МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Обозначим за $a_k$ – степень вхождения простого числа $k$ в разложение числа $a$ (аналогично и для других букв). Тогда (просуммировав тройки неравенств)

$$\begin{cases} a_2+b_2 \geqslant 9 \\ b_2+c_2 \geqslant 14 \\ c_2+a_2 \geqslant 19 \\ a_3+b_3 \geqslant 10 \\ b_3+c_3 \geqslant 13 \\ c_3+a_3 \geqslant 18 \\ a_5+b_5 \geqslant 10 \\ b_5+c_5 \geqslant 13 \\ c_5+a_5 \geqslant 30 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_2+b_2+c_2 \geqslant 21$

$\Rightarrow a_3+b_3+c_3 \geqslant 20{,}5$

$\Rightarrow a_5+b_5+c_5 \geqslant \cancel{26{,}5}\ a_5+c_5 \geqslant 30$

Т.к. $a_k \in \mathbb{Z}$, получаем, что

$$\begin{cases} a_2+b_2+c_2 \geqslant 21 \\ a_3+b_3+c_3 \geqslant 21 \\ a_5+b_5+c_5 \geqslant 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} (abc)_2 \geqslant 21 \\ (abc)_3 \geqslant 21 \\ (abc)_5 \geqslant 30 \end{cases}$$

Т.е. $abc \geqslant 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$ (и это значение достигается при $a = 2^7\cdot 3^8\cdot 5^{17}$; $b = 2^2\cdot 3^3$; $c = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^{13}$).

Ответ: $2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

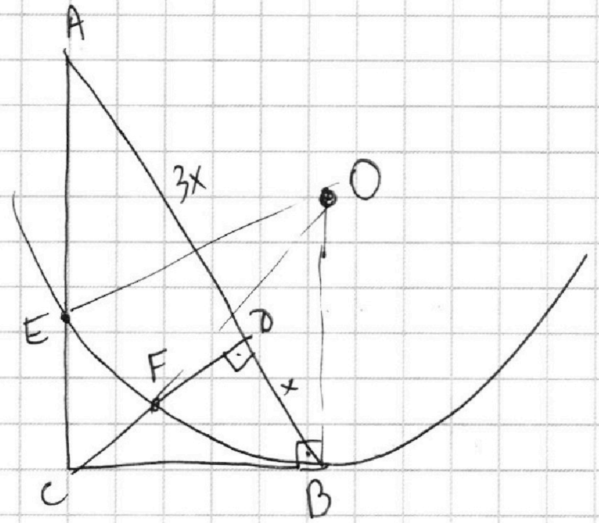
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3.




Пусть $AD = 3X$
$DB = X$

$CD^2 = AD \cdot DB$ в прямоуг. $\Delta$

$CD = \sqrt{3}X$ ; $CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{X^2 + (\sqrt{3}X)^2} = 2X$

$\frac{AB}{BC} = 2 \Rightarrow \angle ABC = 60°$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$

$-3\pi \le x \le 2\pi$

$\arcsin(\sin t) = t$ при $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le x < \pi$: $\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$

$-2\pi \le x < -\pi$: $\arcsin(\cos(x + 2\pi)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - (x + 2\pi)\right)\right) = -\frac{3\pi}{2} - x$

$\pi \le x \le 2\pi$: $\arcsin(\cos(2\pi - x)) = \frac{\pi}{2} - (2\pi - x) = -\frac{3\pi}{2} + x$

$-\pi \le x < 0$: $\arcsin(\cos(-x)) = \frac{\pi}{2} + x$

$-3\pi \le x < -2\pi$: $\arcsin(\cos(-2\pi - x)) = \frac{\pi}{2} + 2\pi + x = \frac{5\pi}{2} + x$

Решим ур. во всех 5 случаях.

1) $5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$; $2\pi = 6x$; $x = \frac{\pi}{3}$ — подходит

2) $5\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$; $-8\pi = 6x$; $x = -\frac{4}{3}\pi$ — подходит

3) $5\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$; $4x = 8\pi$; $x = 2\pi$ — подходит

4) $5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$; $4x = -2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2}$ — подходит

5) $5\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$; $4x = -12\pi$; $x = -3\pi$ — подходит

Ответ: $x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4.

