



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- ✓ 3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- ✓ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ✓ 5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- ✓ 6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
- Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим за a_k - степень вхождения простого числа k в разложение числа a (аналогично и для других букв.). Тогда
 $\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ a_2 + c_2 \geq 14 \\ c_2 + a_2 \geq 19 \end{cases}$ (посуммировав тройки первых)

$$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ c_3 + a_3 \geq 18 \end{cases} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 10 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ c_5 + a_5 \geq 30 \end{cases} \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 26,8 \quad a_5 + c_5 \geq 30$$

Т.к. $a_k \in \mathbb{Z}$, получаем, что

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 21 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 30 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} (abc)_2 \geq 21 \\ (abc)_3 \geq 21 \\ (abc)_{15} \geq 30 \end{array} \right.$$

Т.р. $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ (и это значение достигается

при $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$; $b = 2^2 \cdot 3^3$; $c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{-13}$).

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

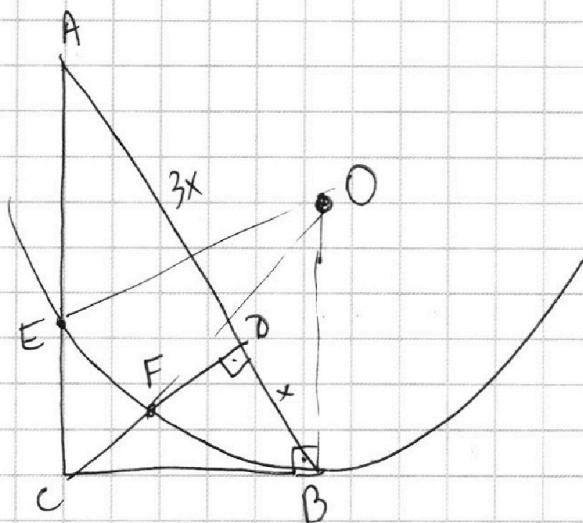
6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.



Пусть $AD = 3x$
 $DB = x$

$CD^2 = AD \cdot DB$ & тройчуг. \triangle

$$CD = \sqrt{3}x ; CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{3}x)^2} = 2x$$
$$\frac{AB}{BC} = 2 \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{11\pi}{2} \leq \arcsin \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin(\sin t) = t \text{ при } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq x < \pi : \arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-\pi \leq x < 0 : \arcsin(\cos(x + 2\pi)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - (x + 2\pi)\right)\right) = -\frac{3\pi}{2} - x$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi : \arcsin(\cos(2\pi - x)) = \frac{\pi}{2} - (2\pi - x) = -\frac{3\pi}{2} + x$$

$$-\pi \leq x < 0 : \arcsin(\cos(-x)) = \frac{\pi}{2} + x$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi : \arcsin(\cos(-2\pi - x)) = \frac{\pi}{2} + 2\pi + x = \frac{5\pi}{2} + x$$

Решим ур. по ветвям 5 случаям.

$$1) 5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}; \quad 2\pi = 6x; \quad x = \frac{\pi}{3} - \text{ногходит}$$

$$2) 5\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}; \quad -8\pi = 6x; \quad x = -\frac{4\pi}{3} - \text{ногходит}$$

$$3) 5\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = 8\pi; \quad x = 2\pi - \text{ногходит}$$

$$4) 5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = -2\pi; \quad x = -\frac{\pi}{2} - \text{ногходит}$$

$$5) 5\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = -12\pi; \quad x = -3\pi - \text{ногходит}$$

$$\text{Ответ: } x \in \{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4.

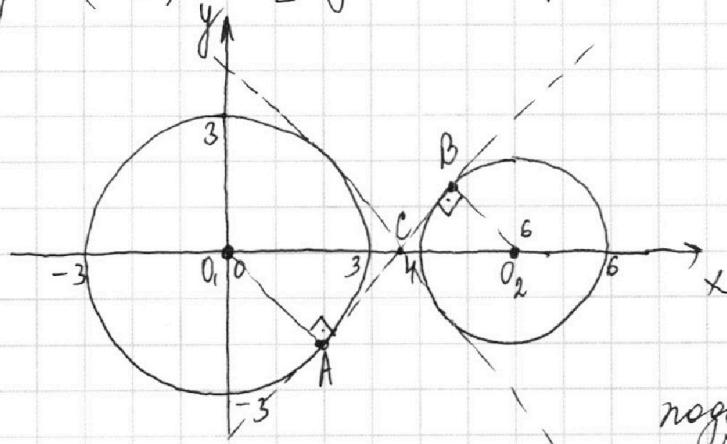
$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 3^2)((x-6)^2 + y^2 - 2^2) = 0 \end{cases}$$

Решением первого ур. является прямая $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$.

