



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

✓ 3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

✓ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

✓ 5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

✓ 7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

✓ а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

✓ б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть a при разложении на простые
имеет степеней при 2 α_1 , при 3 β_1 , при 5 γ_1 ;

аналог. $\Rightarrow a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot p_1$, p_1 не делит на 2, 3, 5;

аналог. $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot p_2$; $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

тогда $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 7$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 11$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 14$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 7 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 14 \end{cases}$$

аналог. $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$, $\beta_2 + \beta_3 \geq 15$, $\gamma_2 + \gamma_3 \geq 18$; $\alpha_3 + \alpha_1 \geq 14$, $\beta_3 + \beta_1 \geq 14$, $\gamma_3 + \gamma_1 \geq 14$; тогда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{7 + 13 + 14}{2} = 17$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{11 + 15 + 14}{2} = 21,5 \text{ , т.к. } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N} \geq 0, \text{ то}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 22$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \frac{14 + 18 + 14}{2} = 33, \text{ т.к. } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{N} \geq 0, \text{ то}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34 \text{ , т.к. } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0 \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$$

тогда $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{34}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^4$; $b = 2^3 \cdot 3^5$; $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle EFC \sim \angle ABE$ по
соотв

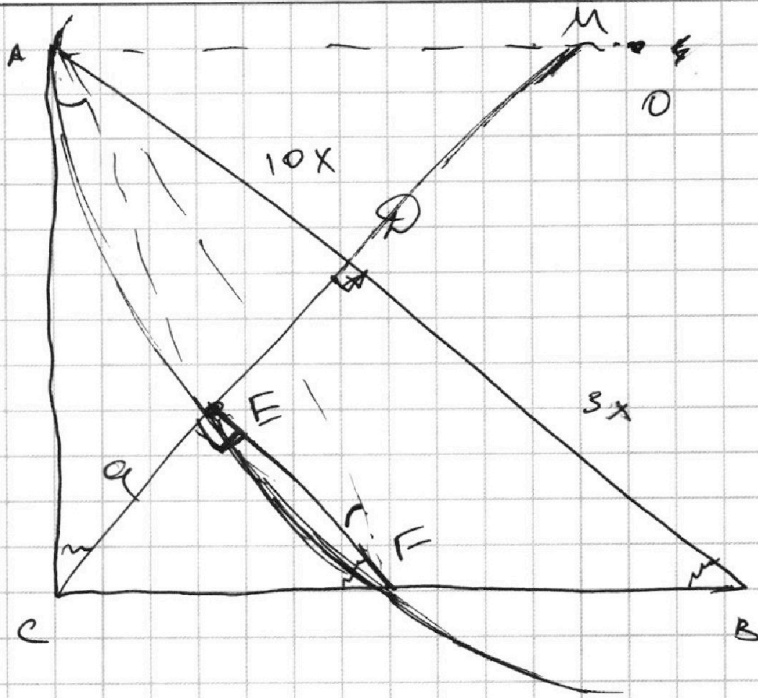
$$\begin{aligned} \angle CAE &= \frac{1}{2} \angle ABE \\ \angle AFE &= \frac{1}{2} \angle ABE \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \angle CAE = \angle AFE$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

$$AC = \sqrt{150}x$$

$$CD \cdot DM = 100x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

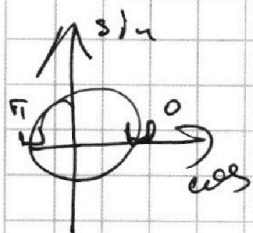
$$\sqrt{3} \operatorname{arccos}(\sin x) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$x \in [0; 5\sqrt{11}] \Rightarrow x + \frac{3\sqrt{11}}{2} \in [0; 5\sqrt{11}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{\sqrt{11}}{2} \in [-2\sqrt{11}; 3\sqrt{11}]$$

$$\begin{aligned} 5 \operatorname{arccos}(\sin x) &= 5 \operatorname{arccos}\left(\sin\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\right)\right) \sim \\ &= 5 \operatorname{arccos}\left(\cos\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Пусть $\alpha = x - \frac{\sqrt{11}}{2}$; тогда $\operatorname{arccos}(\cos \alpha)$ при $\alpha \in [-2\sqrt{11}; 3\sqrt{11}]$ может принимать следующие значения:



~~α , $\alpha + 2\sqrt{11}$, $\alpha - 2\sqrt{11}$~~

$$\begin{aligned} &\alpha + 2\sqrt{11}; -\alpha; \alpha; 2\sqrt{11} - \alpha; \alpha - 2\sqrt{11} \\ &(\text{I}) \quad (\text{II}) \quad (\text{III}) \quad (\text{IV}) \quad (\text{V}) \end{aligned}$$

$$\text{I) } 5 \operatorname{arccos}\left(\cos\left(x + \frac{3\sqrt{11}}{2}\right)\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$5x + \frac{15\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x \Rightarrow 4x = -12\sqrt{11}$$

$$\text{Проверка } 5 \operatorname{arccos}(0) = \frac{3\sqrt{11}}{2} - 3\sqrt{11} \quad x = -3\sqrt{11} \quad \text{— неверно}$$