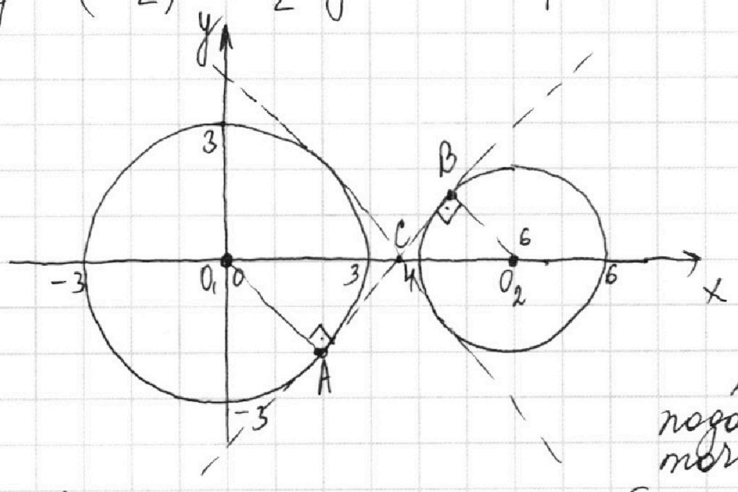
$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-3^2)\left((x-6)^2+y^2-2^2\right)=0 \end{cases}$$

Решением первого ур. является прямая $y=-\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}$.

Решением второго явл. объединение 2 окружностей:

с центром $O_1(0;0)$ и $R_1=3$ и с центром $O_2(6;0)$ и $R_2=2$.

Найдем такие $a$, для которых найдется $b$, чтобы сист. имела 4 решения. Т.к. прямая пересекает окружность не более, чем в двух точках и две заданные окружности не пересекаются, прямая $y=\left(-\frac{a}{2}\right)x+\frac{3b}{2}$ должна пересекать каждую в 2 точках.




Рассмотрим крайние положения прямой (с наиб. и наим. угловым коэф.) Если угл. коэф. будет между крайними, то можно будет подобрать $b$, чтобы было 4 точки пересечения

Проведем касательную с наиб. угл. к. (касание в т. $A$ и $B$). Пусть она пересекла ось $OX$ в т. $C$. Тогда $\triangle ACO_1 \sim \triangle BCO_2$ (как прямоуг. по острому углу)

Тогда $\frac{O_1C}{O_2C}=\frac{O_1A}{BO_2}=\frac{3}{2}$, $O_1C+CO_2=6$ $\Rightarrow$

$CO_1=\frac{3}{5}\cdot 6=\frac{18}{5}$. Угл. коэф. равен $tg\angle BCO_2=tg\angle O_1CA=\frac{O_1A}{AC}$

По т. Пиф: $AO_1^2+AC^2=O_1C^2 \Rightarrow AC=\sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2-3^2}=\frac{3\sqrt{11}}{5}$

$tg\angle O_1CA=\frac{3}{\frac{3\sqrt{11}}{5}}=\frac{5\sqrt{11}}{11}$. Аналогично проделываем с как. с min угл. коэф.: $-\frac{5\sqrt{11}}{11}$. Итого, $-\frac{5\sqrt{11}}{11}<-\frac{a}{2}<\frac{5\sqrt{11}}{11}$; $-\frac{10\sqrt{11}}{11}<a<\frac{10\sqrt{11}}{11}$

Ответ: $a\in\left(-\frac{10\sqrt{11}}{11};\frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$.

№5

$\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$ ; $\log_{x^2} 243 = \log_{x^2}(3^5) = \frac{5}{2}\log_x(3) = \frac{5}{2\log_3 x}$

$\log_{5y}(3) = \frac{1}{\log_3 5y}$ ; $\log_{25y^2}(3^{11}) = \frac{11}{2}\log_{5y}(3) = \frac{11}{2\log_3(5y)}$

Пусть $\log_3 x = a$ ; $\log_3(5y) = b$. По условию

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{7}{2a} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2b} = -8 \end{cases}$$

$\Rightarrow a < 0$ (иначе $a^4 + \frac{7}{2a} > 0$)

$\Rightarrow b > 0$ (иначе $b^4 - \frac{7}{2b} < 0$).