Решением второго ур. объединение 2 окружностей:

с центром $O_1(0; 0)$ и $R_1 = 3$ и с центром $O_2(6; 0)$ и $R_2 = 2$.

Найдём такие a , для которых найдётся b , чтобы
система имела 4 решения. Т.к. прямая пересекает
окружность не более, чем в двух точках и две
заданные окружности не пересекаются, прямая
 $y = f(\frac{a}{2})x + \frac{3b}{2}$ должна пересекать каждую из 2 окружностей.



Рассмотрим
крайние положения
прямой (с
наш. и нашими
условиями касир.)
Если угл. касир.
будет между край-
ними то можно будет
подобрать в чтобы было 4
точки пересечения

Проведём касательную с наиб. угл. к. (касание в т. А и В).
Пусть она пересекла ось ОХ в т. С. Тогда $\triangle ACO_1 \sim \triangle BC O_2$

(как приобр. по острому углу)

$$\text{Тогда } \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{2}, \quad O_1C + CO_2 = 6 \Rightarrow$$

$$CO_1 = \frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{18}{5}. \quad \text{Угл. касир. равен } \operatorname{tg} \angle BCO_2 = \operatorname{tg} \angle O_1CA = \frac{OA}{AC}$$

$$\text{По т. Пиф.: } AO_1^2 + AC^2 = O_1C^2 \Rightarrow AC = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 3^2} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \angle O_1CA = \frac{3}{\frac{3\sqrt{11}}{5}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}. \quad \text{Аналогично продолжаем с кас. с}$$

$$\text{нин угл. касир.: } -\frac{5\sqrt{11}}{11}. \quad \text{Итого, } -\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11}; \quad -\frac{10\sqrt{11}}{11} < a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}; \quad \log_{x^2} 243 = \log_{x^2}(3^5) = \frac{5}{2} \log_x(3) = \frac{5}{2 \log_3 x}$$
$$\log_{5y}(3) = \frac{1}{\log_3 5y}; \quad \log_{25y^2}(3) = \frac{1}{2} \log_{5y}(3) = \frac{1}{2 \log_3(5y)}$$

Пусть $\log_3 x = a$; ~~$\log_3(5y) = b$~~ . По условию

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$$

$$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{11}{2b} - 8$$

$$a^4 + \frac{7}{2a} = -8 \Rightarrow a < 0 \text{ (иначе } a^4 + \frac{7}{2a} > 0)$$

$$b^4 - \frac{7}{2b} = -8 \Rightarrow b > 0 \text{ (иначе } b^4 - \frac{7}{2b} < 0)$$

$$a^4 + \frac{7}{2a} = b^4 - \frac{7}{2b}$$

$$b^4 - a^4 = \frac{7}{2} \frac{a+b}{ab}; \quad (a+b) \left((b^2+a^2)(b-a) - \frac{7}{2ab} \right) = 0$$

т.к. $b^2+a^2>0$, $b-a>0$ и $ab<0$ ($-\frac{7}{2ab}>0$),
вторая скобка >0 $\Rightarrow a+b=0$

$$\log_3 x + \log_3(5y) = 0; \quad \log_3(5xy) = \log_3(1)$$

$$5xy = 1; \quad xy = \frac{1}{5}$$

$$\text{Одн. реш.: } \frac{1}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

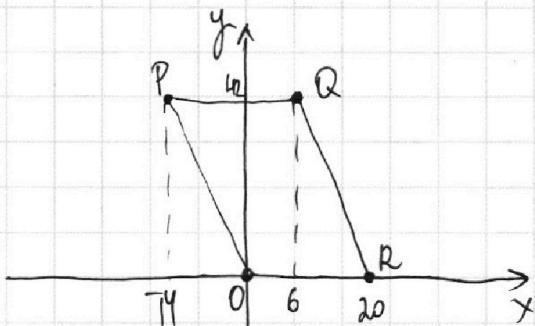
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N6

Причина Р6 задаётся ур.

$$y = -3x$$

QR пересекает ось ОУ
б. т. $20 \cdot 3 = 60$

(т.к. QR || OP и имеет
угл. коэф. -3).

Область внутри п-ма задаётся:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ -3x \leq y \leq 60 - 3x \end{cases}$$

Т.к. $0 \leq 3x + y \leq 60$

Найдем, сколько таких точек внутри п-ма таких, что
 $3x + y = n$, где $0 \leq n \leq 60$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Если $n \equiv 0 \pmod{3}$, то таких целых точек $\frac{42}{3} + 1 = 15$
(лежат на прямой $y = 0$, где $y \equiv 0 \pmod{3}$).

