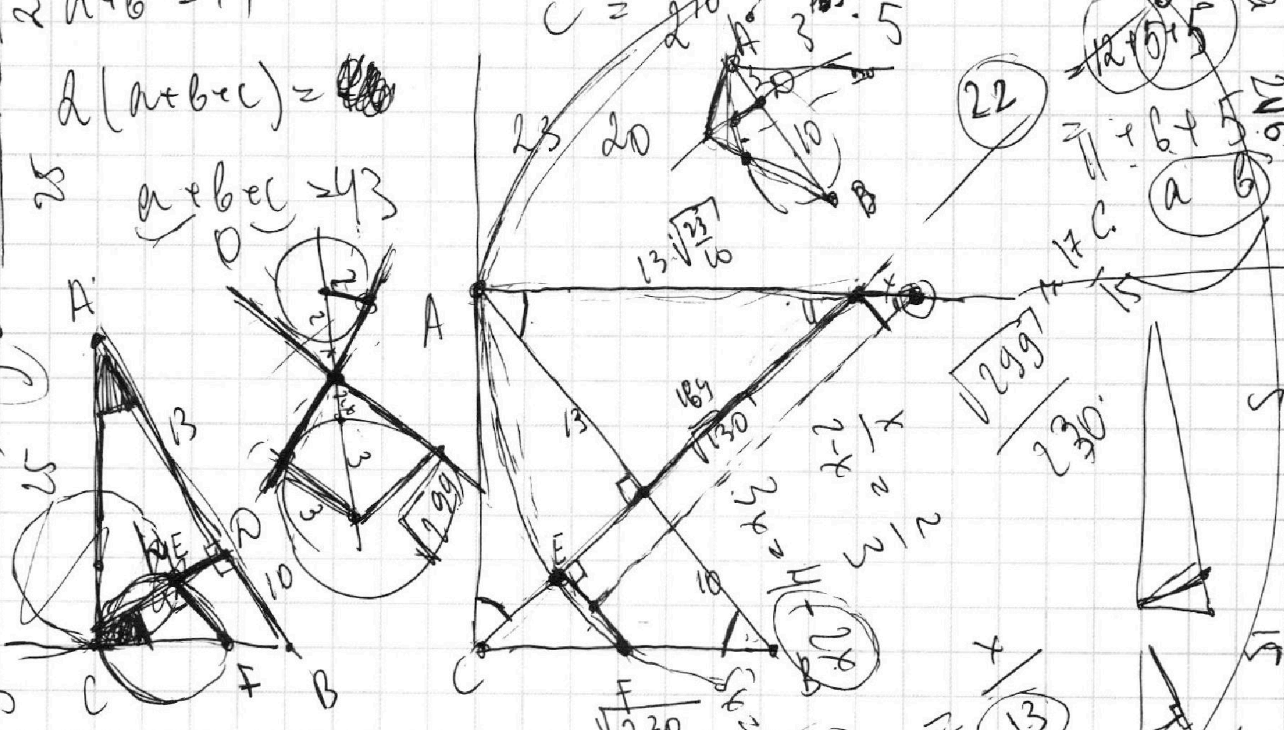
$c = 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5$

$2\sqrt{6} = 36 \cdot 6$

$441 - 225 = \frac{216}{25}$

22

$\frac{3a}{1} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$



$\frac{\sqrt{299}}{\sqrt{230}}$

$\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2 = \frac{441}{25} - 9 =$

$h^2 = 10 \cdot 13$

$h = \sqrt{130}$

$\sqrt{169+130} = \sqrt{299}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{13}{\sqrt{130}}$

$= \frac{x}{13}$

$x = \frac{169}{\sqrt{130}}$

$\frac{13 \cdot 13}{13 \cdot 10}$

$\frac{420}{21}$

13

$\sqrt{169 + \frac{169^2}{130}} = 13\sqrt{1 + \frac{13}{10}}$

$= 13\sqrt{\frac{23}{10}}$