$a^4 + \frac{7}{2a} = b^4 - \frac{7}{2b}$

$b^4 - a^4 = \frac{7}{2}\frac{a+b}{ab}$ ; $(a+b)\left((b^2+a^2)(b-a) - \frac{7}{2ab}\right) = 0$

Т.к. $b^2+a^2>0$, $b-a>0$ и $ab<0$ $\left(-\frac{7}{2ab}>0\right)$, вторая скобочка $>0$ $\Rightarrow a+b=0$

$\log_3 x + \log_3(5y) = 0$ ; $\log_3(5xy) = \log_3(1)$

$5xy = 1$ ; $xy = \frac{1}{5}$

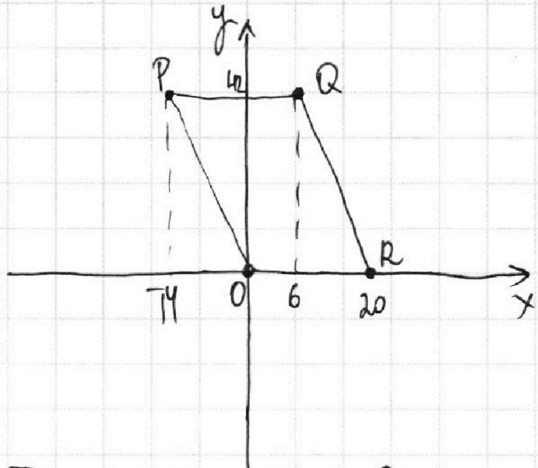
Ответ: $\frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

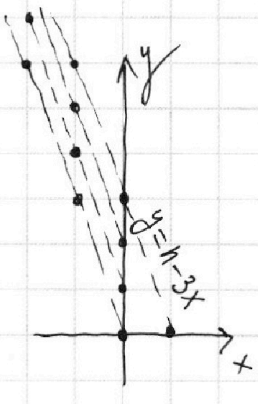



Прямая PO задаётся ур. $y = -3x$.
QR пересекает ось OY в т. $20 \cdot 3 = 60$
(т.к. $QR \parallel OP$ и имеет угл. коэф. $-3$).
Область внутри п-ма задаётся:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 42 \\ -3x \le y \le 60 - 3x \end{cases}$$

Т.к. $0 \le 3x + y \le 60$
Найдем, сколько точек внутри п-ма таких, что
$3x + y = n$, где $0 \le n \le 60$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Если $n \,\vdots\, 3$, то таких целых точек $\frac{42}{3} + 1 = 15$
(лежат на прямой $\parallel OP$, где $y \,\vdots\, 3$).
Если $n \not\vdots\, 3$, то таких точек 14.




Теперь $(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$.

Если значение одной из скобочек $\vdots\, 3$,
то и второе тоже (т.к. $33 \,\vdots\, 3$).
Таких пар значений 10 шт.

33 и 0
36 и 3
⋮
60 и 27

Получается, пар таких точек всего
$15^2 \cdot 10$

Если значения скобочек не делятся на 3:
(Всего возм. пар значений $60 - 33 + 1 = 28$).
Значит, не дел. на 3 будет $28 - 10 = 18$.
Пар точек таких будет $18 \cdot 14^2$

Всего, $15^2 \cdot 10 + 18 \cdot 14^2 = 2250 + 3528 = 5778$

Ответ: 5778

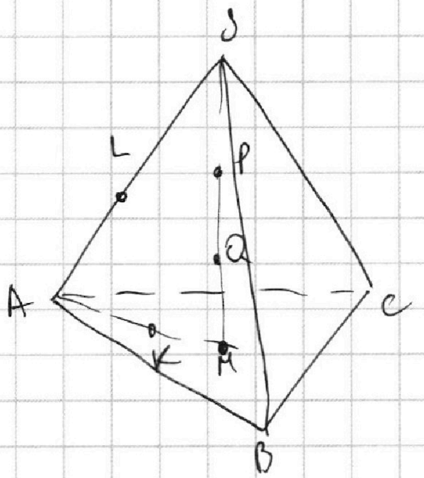
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 [x]

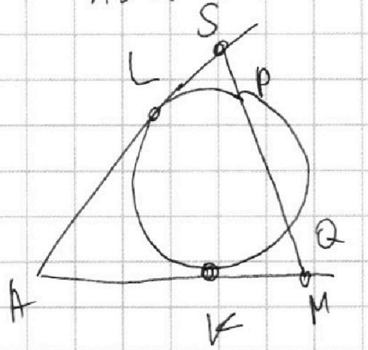
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7



Т. A, L, K, S, P, Q, M лежат в одной пл., причем окр. сечения сферы проходит через P и Q и кас. AS и AM в т. L и K.