Если $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, то таких точек 14.

Теперь $(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$.

Если значение одной из скобок $\equiv 3$,
то и второе тоже (т.к. $33 \equiv 0 \pmod{3}$).
Таких пар значений 10 шт.

$33 \equiv 0$

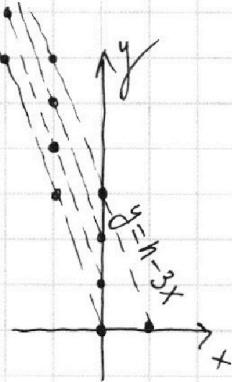
$36 \equiv 3$

$60 \equiv 0$

$63 \equiv 3$

Получаем, пар таких точек всего

$$15^2 \cdot 10$$



Если значения скобок не делются на ~~на~~ 3:

(Всего возможных пар значений $60 - 33 + 1 = 28$).

Значит, не дел. на 3 будет $28 - 10 = 18$.

Пар точек таких будет $18 \cdot 14^2$

Всего, $15^2 \cdot 10 + 18 \cdot 14^2 = 2250 + 3528 = 5778$

Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

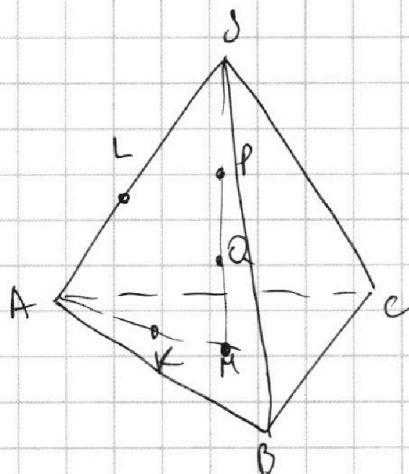
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input checked="" type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|

МФТИ

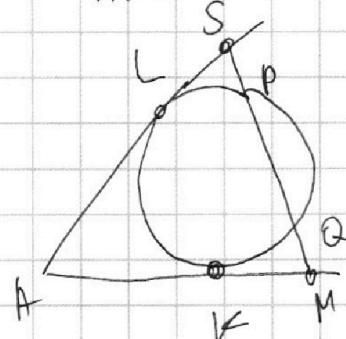
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7



Т. А, L, K, S, P, Q, M лежат
в одной пл., причем окр.
секущий сферу проходит
через Р и Q и кас.

AS \cap AM в т. L \cap K.



$$\begin{aligned} LS^2 &= SP \cdot SQ \\ KM^2 &= MQ \cdot MP \\ SP = QM &\Rightarrow \\ SQ = MP &\Rightarrow \\ LS = KM. \end{aligned}$$

$$AL = AK \Rightarrow AM = AS$$

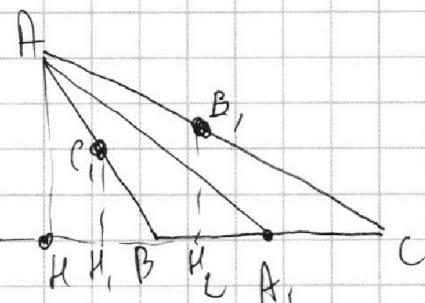
$$AM = \frac{2}{3}AA_1; AA_1 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 90$$

(H-осн. висота из H к BC)

$$AH = \frac{90}{6} = 15$$

$$\text{№ 7. Днр. } AH = \sqrt{18^2 - 15^2} = 3\sqrt{11}$$



Опустим перпендикульры С, H1, и B, H2 на BC.

$$B_1H_2 = CH_1 = \frac{AH}{2} = \frac{15}{2}, BH_2 = BH + HH_2 = \left(6 + 3\sqrt{11}\right) - 3\sqrt{11} = \frac{6 - 3\sqrt{11}}{2}$$

$$BB_1 = \sqrt{BH_2^2 + B_1H_2^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{6 - 3\sqrt{11}}{2}\right)^2}$$

$$CH_1 = CB + BH_1 = 12 + \frac{3\sqrt{11} - 6}{2} = \frac{18 + 3\sqrt{11}}{2}$$

$$CC_1 = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{18 + 3\sqrt{11}}{2}\right)^2}$$

$$A_1A \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2} \cdot \sqrt{15^2 + (18 + 3\sqrt{11})^2} =$$

$$= \frac{9}{2} \sqrt{225 + 36 - 36\sqrt{11} + 99} \cdot \sqrt{225 + 324 + 108\sqrt{11} + 99} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{2} \sqrt{360 - 36\sqrt{11}} \cdot \sqrt{648 + 108\sqrt{11}} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{36 \cdot 108} \cdot \\ &\cdot \sqrt{10 - \sqrt{11}} \sqrt{6 + \sqrt{11}} = \frac{9}{2} \cdot 36\sqrt{3} \sqrt{60 - 11 - 6\sqrt{11} + 10\sqrt{11}} = \\ &= 162\sqrt{3}\sqrt{49 + 4\sqrt{11}} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