≥ 0 ≤ 0

$$\text{II) } 5 \operatorname{arccos}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2} - x\right)\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$\frac{5\sqrt{11}}{2} - 5x = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$4\sqrt{11} = 6x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{11}}{6}, \text{ Проверка: } 5 \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{11}}{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$10\sqrt{11} = 10\sqrt{11} \quad \text{— верно}$$

$$\text{III) } 5 \operatorname{arccos}\left(\cos\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2}\right)\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x \Rightarrow 4x = 4\sqrt{11} \Rightarrow x = \sqrt{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: $5 \arccos(0) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \sqrt{11}$

$$\frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{2} - \text{верно}$$

IV) ~~5~~ $5 \left(\frac{5\sqrt{11}}{2} - x \right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + 1$

$$\frac{25\sqrt{11}}{2} - 5x = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$6x = 11\sqrt{11} \quad x = \frac{11\sqrt{11}}{6}; \text{ Проверка:}$$

$$5 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$5 \cdot \frac{2\sqrt{11}}{3} = \frac{5\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{10\sqrt{11}}{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$20\sqrt{11} = 9\sqrt{11} + 11\sqrt{11} = 20\sqrt{11} - \text{верно}$$

V) ~~5~~ $5 \left(x - \frac{5\sqrt{11}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$

$$5x - \frac{25\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$4x = 14\sqrt{11} \quad x = \frac{7\sqrt{11}}{2}$$

Проверка: $5 \arccos(-1) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{7\sqrt{11}}{2}$

$$5\sqrt{11} = 5\sqrt{11} - \text{верно}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{6}; \sqrt{11}; \frac{11\sqrt{11}}{6}; \frac{7\sqrt{11}}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

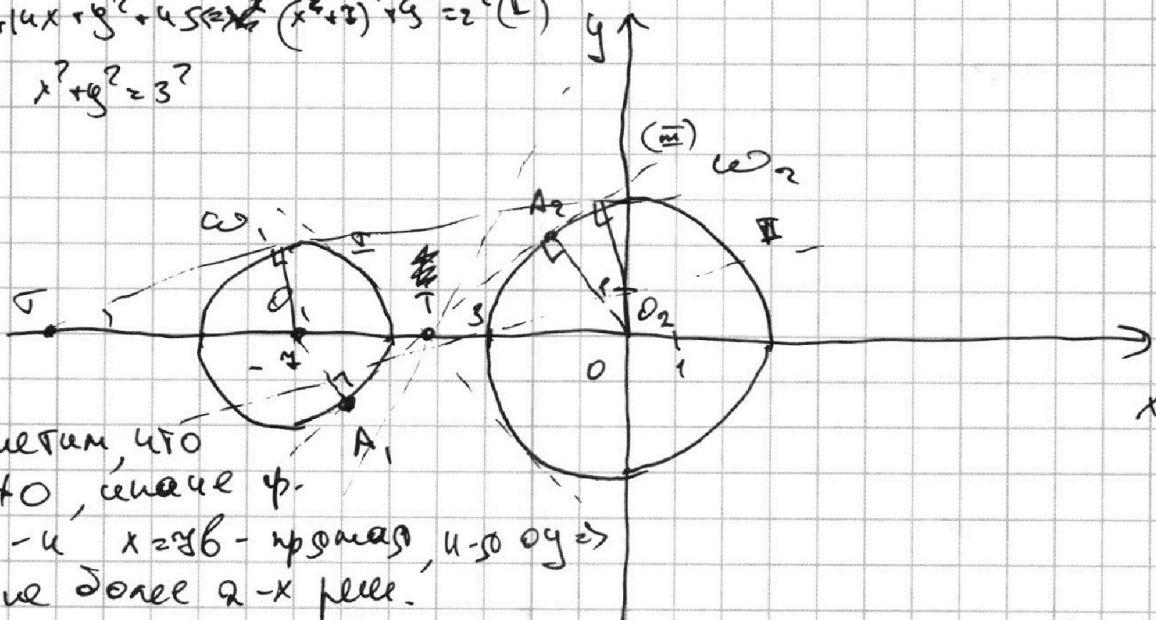
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x + 3ay - 3b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

~~4 1 стр~~

$$x^2 + 14x + y^2 + 45 = (x^2 + 7)^2 + y^2 = 2^2 \quad (I)$$

$$(II) \quad x^2 + y^2 = 3^2$$



Заметим, что $a \neq 0$, иначе φ — ор — и $x = 3b$ — прямая, и — 0 $oy \Rightarrow$
 \Rightarrow не более 2-х реш.