$LS^2 = SP \cdot SQ$
$KM^2 = MQ \cdot MP$
$SP = QM \Rightarrow$
$SQ = MP \Rightarrow$
$LS = KM.$

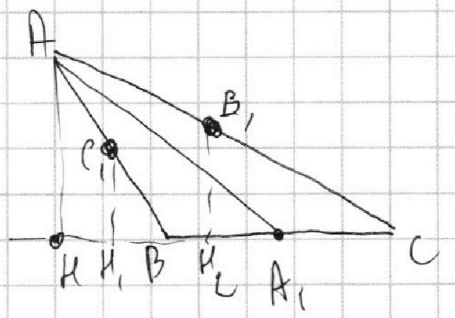
$AL = AK \Rightarrow AM = AS$

$AM = \frac{2}{3} AA_1; \quad AA_1 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 90^\circ$
(H – осн. высоты из H на BC)

$AH = \frac{90}{6} = 15$

По т. Пиф. $A_1H = \sqrt{18^2 - 15^2} = 3\sqrt{11}$



Опустим пер-ры $C_1H_1$ и $B_1H_2$ на BC.

$B_1H_2 = C_1H_1 = \frac{AH}{2} = \frac{15}{2}; \quad BH_2 = BH + HH_2 = \left(\frac{6 + 3\sqrt{11}}{2}\right) - 3\sqrt{11} = \frac{6 - 3\sqrt{11}}{2}$

$BB_1 = \sqrt{BH_2^2 + B_1H_2^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{6 - 3\sqrt{11}}{2}\right)^2}$

$CH_1 = CB + BH_1 = 12 + \frac{3\sqrt{11} - 6}{2} = \frac{18 + 3\sqrt{11}}{2}$

$CC_1 = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{18 + 3\sqrt{11}}{2}\right)^2}$

$A_1A \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2} \cdot \sqrt{15^2 + (18 + 3\sqrt{11})^2} =$

$= \frac{9}{2} \sqrt{225 + 36 - 36\sqrt{11} + 99} \cdot \sqrt{225 + 324 + 108\sqrt{11} + 99} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$= \frac{9}{2}\sqrt{360 - 36\sqrt{11}}\cdot\sqrt{648 + 108\sqrt{11}} = \frac{9}{2}\cdot\sqrt{36\cdot 108}\cdot$$

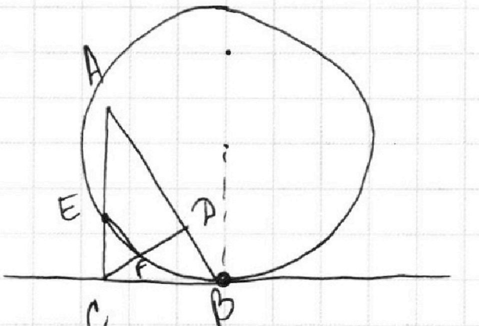
$$\cdot\sqrt{10-\sqrt{11}}\sqrt{6+\sqrt{11}} = \frac{9}{2}\cdot 36\sqrt{3}\sqrt{60-11-6\sqrt{11}+10\sqrt{11}} =$$