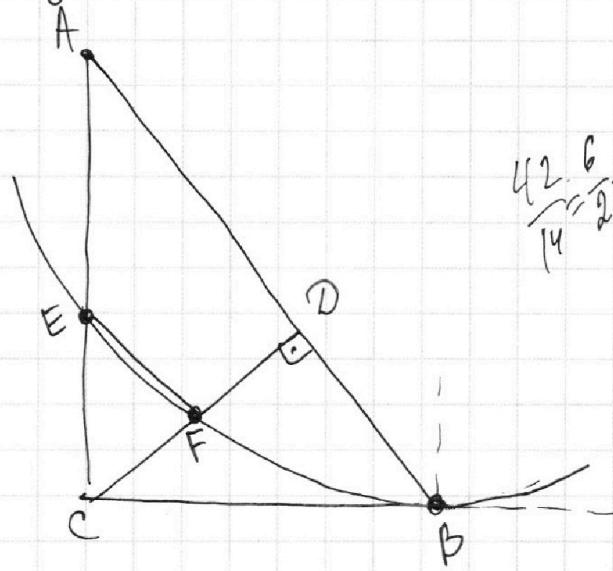
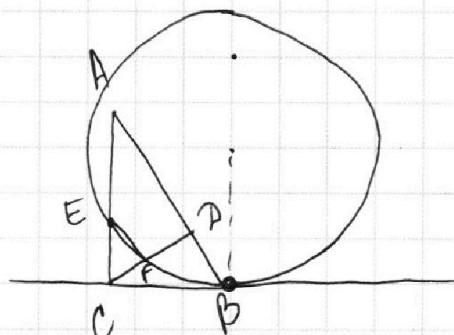
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

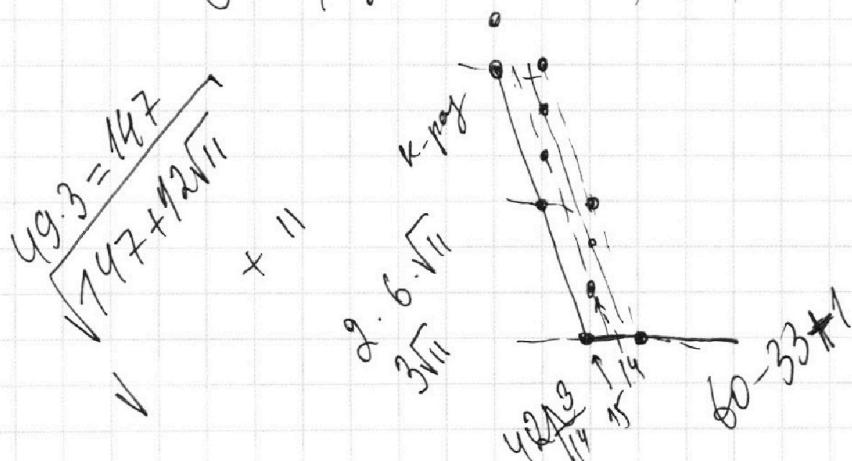
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + y = h, \text{ где } h = 0, \dots, 27, 33, \dots, 60$$



$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 42 - \frac{6}{3} = 36 \\ \frac{6}{3} = 2 \\ 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq 3x + y \leq 60 \\ 3x + y = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 42 - (3x + y) = 33 \\ (3x + y) - 0 = 33 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ 33 \downarrow 15 \downarrow 15 \\ 36 \downarrow 0 \\ 36 \downarrow 3 \\ : \\ 60 \downarrow 27 \\ 27 \downarrow 9 \\ 27 \downarrow 9 \\ 15 \downarrow 2 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 2250 + \\ \times 14 \\ \hline 14 = 196 \\ \times 18 \\ \hline 1568 \\ 196 \\ \hline 3528 \\ + 2250 \\ \hline 5778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +774 \\ \times 196 \\ \hline 17118 \\ 1568 \\ \hline 196 \\ \hline 3528 \\ \log_{x^2} 243 = \log_{x^2} 3^5 \end{array}$$