Тогда (II): $y = \frac{3b}{3a} - \frac{x}{3a}$, найдем, когда $a < 0$
 и пр. ор. $y = \frac{3b}{3a} - \frac{x}{3a}$ имеет 2 корня на ω_1 и ω_2 (6 корней)

пусть Γ — г. пер. (II) $\in O_1A$; $\angle O_1\Gamma A_1 = \angle A_2\Gamma O_2$
 или верт Γ , тогда и Γ пер $O_1A_1 \cap O_2A_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{O_2\Gamma}{O_1\Gamma}$, пусть $\Gamma O_2 = t$, тогда

$$\frac{3}{2} = \frac{t}{3-t} \Rightarrow 2(1-3t) = 2t$$

$$t = \frac{21}{5}$$

$$A_2\Gamma = \sqrt{\Gamma O_2^2 - A_2 O_2^2} = \sqrt{\frac{441}{25} - 9} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \frac{\sqrt{216}}{5}$$

$$= \frac{6\sqrt{6}}{5}; \quad \Gamma O_2 = \frac{A_2 O_2}{\Gamma A_2} = \frac{3}{\frac{6\sqrt{6}}{5}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

4 стр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда общ. нас при $a < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3a} = \pm \sqrt{A_1 \Gamma_2} =$

$= \frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow 3a = -\frac{12}{5\sqrt{6}} \Rightarrow a = -\frac{4}{5\sqrt{6}} = -\frac{4\sqrt{6}}{30 \cdot 15} =$

$= -\frac{2\sqrt{6}}{15}$; при $a \geq 0$ аналог. a общ. нас
 Случай $a \geq 0$ / случай $a < 0$
 при $a = \frac{2\sqrt{6}}{15}$; тогда если $\pm \sqrt{A_2 \Gamma_2} =$

узн. метод $-\frac{1}{3a} \geq \pm \sqrt{A_2 \Gamma_2}$ то будет
 не более 2 решений, при узн. метод $<$
 $\pm \sqrt{A_2 \Gamma_2}$ $\exists b$, при которых будет 4 реш.

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3a} < \frac{6}{2\sqrt{6}} \\ a < 0 \end{cases}, a \geq 0 \begin{cases} -2\sqrt{6} > 15a \\ a < 0 \end{cases} \begin{cases} -\frac{2\sqrt{6}}{15} > a \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (0; -\frac{2\sqrt{6}}{15})$ где $a \geq 0$ аналог

$a \in (\frac{2\sqrt{6}}{15}; 0)$

~~$a \in (\frac{2\sqrt{6}}{15}; 0) \cup (0; -\frac{2\sqrt{6}}{15})$~~

Проверка с помощью ~~...~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a < 0$
 Там же рассмотрим граничные случаи
 (1) нае внешн и ω_1, ω_2
 Тогда $\frac{A_1 \theta_1}{A_2 \theta_2} = \frac{3z}{3} = \frac{0, \tau}{0, 2\tau}$, $\theta_1, \tau = t$

Тогда $\frac{2}{3} = \frac{4}{y+t} \Rightarrow 14 + 2t = 3t \Rightarrow t = 14$

$A_2 \tau = \sqrt{21^2 - 3^2} = \sqrt{441 - 9} = \sqrt{432} \Rightarrow t_9 < A_2 \theta_2 = \frac{3}{\sqrt{432}}$

аналог z для внутр-нае, и $\exists b$ когда a реш \Rightarrow

$$\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{1}{3a} < \frac{3}{\sqrt{432}} \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0 \\ -\sqrt{432} > 9a \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\frac{\sqrt{432}}{9}; 0 \right)$$

Сравним: $-\frac{2\sqrt{6}}{15} \stackrel{?}{>} -\frac{\sqrt{432}}{9}$

$\frac{2\sqrt{6}}{15} < \frac{\sqrt{432}}{9}$, тогда при $a < 0$

$\exists b$, когда первая часть имеет и реш при $a \in \left(-\frac{\sqrt{432}}{9}; 0 \right)$, аналог $a > 0$ $a \in \left(0; \frac{\sqrt{432}}{9} \right)$

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{432}}{9}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{432}}{9} \right)$

$\frac{\sqrt{432}}{9} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{9} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$ и все