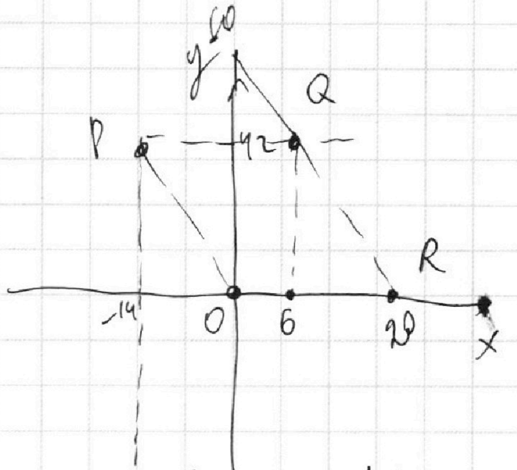
$$= 162\sqrt{3}\sqrt{49+4\sqrt{11}}$$

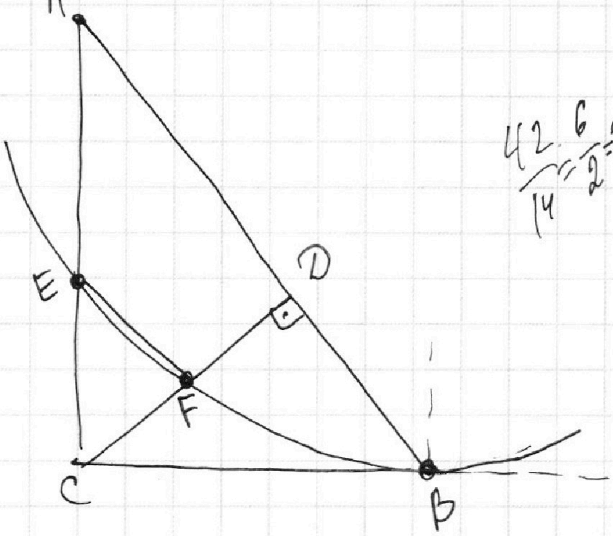
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!




$$\begin{cases} 0 \le y \le 42 \\ -3x \le y \le 60 - 3x \end{cases}$$

$\frac{42}{14} = \frac{6}{2} = 3$

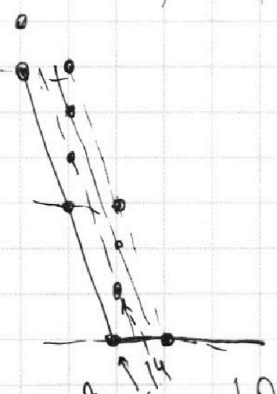
$$\begin{cases} 0 \le 3x + y \le 60 \\ 0 \le y \le 42 \end{cases}$$

$(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$

$33 - 0 = 33$

$60 - 27 = 33$

$3x + y = h$, где $h = 0, \dots, 27, 33, \dots, 60$




$\frac{49 \cdot 3 = 147}{\sqrt{147 + 42\sqrt{11}}}$

$\times 11$

$2 \cdot 6 \cdot \sqrt{11}$

$3\sqrt{11}$

$60 - 33 + 1$

60

33 4 0 (15)

36 4 3

⋮

60 4 27

27 0 … 9

$15^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2250 +

$14^2 = 196$

$\times 118$

1568

196

3528

$+ 2250$

5778

$\times 196$

$118$

1568

196

3528

27

$\log_x 243 = \log_{x^2} 3^5$

$243 = 9^3 = 3^6$

$\log_3 x = a$

$\log_3 5y = b$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\frac{1}{\log_3 x} - 8$

$6 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

$(\log_3 5y)^4 + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2}\frac{1}{\log_3 5y} - 8$

$2 - \frac{11}{2} =$

$\frac{12}{2} - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$

$\cancel{a^4 + \frac{3}{a} = b^4}$

$a^4 + \frac{7}{2a} = b^4 - \frac{7}{2b}$

$a<0, b>0$

$\cancel{a^4 - b^4 = \frac{7}{2}}$

$b^4 - a^4 = \frac{7}{2}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

$\begin{cases} a^4 + \frac{7}{2a} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2b} = -8 \end{cases}$

$a+b-?$

$(b^2+a^2)(b+a)(b-a) = \frac{7}{2}\frac{a+b}{ab}$

$\log_3 a+b = 9$

$(b^2+a^2)(b-a)\,ab = \frac{7}{2}$

$(a+b)\left((a^2+b^2)(b-a) - \frac{7}{2ab}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5. $\underbrace{\arcsin(\cos x)}_{\alpha} = x + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$\sin\alpha = \cos x$

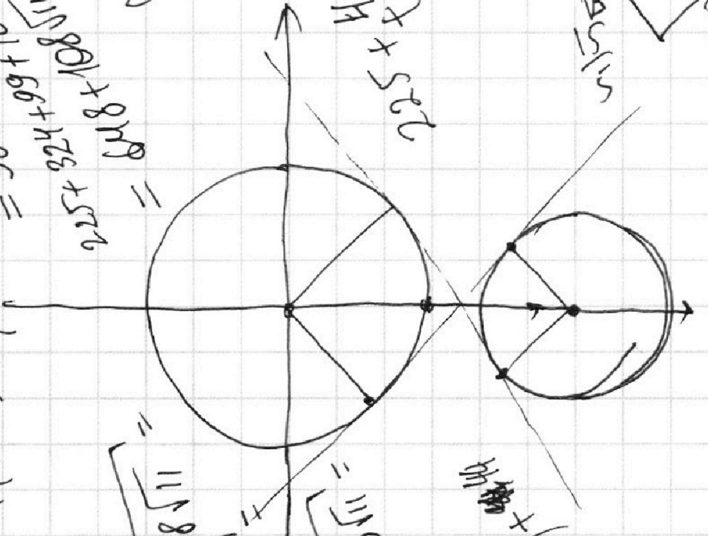
$-\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$