27

$$243 = 9^3 = 3^6$$

$$\begin{aligned} \log_3 x &= a \\ \log_3 3y &= b \end{aligned}$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_3 y - \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$6 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(\log_3 3y)^4 + \frac{2}{\log_3 3y} = \frac{11}{2} \frac{1}{\log_3 3y} - 8$$

$$2 - \frac{11}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = b^4 - \frac{7}{2b}$$

$$6 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a^4 + \frac{7}{2a} = b^4 - \frac{7}{2b}$$

$$a^4 + \frac{7}{2a} = b^4 - \frac{7}{2b}$$

$$b^4 - a^4 = \frac{7}{2} \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^4 + \frac{7}{2a} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2b} = -8 \end{array} \right.$$

$$(b^2 + a^2)(b-a)(b+a) = \frac{7}{2} \frac{a+b}{ab}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^4 - \frac{7}{2b} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2a} = -8 \end{array} \right.$$

$$a^4 - \frac{7}{2b} = -8$$

$$\log_3 (a+b) = 9$$

$$(b^2 + a^2)(b-a) ab = \frac{7}{2}$$

$$(a+b) \left((a^2 + b^2)(b-a) - \frac{7}{2ab} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$d \quad -\frac{\pi}{2} \leq d \leq \frac{\pi}{2}$

$$\sin d = \cos x$$

$$\frac{5\sqrt{11}}{108} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$
$$-\frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$$
$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$y^2 + (x^2 - 12x + 36) = 4$$

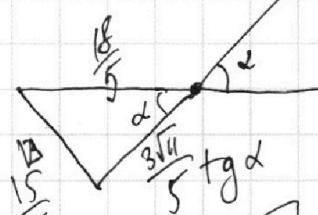
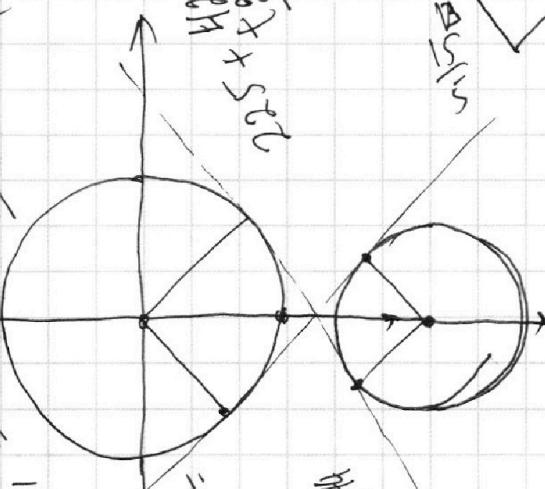
$$\frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{18}{5}$$

$$y = -ax + 36$$
$$225 + 135 =$$
$$= 360 + 99 + 108\sqrt{11}$$
$$= 459 + 108\sqrt{11}$$

$$15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2 = 15^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6\sqrt{11} + 9 \cdot 11$$

$$18 \cdot \frac{9}{2} \sqrt{15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2} \cdot \sqrt{(15^2 + (18 + 3\sqrt{11})^2} =$$
$$360 - 36\sqrt{11} \cdot \sqrt{648 + 108\sqrt{11}} =$$

$$925 + 36 + 99 - 36\sqrt{11} =$$
$$= 6 \cdot \sqrt{108\sqrt{11} + 10\sqrt{11}} =$$
$$= 60\sqrt{3}\sqrt{3} =$$



$$\sqrt{18^2 - 15^2} = 3\sqrt{11}$$

$$\sqrt{18^2 - 15^2} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{3\sqrt{11}}{5} =$$

$$\frac{10\sqrt{11}}{11}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2, a_3, a_5 \\ b_2, b_3, b_5$$