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$NS \quad \log_3^4(6x) - 2 \log_{6x}^4 = \log_{36x^2}^4 \quad | \text{чз} - 4$$

$$с.ч. \quad 6x > 0, \quad 6x \neq 1 \rightarrow 36x^2 > 0, \quad 36x^2 \neq 1$$

$$I) \quad \log_3^4(6x) - \frac{2}{\log_3(6x)} = \frac{3}{2 \log_3(6x)} - 4$$

$$\frac{\log_3^5(6x) + 4 \log_3(6x) - \frac{7}{2}}{\log_3(6x)} = 0$$

$$II) \quad \log_3^4 y + 6 \log_3 y = \log_{y^2}^4(y^5) - 4 \quad \text{аналог } y > 0 \rightarrow y \neq 1 \rightarrow y^2 > 0, y^2 \neq 1$$
$$\log_3^4 y + \frac{6}{\log_3 y} = \frac{5}{2} \frac{\log_3^5 y}{\log_3 y} - 4$$

$$\frac{\log_3^5 y + 4 \log_3 y - \frac{7}{2}}{\log_3 y} = 0$$

$$\text{При } y < 1 \quad \log_3^5 y + 4 \log_3 y - \frac{7}{2} < 0$$

$$\text{При } y \geq 1 \quad \log_3^5 y + 4 \log_3 y - \frac{7}{2} \text{ гг на шосс одл оцел} \rightarrow$$

\Rightarrow не более 1-го реш.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{aligned} SL^2 &= SP \cdot SQ \\ MK^2 &= MQ \cdot MP \\ MK &= SP \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM = SL, \text{ т.к. } AL = AK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SA = AM = 10$$

$$\text{т.к. } AK = 6 \text{ см, } AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15,$$

$$S = \frac{h \cdot BC}{2} \Rightarrow h = 12 = AK$$

$$AK^2 = AA_1^2 - A_1K^2 \Rightarrow A_1K = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KB = 4$$

$$\cos \angle AA_1K = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$BM^2 = MA_1^2 = BA_1^2 - 2A_1M \cdot BA_1 \cdot \cos \angle MA_1B$$

$$BM^2 = 25 - 25 - 2 \cdot 25 \cdot \frac{3}{4} = 25 \left(-2 - \frac{3}{2} \right) = 25 \cdot \frac{1}{2}$$

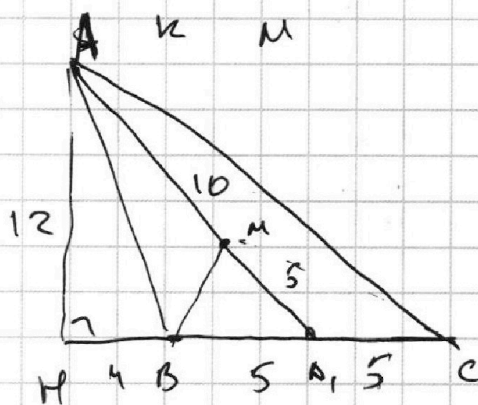
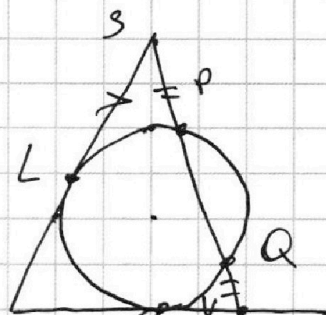
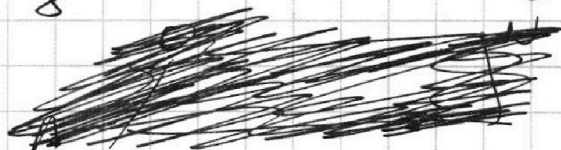
$$BM = 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2} BM = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$CM^2 = 25^2 - 25^2 + 2 \cdot 25 \cdot \frac{3}{4} = 25 \left(2 + \frac{3}{2} \right) = 25 \cdot \frac{7}{2}$$

$$CM = 5 \sqrt{\frac{7}{2}}; \quad CC_1 = \frac{3}{2} CM = \frac{15}{2} \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{15^3 \cdot \sqrt{7}}{8} = \frac{3445 \sqrt{7}}{8} \quad \text{Ответ: } \frac{3445 \sqrt{7}}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



б) Пусть O - центр сферы

\vec{KO}, \vec{NO} - векторы нормалей

к $(ABE), (SBE)$ соотв \Rightarrow

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle(S, (SBE)A) &= \\ &= \angle(NO, KO) \end{aligned}$$

$ON \perp (SBE) \Rightarrow ON \perp BE$
 $AK \perp BE$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ON \parallel AK \Rightarrow \angle(S, (SBE)A) &= \\ &= \angle(NO, KO) = \angle(AK, KO) \end{aligned}$$

$$SO = \sqrt{BN^2 + ON^2} = 5; \quad SL = \sqrt{SO^2 - OL^2} = 3 = KM \text{ к } (SBE)$$