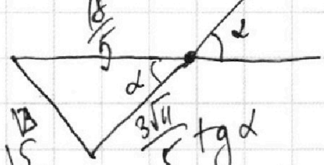
$-3\pi \le x \le 2\pi$

$y^2 + (x^2 - 12x + 36) - 4$

$y = -\frac{ax+3b}{2}$

$2\cdot3\cdot18 = 6\cdot18$





$\frac{3}{5}\cdot6 = \frac{18}{5}$

$\frac{18}{5}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{3\sqrt{11}}{5}$ tg $\alpha$

$\sqrt{18^2-15^2} = 3\sqrt{6^2-5^2} = 3\sqrt{11}$

$\sqrt{\frac{18^2-15^2}{5^2}} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$

$\frac{3\cdot5}{3\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

$\frac{10\sqrt{11}}{11}$

$15^2 + (6-3\sqrt{11})^2 = 15^2 + 6^2 - 2\cdot3\cdot6\sqrt{11} + 9\cdot11$

$\frac{9}{2}\sqrt{15^2+(6-3\sqrt{11})^2}\cdot\sqrt{15^2+(18+3\sqrt{11})^2} =$

$225+135 = 360$

$225+324+99+108\sqrt{11} = 648+108\sqrt{11}$

$225+36+99-36\sqrt{11} = \sqrt{360-36\sqrt{11}}\cdot\sqrt{648+108\sqrt{11}} = 6\cdot\sqrt{108}\sqrt{10-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}} = 36\sqrt{3}\sqrt{60+10\sqrt{11}-6\sqrt{11}-11} = 36\sqrt{3}\cdot\sqrt{49+4\sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

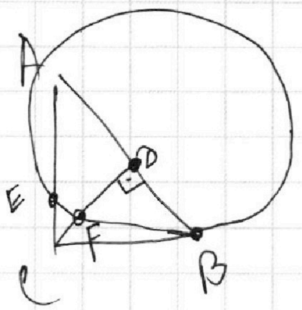
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a_2, a_3, a_5$
$b_2, b_3, b_5$
$c_2, c_3, c_5$

$abc : (2^{19} 3^{18} 5^{30})$



$a_2 + b_2 \geq 9$

$a_2 + c_2 \geq 14$ $\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$

$a_2 + c_2 \geq 19$

$19+9 = 28$, $+1$, $+14$, $42$

$c_2 = 12$

$a_2 = 7$

$b_2 = 2$

$23+19 =$
$= 22 + 20$

$10+13+18 =$
$= 30+11 = 41$
$20,5$

$c_2 = 11$
$a_2 = 7$
$b_2 = 2$

$c_3 = 10$
$a_3 = 8$
$b_3 = 3$

$c_5 = 13$
$a_5 = 17$
$b_5 = 0$

$40+13 = 53$
$26,5$

$(abc)_2 \geq 21$

$(abc)_3 \geq 21$

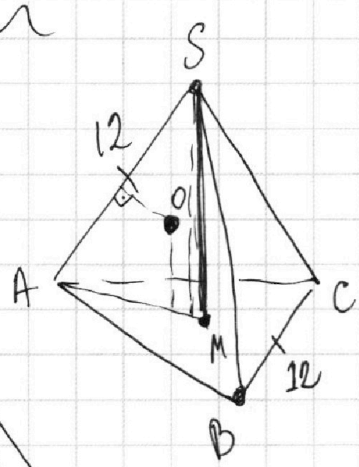
$(abc)_5 \geq 27$

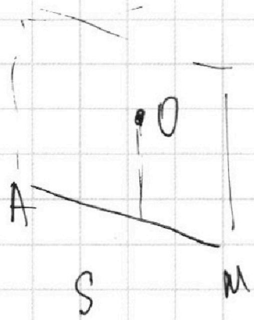
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

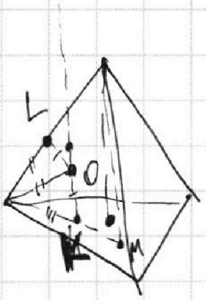
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