$$c_2, c_3, c_5$$

$$abc : \begin{pmatrix} 2^{19} & 3^{18} & 5^{30} \end{pmatrix}$$

$$\frac{a_2 + b_2}{2} \geq g$$

$$a_2 + c_2 \geq 14$$

$$a_2 + c_2 \geq 19$$

$$a_2 c_2 = 12$$

$$a_2 = 7$$

$$b_2 = 2$$

$$10 + 13 + 18 =$$

$$= 30 + 11 = 41$$

$$20,5$$

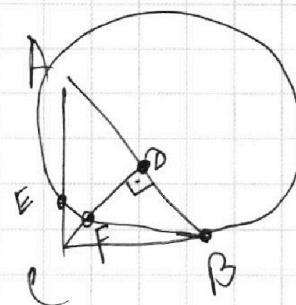
$$40 + 13 = 53$$

$$26,5$$

$$(abc)_2 \geq 21$$

$$(abc)_3 \geq 21$$

$$(abc)_5 \geq 27$$



$$+1 \\ 19 + 9 = 28 \\ \hline 42$$

$$23 + 19 = \\ = 29 + 20$$

$$c_2 = 11$$

$$a_2 = 7$$

$$b_2 = 2$$

$$c_3 = 10$$

$$a_3 = 8$$

$$b_3 = 3$$

$$a_5 c_5 = 17 \times 13$$

$$a_5 = 17$$

$$b_5 = 0$$



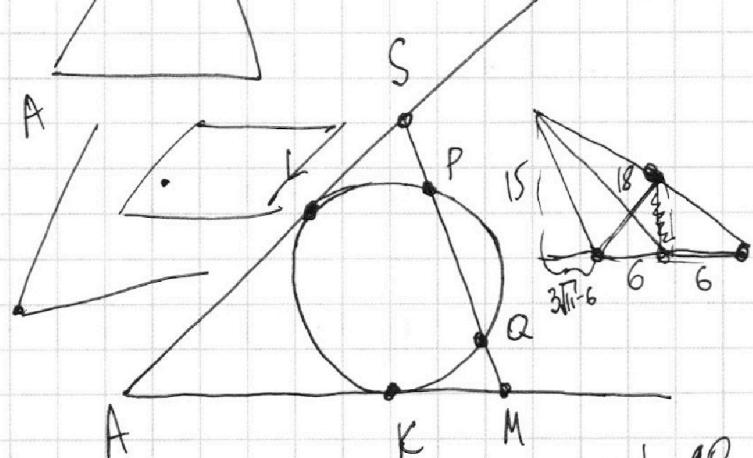
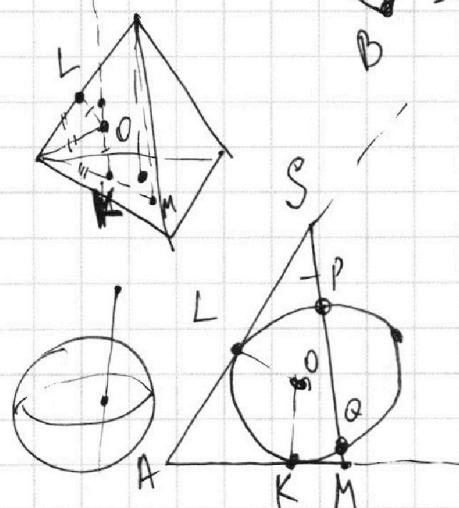
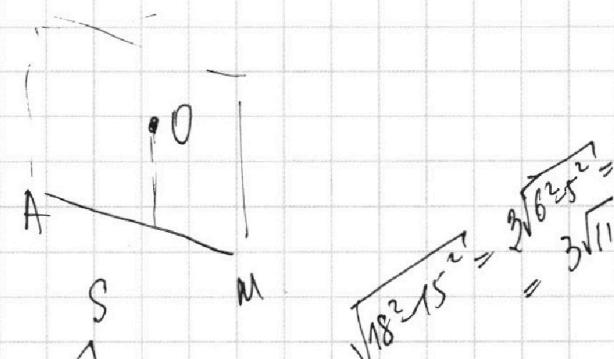
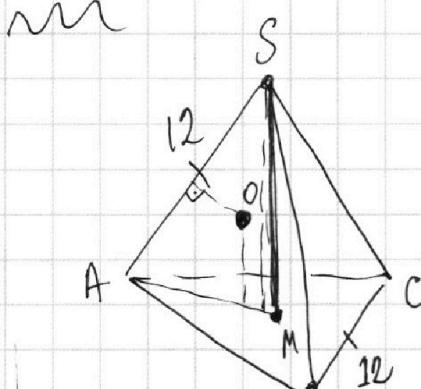
На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

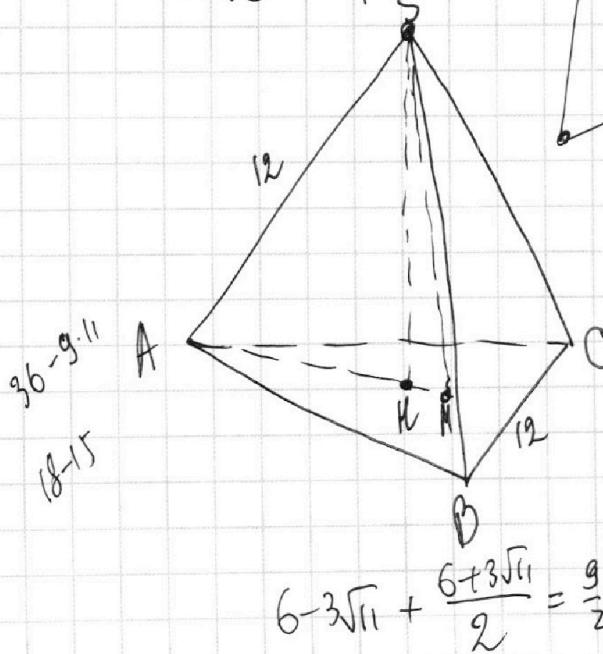
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