Две прямые AK и KW и проб прямая AK , она пересеч. BE в W ,

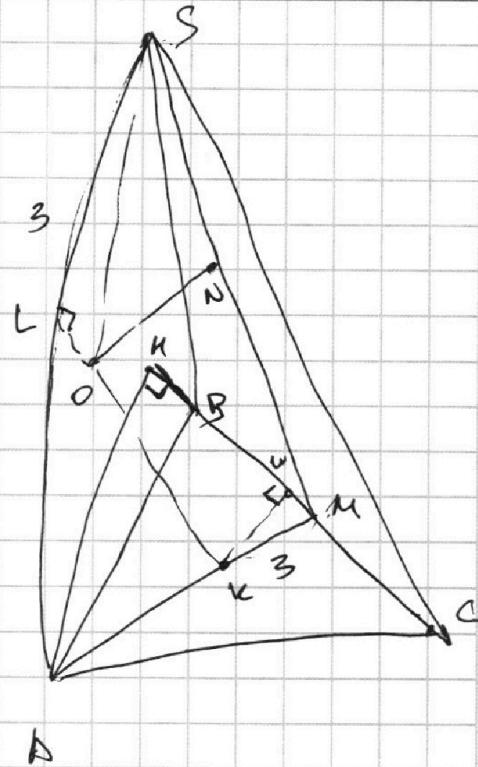
тогда AK и KW $\Rightarrow KW \perp BE \Rightarrow \angle(AK, KO) =$

$= \angle(KW, KO) = \angle OKW$, т.к. $OK \perp (ABE)$, тогда

$$\triangle OKM \sim \triangle KWM \Rightarrow WK = \frac{KM}{AM} \cdot AK = \frac{3}{15} \cdot 12 = \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned} OW &= \sqrt{OK^2 + KW^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \\ &= 4 \sqrt{1 + \frac{9}{25}} = 4 \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{24}{5}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 432 \\ 216 \\ 108 \\ 8 \\ 54 \\ 27 \end{array} \begin{array}{l} | 2 \\ | 2 \\ | 2 \\ \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) Пусть O - центр сферы
 \vec{KO} , \vec{NO} - векторы нормали

к (ABE) , (SBE) - сфера \rightarrow
 $\rightarrow \angle(S(BE)A) =$

$= \angle(NO; KO)$

в) Пусть O - ц. сферы

а) $AK \perp BC$
 $OK \perp (ABE) \rightarrow OK \perp BC$ по
 $\Delta \nabla \Pi$

б) $OK \perp BC$
 $ON \perp (SBE) \rightarrow NK \perp BC$ по
 $\Delta \nabla \Pi$

$\rightarrow \angle AKN = \angle S(BE)A$

$OK = SO = \sqrt{SN^2 + ON^2} = 5 \rightarrow OL = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

ΔOKA $AL = 4$, $KM = 3$; $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

$\rightarrow OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, т.к. $OK \perp BC$,

ΔOKM $OK = \sqrt{OM^2 - KM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

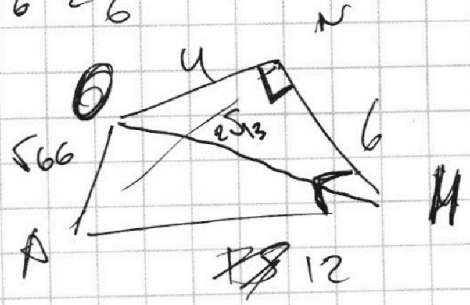
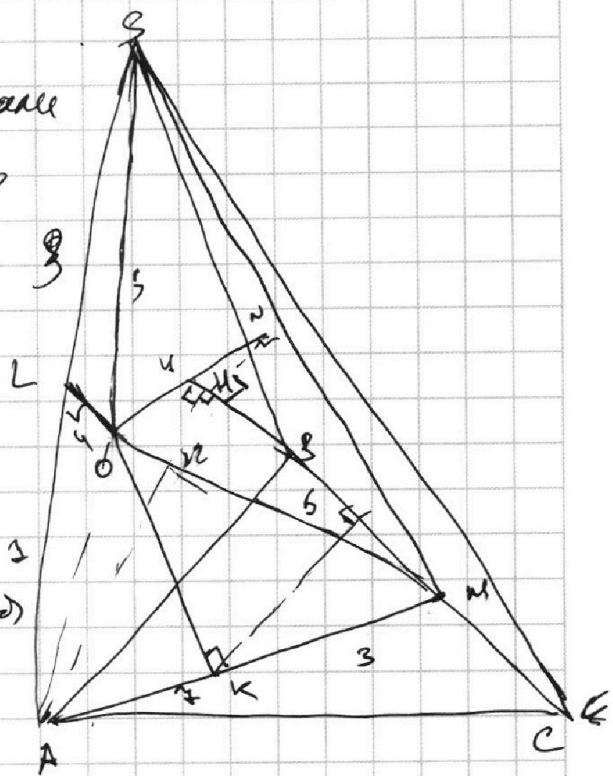
$= 5^2 - 5^2 = \sqrt{4 \cdot 13} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$; $NK =$