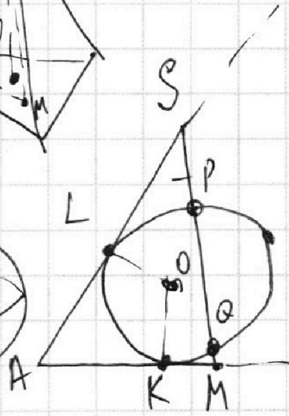
МФТИ

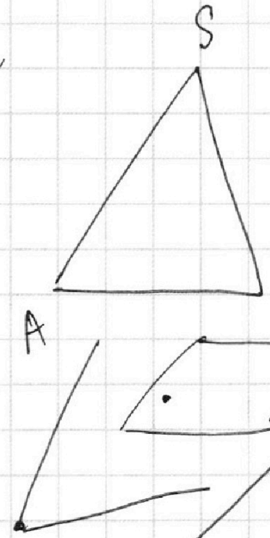


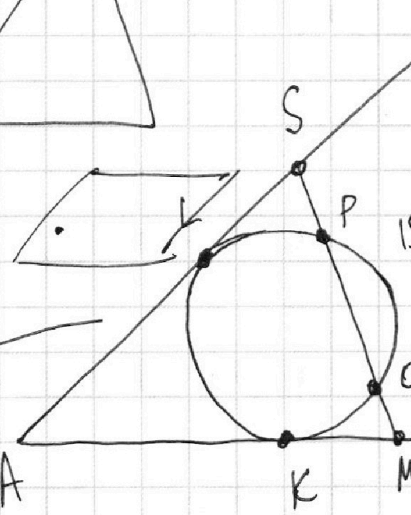



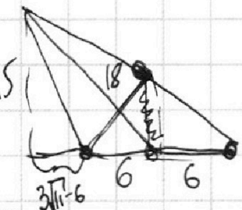

$\sqrt{18^2-15^2} = 3\sqrt{6^2-5^2} = 3\sqrt{11}$



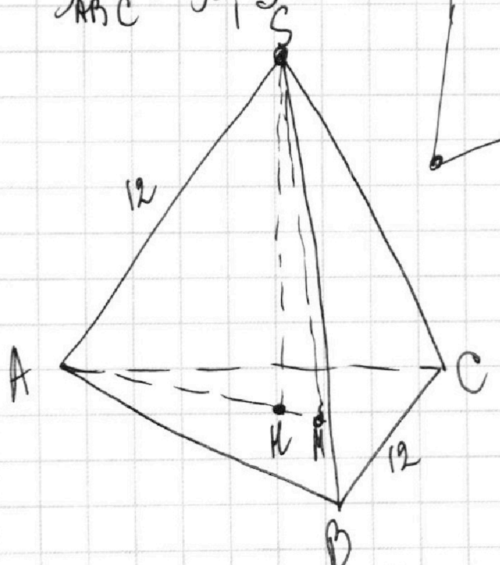




$6\cdot h=90$

$h=\frac{3\cdot 30}{3\cdot 2}=15$

$S_{ABC}=90;\ S$

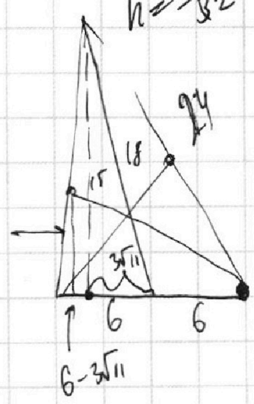


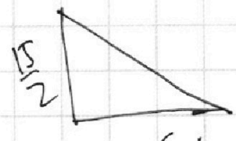

$36-9\cdot 11$

$18-15$

$AM=12$

$AA_1=18$




$6+3\sqrt{11}+\frac{6-3\sqrt{11}}{2}=$

$\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{11}}{2}=\frac{9+3\sqrt{11}}{2}$

$6-3\sqrt{11}+\frac{6+3\sqrt{11}}{2}=\frac{9}{2}-$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

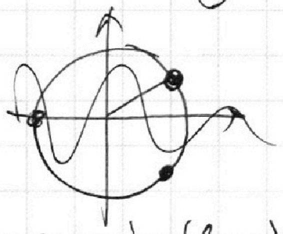
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$-\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$; $\quad -3\pi \le x \le 2\pi$