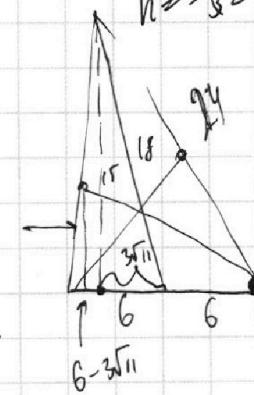
$$S_{ABC} = 90; S_S =$$



$$AM = 12$$

$$AA_1 = 18$$

$$\begin{aligned} &6 \cdot h = 90 \\ &\frac{8 \cdot 30}{h} = 15 \end{aligned}$$



$$6 + 3\sqrt{11} + \frac{6 - 3\sqrt{11}}{2} =$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{8\sqrt{11}}{2} + \frac{3\sqrt{11}}{2} = \\ &\frac{9 + 3\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



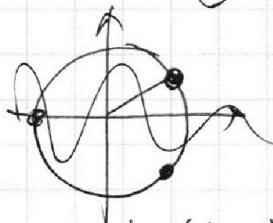
- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}; \quad -3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin(\cos(x)) = \sqrt{1-x^2} \text{ при } -$$



$$-\pi < \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{\pi}{2} < -x < 0$$
$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq x \leq \pi \quad \arcsin(\cos(x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-\pi \leq x \leq -\pi \quad \arcsin(\cos(x+2\pi)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - (x+2\pi))) = -\frac{3\pi}{2} - x$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi \quad \arcsin(\cos(x)) = \arcsin(\cos(\pi - x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \pi + x)) = -\frac{3\pi}{2} + x$$

$$-\pi \leq x \leq 0 \quad \arcsin(\cos(\pi - x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \frac{\pi}{2} + x$$

$$-\pi \leq x \leq 0 \quad \arcsin(\cos(-\pi - x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + \pi + x)) = x + \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

cos⁻¹
arc

$$2\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} = -\pi$$

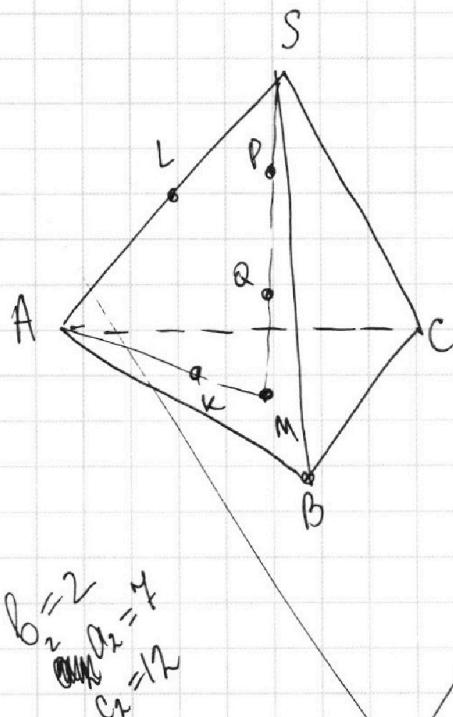
$$4x = \frac{\pi}{2} - \frac{25\pi}{2} = -\frac{15\pi}{2} \quad -5x = x + \frac{\pi}{2}$$
$$= -12\pi \quad -8x = 6x \quad \frac{\pi}{2} + \frac{15\pi}{2} = 8\pi$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



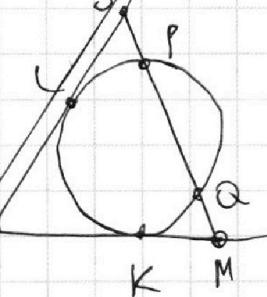
N7

T. A, L, K, S, P, Q, M лежат в одной
плоскости, причем
окружность с центром
проходит через P и Q и
две прямые AS и AM в точках K и L.

$$LS^2 = SP \cdot SQ$$

$$KM^2 = MQ \cdot MP$$

T. K, SP = QM, TO и
 $SQ = MP \Rightarrow$
 $LS = KM$.



~~$AL = AK \Rightarrow AM = AS$~~

~~$AM = \frac{2}{3}AA_1 \Rightarrow AA_1 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18$~~

~~$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = 90$
(1/2-осн. биссектриса из А для BC)~~