$= \sqrt{OK^2 - ON^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$

$ON \perp (SBE) \rightarrow ON \perp BC \rightarrow$

$AK \perp BC$

$\rightarrow ON \parallel AK \Rightarrow \angle AKN =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^{14}$, $bc: 2^{15} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$, $ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$\min(abc)?$ $abc: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

~~$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$~~

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$

$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$

$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 14$

$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$

$\beta_2 + \beta_3 \geq 15$

$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 18$

$\alpha_3 = \alpha_1 \geq 14$

$\beta_3 = \beta_1 \geq 17$

$\gamma_3 = \gamma_1 \geq 43$

$\frac{11}{12}$ $\frac{11}{3}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{8+13+14}{2} = 17.5$

$\frac{10}{32}$ $\frac{81}{243}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{16}{32}$ $\frac{81}{243}$

$c = 10$
 $b = 45$
 $a = 4$

$\frac{32}{243} + \frac{8}{3} = \frac{32 + 648}{243} = \frac{680}{243}$

$c = 10$
 $a = 4$
 $b = 65$

$\frac{680}{243}$ 43 $21,5$ $\frac{20}{6}$

$\frac{81}{648} = \frac{8}{648}$

$\frac{43}{14} = \frac{11}{2}$

28 20 $\frac{216}{4520}$

$S_{\text{area}}(\text{stux}) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$ $a = 14$

$S_{\text{area}}(\cos(\frac{3\sqrt{11}}{2} x + \frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2})) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$

$S_{\text{area}} 0 = \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{12286}{3125}$

$S_{\text{area}}(\cos(x - \frac{\sqrt{11}}{2})) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$

$5x - \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$

$4x = \frac{8\sqrt{11}}{2} \rightarrow x = \sqrt{11}$

$x - y = y^5 - x^5$

$x - y = (y - x)(y^4 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^4)$

$(y - x)(\dots + 1) = 0$

$(y - x)(y^4 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^4) + (y - x)$

$\log_3 y = \log_3 6x$

$y = 6x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \cos(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + x$$

$$x \in [0; \sqrt{2}] \Rightarrow x \in \left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\frac{5\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{10\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}$$

$$5 \cos\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + x$$

$$x - \frac{\sqrt{2}}{2} \in [0; \sqrt{2}]$$

$$x - \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$$

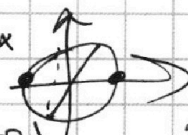
$$5x - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + x \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$x \in [0; \sqrt{2}]$$

$$-5x = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + x$$

$$-6x = -\sqrt{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{6}$$



$$5\left(2\sqrt{2} - x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + x$$

$$10\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} - 5x - \frac{3\sqrt{2}}{2} = x$$

$$11\sqrt{2} = 6x \Rightarrow x = \frac{11\sqrt{2}}{6}$$



$$x - \frac{\sqrt{2}}{2} \in [2\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$$

$$5\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\sqrt{2}}{2} - 10\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + x$$

$$4x = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

$$x = \frac{14\sqrt{2}}{4} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$10\sqrt{2} = 9\sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{6}$$

$$\alpha = 2\sqrt{2} - \alpha$$

$$\alpha = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{10\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{11\sqrt{2}}{6}$$

$$20\sqrt{2} = 9\sqrt{2} + 11\sqrt{2}$$

$$x \in [3\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$$

$$\alpha + 2\sqrt{2}; -\alpha; \alpha; 2\sqrt{2} - \alpha; \alpha - 2\sqrt{2}$$

$$5\left(4\sqrt{2} - x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + x$$

$$20\sqrt{2} - 5x + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + x$$

$$6x = 21\sqrt{2}$$

$$x = \frac{21\sqrt{2}}{6} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4(6x) - 2 \log_{36x} 3 = \log_{36x} 343 - 4$$

$$4 | \log_3(6x) | - 2 \log_{36x} 3 = \frac{3}{2} \log_{36x} 343 - 4$$

$$\frac{4}{|\log_{36x} 3|} = -\frac{4}{2} \log_{36x} 3 = -4$$

$$\frac{4}{2} \log_{36x} 3 - \frac{4}{|\log_{36x} 3|} = 4 \rightarrow \log_{36x} 3 = 0$$