$\arcsin(\cos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ пра -



$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2}$

$-\pi < -x < 0$

$0 < x < \pi$

$0 \le x \le \pi$

$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$

$-2\pi \le x \le -\pi$

$\arcsin(\cos(x+2\pi)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - (x+2\pi)\right)\right) = -\frac{3\pi}{2} - x$

$\pi \le x \le 2\pi$

$\arcsin(\cos(x)) = \arcsin(\cos(2\pi - x)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi + x\right)\right) = -\frac{3\pi}{2} + x$

$-\pi \le x \le 0$

$\arcsin(\cos(-x)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x$

$-3\pi \le x \le 0$

$\arcsin(\cos(-2\pi - x)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi + x\right)\right) = x + \frac{5\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

arc cos 1

$2\pi = 6x$

$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} = -2\pi$

$x = \frac{\pi}{3}$

$4x = \frac{\pi}{2} - \frac{25\pi}{2} = -12\pi =$

$-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$-8\pi = 6x$

$\frac{\pi}{2} + \frac{15\pi}{2} = 8\pi$

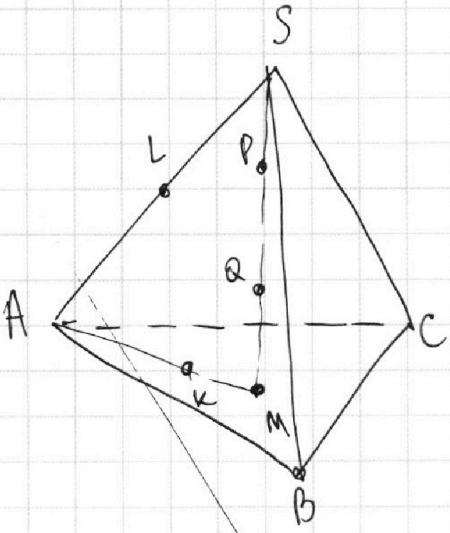
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

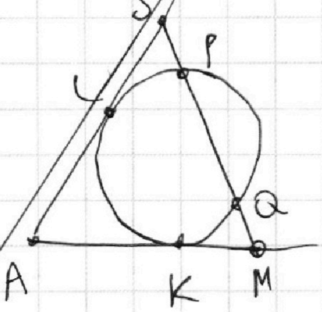
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7




Т. $A, L, K$, а значит и $S, P, Q, M$ лежат в одной плоскости, причем окружность сечения сферы проходит через $P$ и $Q$ и кас. $AS$ и $AM$ в т. $L$ и $K$.

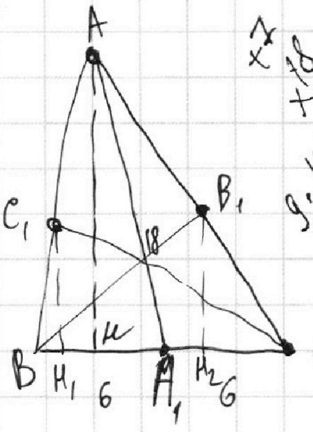



$LS^2 = SP\cdot SQ$

$KM^2 = MQ\cdot MP$

Т.к. $SP = QM$, то и $SQ = MP \Rightarrow$ $LS = KM$.

$b_2 = 2$, $a_2 = 7$, $c_2 = 12$




$AL = AK \Rightarrow AM = AS$

$AM = \frac{2}{3}AA_1 \Rightarrow AA_1 = 12\cdot\frac{3}{2} = 18$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH\cdot BC = 90$ ($H$ – осн. высоты из $A$ на $BC$)

$\Rightarrow AH = \frac{90}{\frac{1}{2}\cdot 12} = 15$

$\Rightarrow$ По т. Пифаг. $A_1H = \sqrt{18^2 - 15^2} = 3\sqrt{11}$

Опустим пер-ры $C_1H_1$ и $B_1H_2$ на $BC$.

$B_1H_2 = C_1H_1 = \frac{AH}{2} = \frac{15}{2}$; $BH_2 = BH + HH_2 = BH + \frac{HC}{2} = 96\cdot 3$

$= 6 - 3\sqrt{11}$

$x\,7$ $+78{,}9$ $9\cdot 18$ $162$

$36\cdot\frac{9}{2}\cdot\sqrt{3}$

$324 + 36 =$

$=$

$3528 + 2250 = 5778$

$225 + 99 = 324$ $\frac{9}{2}\sqrt{36\cdot\sqrt{108}}$

$18\cdot 6 = 60 + 48 = 108$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.