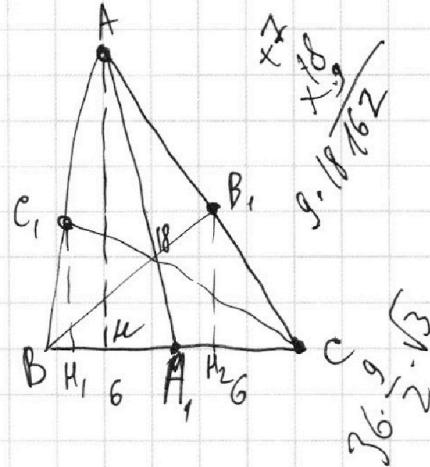
~~$\rightarrow AH = \frac{90}{\frac{1}{2} \cdot 18} = 15$~~

~~$\Rightarrow \text{по Т. Пифагора } AH = \sqrt{18^2 - 15^2} = 3\sqrt{11}$~~

Опустим перпендикульры C_1H_1 и B_1H_2 на BC.

~~$B_1H_2 = C_1H_1 = \frac{AH}{2} = \frac{15}{2}$; $BH_2 = BH + HH_2 = BH + \frac{HC}{2} = \frac{9}{2} = 9\sqrt{\frac{3}{2}}$~~

~~$= 6 - 3\sqrt{11}$~~



~~$\begin{array}{l} 3528 \\ \times 9250 \\ \hline 5778 \\ 295 + 99 = 324 \\ \hline 1816 \\ \times 60 + 48 \\ \hline 108 \end{array}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

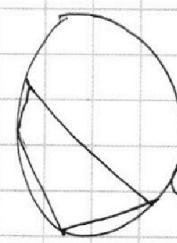
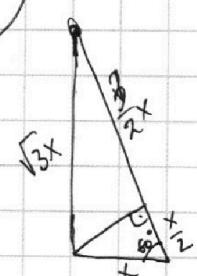
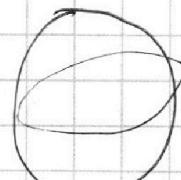
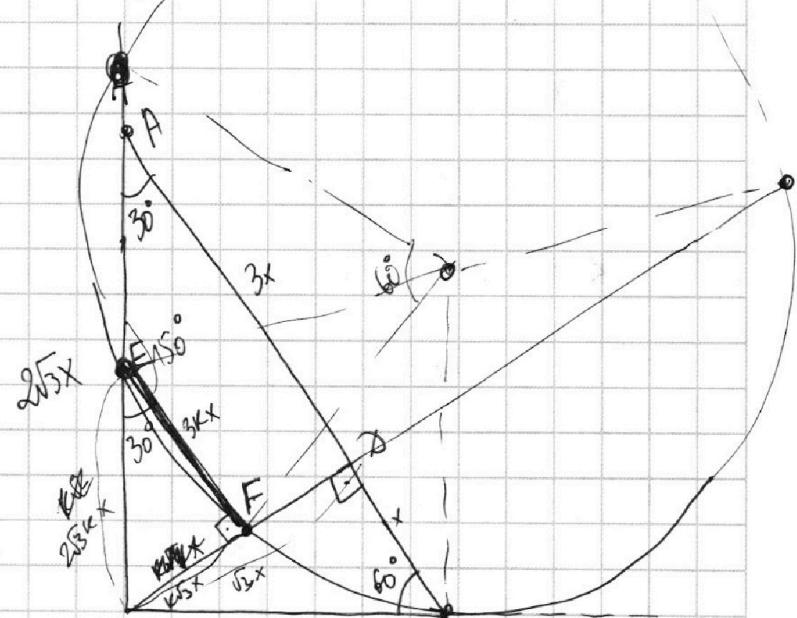
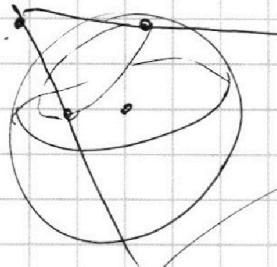
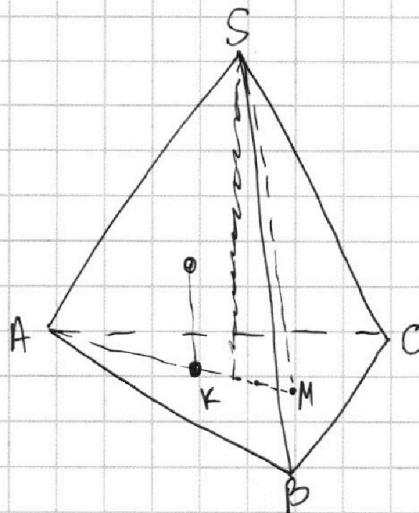
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7.



$$g + g = 2\sqrt{3}$$

$$(2x)^2$$

$$(2x)^2 = 2x^2 \Rightarrow S''$$

$$90^\circ \cdot 3 = 30^\circ$$