$$\frac{4}{2} \log_{36x} 3 - \frac{4}{\log_{36x} 3} = 4$$

$$2 \log_{36x} 3 - \frac{8}{\log_{36x} 3} = 8$$

$$\frac{2 \log_{36x}^2 3 - 8 \log_{36x} 3 - 8}{\log_{36x} 3} = 0$$

$$8 - 56$$

$$y_1 = 4, y_2 = 4$$

$$\frac{2}{4} = 16 +$$

$$x^2 + 4x - \frac{7}{2}$$

$$x^2 + (4x) = \frac{7}{2}$$

$x, y \in \mathbb{R}$

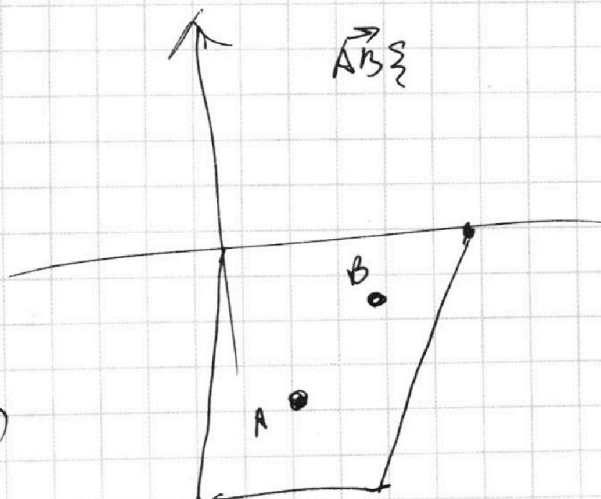
$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

$$4x_2 - 4x_1$$

$$+ y_2 - y_1 = 40$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$



$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

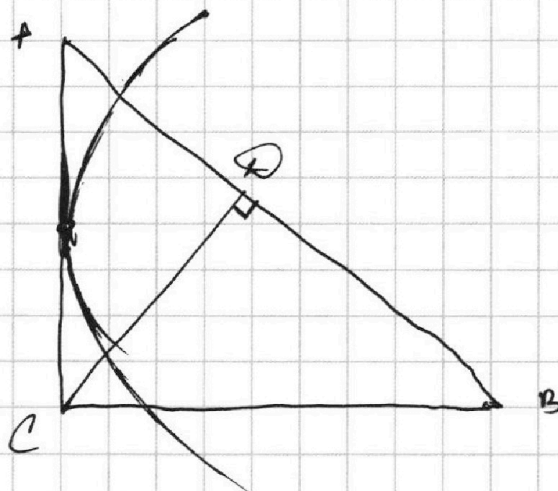
$$\log_3^4(6x) - 2 \operatorname{ctg} 6x^4 =$$

$$\downarrow 4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$\downarrow 5 - 2 = -\frac{3}{2} - 4t$$

$$\downarrow 5 - 4t = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow (\downarrow 4 - 4) = \frac{1}{2}$$

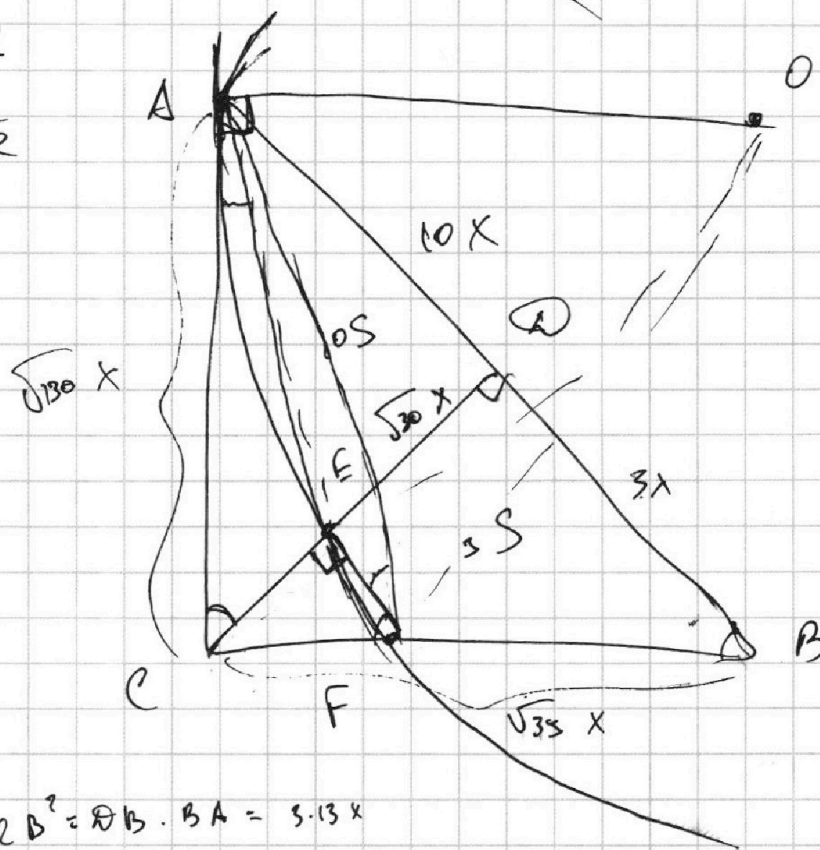


$AB \parallel EF$

AB:

S_{AOD}

S_{CEF}



$$EB^2 = EB \cdot BA = 5 \cdot 13x$$

$$\sqrt{35} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{10}{3\sqrt{3}} \quad 100$$

$$\frac{CB}{BD} = \frac{AB}{CB}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Ⓚ $x + 3ay - 7b = 0$

Ⓚ $(x^2 + (4x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9)) = 0$

$\log_3^4 y + \log_3^6 y = 2 \log_3^5 y - 4$

$\log_3^5 y + 4 \log_3^4 y = -\frac{5}{2} - 6 = -\frac{17}{2}$

$\log_3^4 6x - 2 \log_3^3 = \frac{3}{2}$

$(x^2 + 7)^2 + y^2 = 9$

$a \neq 0$

$3ay = 7b - x$

$y = \frac{7b - x}{3a}$

$5 + 4 = \frac{7}{2}$

216	6
-18	36
36	

$\log_7^5 a + \log_7^3 a - \frac{7}{2} = 0$

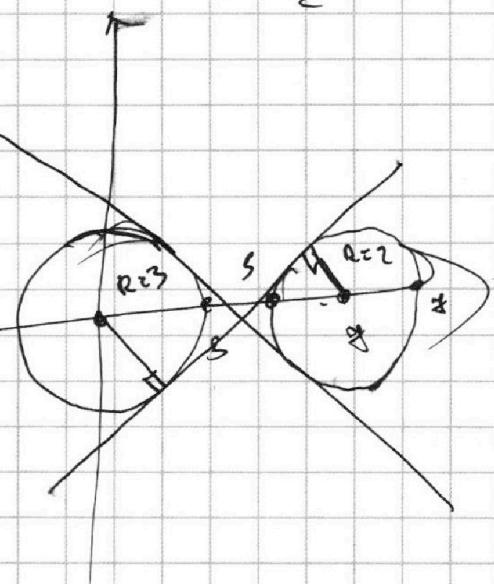
$\log_7^5 b + \log_7^3 b - \frac{7}{2} = 0$

$\log_7^5 a + \log_7^5 b + \log_7^3 a + \log_7^3 b - 7 = 0$

$\log_7^5 a + \log_7^3 a = \log_7^5 b + \log_7^3 b$

$\log_7^5 a - \log_7^3 b = \log_7^5 b - \log_7^3 a = \log_7^5$

$-2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$



$\frac{2}{3} = \frac{25}{9}$

$f(t) = 5t + 4t - \frac{7}{2} - 0$

$f' = 5t^4 + 4t^3$

$x^5 + y^5 + x + y - 7 = 0$

$(x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) - 225 = 216(-xy^3 + y^4)$

$\log_7^4(ab)$

$(x+y)(x^4 + x^3)$

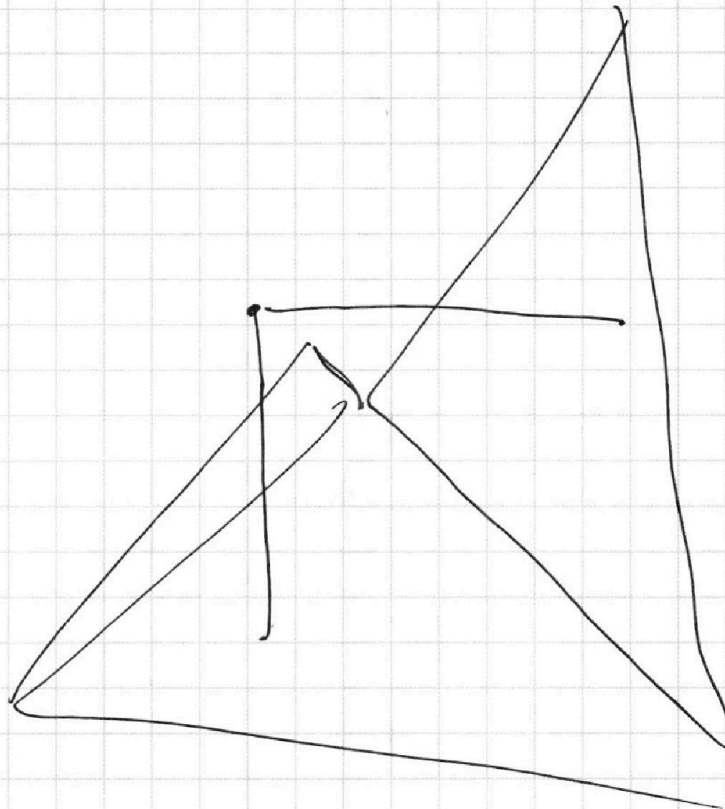
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



S

